

## Cvičení 1

**Příklad 1:** Pro každý z následujících formálních zápisů množin uveďte (svými slovy), jaké prvky daná množina obsahuje:

- a)  $\{1, 3, 5, 7, \dots\}$
- b)  $\{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$
- c)  $\{n \mid n = 2m \text{ pro nějaké } m \in \mathbb{N}\}$
- d)  $\{n \mid n = 2m \text{ pro nějaké } m \in \mathbb{N} \text{ a } n = 3k \text{ pro nějaké } k \in \mathbb{N}\}$
- e)  $\{n \in \mathbb{Z} \mid n = n + 1\}$

**Příklad 2:** Popište vhodným formálním zápisem následující množiny:

- a) Množina obsahující čísla 1, 10 a 100.
- b) Množina obsahující všechna celá čísla větší než 5.
- c) Množina obsahující všechna přirozená čísla menší než 5.
- d) Množina neobsahující žádné prvky.
- e) Množina všech podmnožin dané množiny  $X$ .

**Příklad 3:** Uvažujme množiny  $A = \{x, y, z\}$  a  $B = \{x, y\}$ .

- a) Je  $A \subseteq B$ ?
- b) Je  $A \supseteq B$ ?
- c) Co je  $A \cup B$ ?
- d) Co je  $A \cap B$ ?
- e) Co je  $A \times B$ ?
- f) Co je  $\mathcal{P}(B)$ ?

**Příklad 4:** Jestliže množina  $A$  má  $a$  prvků a množina  $B$  má  $b$  prvků, kolik prvků má množina  $A \times B$ ? Vaši odpověď vysvětlete.

**Příklad 5:** Jestliže množina  $C$  má  $c$  prvků, kolik prvků má množina  $\mathcal{P}(C)$ ? Vaši odpověď vysvětlete.

**Příklad 6:** Nechtě  $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  a  $Y = \{6, 7, 8, 9, 10\}$ . Unární funkce  $f : X \rightarrow Y$  a binární funkce  $g : X \times Y \rightarrow Y$  jsou popsány následujícími tabulkami:

$n$	$f(n)$
1	6
2	7
3	6
4	7
5	6

$g$	6	7	8	9	10
1	10	10	10	10	10
2	7	8	9	10	6
3	7	7	8	8	9
4	9	8	7	6	10
5	6	6	6	6	6

- a) Jaká je hodnota  $f(2)$ ?
- b) Co definičním oborem a oborem hodnot funkce  $f$ ?
- c) Jaká je hodnota  $g(2, 10)$ ?
- d) Co definičním oborem a oborem hodnot funkce  $g$ ?
- e) Jaká je hodnota  $g(4, f(4))$ ?

**Příklad 7:** Uveďte příklad relace, která je:

- a) Reflexivní a symetrická, ale není tranzitivní.
- b) Reflexivní a tranzitivní, ale není symetrická.
- c) Symetrická a tranzitivní, ale není reflexivní.

**Příklad 8:** Kde je chyba v následujícím důkaze toho, že všichni koně mají stejnou barvu?

**TVRZENÍ:** Pro libovolnou množinu  $n$  koňů platí, že všichni koně v této množině mají stejnou barvu.

*Důkaz:* Indukcí podle  $n$ .

- **Báze:** Pro  $n = 1$  tvrzení zjevně platí, protože v množině obsahující právě jednoho koně mají všichni koně stejnou barvu.
- **Indukční krok:** Předpokládejme, že tvrzení platí pro  $n = k$  pro nějaké  $k \geq 1$ . Ukážeme, že pak platí i pro  $n = k + 1$ . Vezměme nějakou množinu  $K$  obsahující  $k + 1$  koňů. Z této množiny odebereme jednoho koně, čímž dostaneme nějakou množinu  $K_1$  obsahující  $k$  koňů. Podle indukčního předpokladu mají všichni koně v  $K_1$  stejnou barvu. Nyní vrátíme koně, kterého jsme předtím odebrali, a odebereme nějakého jiného koně, čímž dostaneme množinu  $K_2$  obsahující  $k$  koňů. Stejně jako v předchozím případě mají podle indukčního předpokladu všichni koně v  $K_2$  stejnou barvu. Z toho plyne, že všichni koně v množině  $K$  mají stejnou barvu.

**Příklad 9:** Co nejvíce zjednodušte dva následující výrazy:

$$\sum_{k=1}^n (2k - 1) \qquad \prod_{k=1}^n 2 \cdot 4^k$$

**Příklad 10:**  $n$ -té harmonické číslo je definováno předpisem

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Ukažte, že pro všechna  $n \geq 1$  platí

$$\ln(n + 1) \leq H_n \leq \ln n + 1$$

**Příklad 11:**

- Ukažte, že množina všech racionálních čísel  $\mathbb{Q}$  je spočetná. (Ukažte, že existuje bijekce z množiny přirozených čísel  $\mathbb{N}$  do množiny  $\mathbb{Q}$ .)
- Předpokládejme, že množina  $X$  je spočetná. Ukažte, že množina všech konečných posloupností prvků z  $X$  je spočetná.
- Ukažte, že množina všech reálných čísel  $\mathbb{R}$  nespočetná.
- Ukažte, že pro libovolnou nekonečnou spočetnou množinu  $X$  platí, že množina  $\mathcal{P}(X)$  je nespočetná.

**Příklad 12:** Uveďte příklad uspořádání na množině přirozených čísel, které není úplným uspořádáním.

**Příklad 13:** Předpokládejme, že  $n \geq 1$  je nějaké dané přirozené číslo. Ukažte, že relace

$$a \equiv b \pmod{n}$$

je ekvivalence.

*Poznámka:* Zápis  $a \equiv b \pmod{n}$  znamená, že  $a$  i  $b$  dávají po dělení  $n$  stejný zbytek, tj.  $(a \bmod n) = (b \bmod n)$ .

**Příklad 14:** Nechť  $S$  je konečná množina a  $R \subseteq S \times S$  ekvivalence. Ukažte, že pokud relace  $R$  je současně také antisymetrická, pak její třídy ekvivalence jsou jednoprvkové množiny.

**Příklad 15:** Je následující tvrzení pravdivé? Vyskytuje se v jeho důkaze nějaká chyba?

**TVRZENÍ:** Jestliže je relace  $R$  symetrická a tranzitivní, pak je i reflexivní.

*Důkaz:* Díky symetrii platí pro libovolné dva prvky  $a$  a  $b$ , že z  $aRb$  plyne  $bRa$ . Díky tranzitivitě z toho plyne  $aRa$ , čímž je důkaz hotov.

**Příklad 16:** Předpokládejme, že  $A$  a  $B$  jsou konečné množiny a  $f : A \rightarrow B$  je funkce. Ukažte, že:

- Jestliže  $f$  je injektivní, pak  $|A| \leq |B|$ .
- Jestliže  $f$  je surjektivní, pak  $|A| \geq |B|$ .

**Příklad 17:** Je funkce  $f(x) = x + 1$  bijekcí na množině přirozených čísel  $\mathbb{N}$ ? A na množině celých čísel  $\mathbb{Z}$ ?

**Příklad 18:** Navrhněte a podrobně popište algoritmus, který řeší následující problém:

VSTUP: Orientovaný graf  $G = (V, E)$ , vrchol  $s \in V$ .

VÝSTUP: Množina všech vrcholů dosažitelných z  $s$ .

Kolik operací váš algoritmus zhruba provede, jestliže dostane na vstupu graf, který má  $n$  vrcholů a  $m$  hran?

**Příklad 19:** Uvažujme nějaký binární strom  $T$ , kde každý vrchol, který není listem, má dva potomky. Jakou minimální a maximální výšku může mít strom  $T$ , jestliže má celkem  $n$  vrcholů? (Výškou stromu myslíme vzdálenost od kořene k nejvzdálenějšímu vrcholu.)

**Příklad 20:** Ukažte, že binární strom, který má  $n$  listů, má právě  $n - 1$  vrcholů, které mají 2 potomky.