

## Cvičení 8

**Příklad 1:** Průměr z daných  $n > 1$  čísel spočítáme následující funkcí:

```
PRUMER( $X, n$ )
1   $z \leftarrow 0.0$ 
2  for  $i \leftarrow 1$  to  $n$ 
3      do  $z \leftarrow z + X[i]$ 
4  return  $z/n$ 
```

Určete, kolik tato funkce PRUMER vykoná aritmetických operací v závislosti na  $n$ .

**Příklad 2:** Určete, kolik průchodů vnitřním cyklem provede pro vstup  $n$  následující jednoduchý program.

```
ALG1( $n$ )
1  for  $i \leftarrow 1$  to  $n * n$ 
2      do for  $j \leftarrow 1$  to  $i$ 
3          do print “jeden průchod”
```

Je to v asymptotické notaci  $\Theta(n^2)$  nebo  $\Theta(n^3)$  nebo  $\Theta(n^4)$ ?

**Příklad 3:** Popište pseudokódem libovolný algoritmus pro řešení následujícího problému a co nejpřesněji odhadněte jeho časovou a paměťovou složitost:

VSTUP: Sekvence přirozených čísel  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

VÝSTUP: Čísla  $a_1, a_2, \dots, a_n$  seříděná od nejmenšího po největší.

*Poznámka:* V algoritmu se nemusíte zabývat načítáním vstupu a výpisem výstupu.

**Příklad 4:** Popište pseudokódem libovolný algoritmus pro řešení následujícího problému a co nejpřesněji odhadněte jeho časovou a paměťovou složitost:

VSTUP: Matice  $A, B$ , jejichž prvky jsou celá čísla.

VÝSTUP: Matice  $A \cdot B$ .

*Poznámka:* V algoritmu se nemusíte zabývat načítáním vstupu a výpisem výstupu.

**Příklad 5:** Jednoduchá implementace Euklidova algoritmu největšího společného dělitele dvou přirozených čísel  $a, b$  počítá výsledek následovně:

```
EUCLID( $a, b$ )
1  if  $b = 0$ 
2      then return  $a$ 
3  else if  $a > b$ 
4      then return EUCLID( $b, a - b$ )
5      else return EUCLID( $a, b - a$ )
```

Nechť  $k$  označuje počet bitů v binárním zápise čísel  $a, b$ . Jaká je nejhorší možná časová složitost zadaného algoritmu vzhledem ke  $k$ ? (Uvažujte jednotkový čas na každou aritmetickou operaci.)

**Příklad 6:** Kolik kroků (elementárních výpočetních operací) provede následující efektivní implementace Euklidova algoritmu pro největšího společného dělitele na vstupech – číslech  $a, b$ , která mají v binárním zápise nejvýše  $\ell$  bitů? (Předpokládejte, že aritmetické operace trvají jednotkový čas.)

EUCLID( $a, b$ )

```

1  while  $b \neq 0$ 
2      do  $c \leftarrow a \bmod b$ 
3          $a \leftarrow b$ 
4          $b \leftarrow c$ 
5  return  $a$ 
```

**Příklad 7:** Představme si, že z daných  $n$  čísel máme vybrat  $k$ -té v uspořádání podle velikosti. (Nejpřirozenějším postupem by bylo čísla setřídít a pak  $k$ -té z nich vybrat, ale to je spousta zbytečných výpočtů navíc, že?)

Pro rychlý výpočet použijeme následující rekurzivní algoritmus, svým způsobem podobný algoritmu Quicksort.

Rekurzivní procedura VYBER( $A, p, r, k$ ) vracející  $k$ -tý nejmenší prvek z úseku pole  $A[p..r]$  (kde  $p \leq k \leq r$ ) pracuje následovně:

- Z úseku  $A[p..r]$  zvolíme libovolný prvek  $x$  a tento úsek přeuspořádáme tak, že bude rozdělen na tři části:
  - $A[p..q-1]$  – obsahující prvky, které jsou menší než  $x$ ,
  - $A[q..q']$  – obsahující prvky, které jsou rovny  $x$ ,
  - $A[q'+1..r]$  – obsahující prvky, které jsou větší než  $x$
- Pokud je  $q \leq k \leq q'$ , je výsledkem  $x$ .
- Pokud  $k < q$ , výsledek spočítáme rekurzivním výpočtem jako VYBER( $A, p, q-1, k$ ).
- Pokud  $k > q'$ , výsledek spočítáme rekurzivním výpočtem jako VYBER( $A, q'+1, r, k$ ).

Jaká je časová složitost popsaného algoritmu?

**Příklad 8:** Určete, kolik průchodů vnitřním cyklem provede pro vstup  $n$  následující jednoduchý program.

ALG2( $n$ )

```

1  for  $i \leftarrow 1$  to  $n$ 
2      do for  $j \leftarrow 1$  to  $i * i$ 
3          do print "jeden průchod"
```

Je to v asymptotické notaci  $\Theta(n^2)$  nebo  $\Theta(n^3)$  nebo  $\Theta(n^4)$ ?

**Příklad 9:** Určete, kolik průchodů cyklem provede následující program pro vstup  $n$ . Zapište výsledek v asymptotické notaci  $\Theta(\cdot)$ .

```
ALG3( $n$ )
1   $i \leftarrow 1$ 
2  while  $i < n$ 
3      do print “jeden průchod”
4       $i \leftarrow i + i$ 
```

**\*Příklad 10:** Určete, kolik průchodů cyklem provede následující program pro vstup  $n$ . Zapište výsledek v asymptotické notaci  $\Theta(\cdot)$ .

```
ALG4( $n$ )
1   $i \leftarrow 1; j \leftarrow 1$ 
2  while  $i < n$ 
3      do print “jeden průchod”
4       $i \leftarrow i + j$ 
5       $j \leftarrow j + 1$ 
```