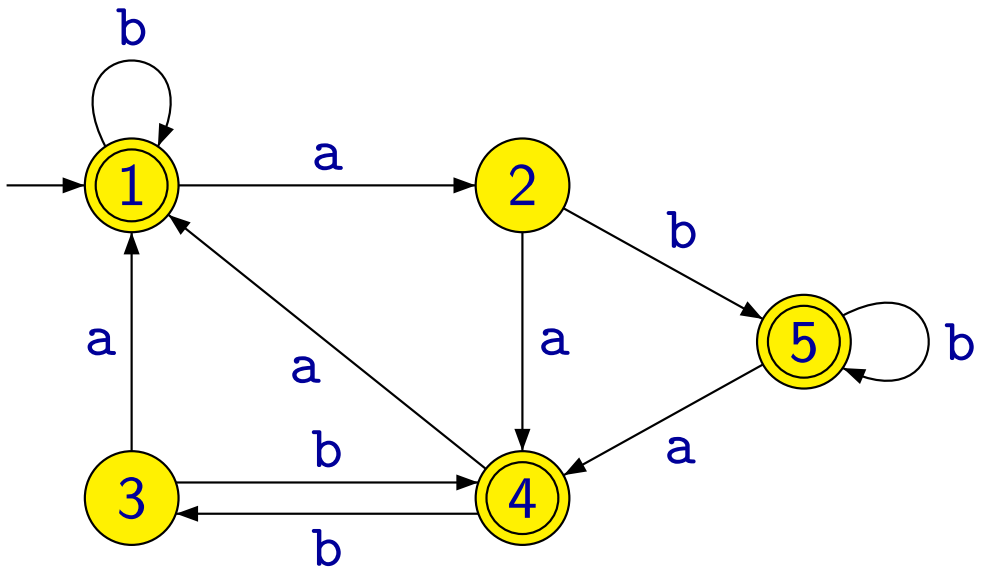
Jazyk rozpoznávaný automatem

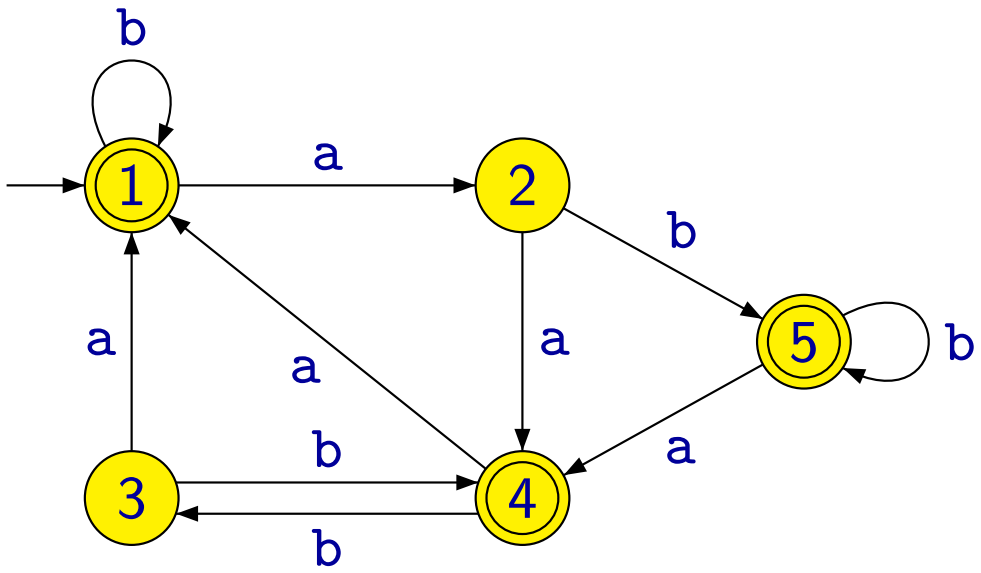


Uvažujme libovolný **sled** v grafu takový, že:

- Začíná v počátečním stavu.
- Končí v některém z přijímajících stavů.

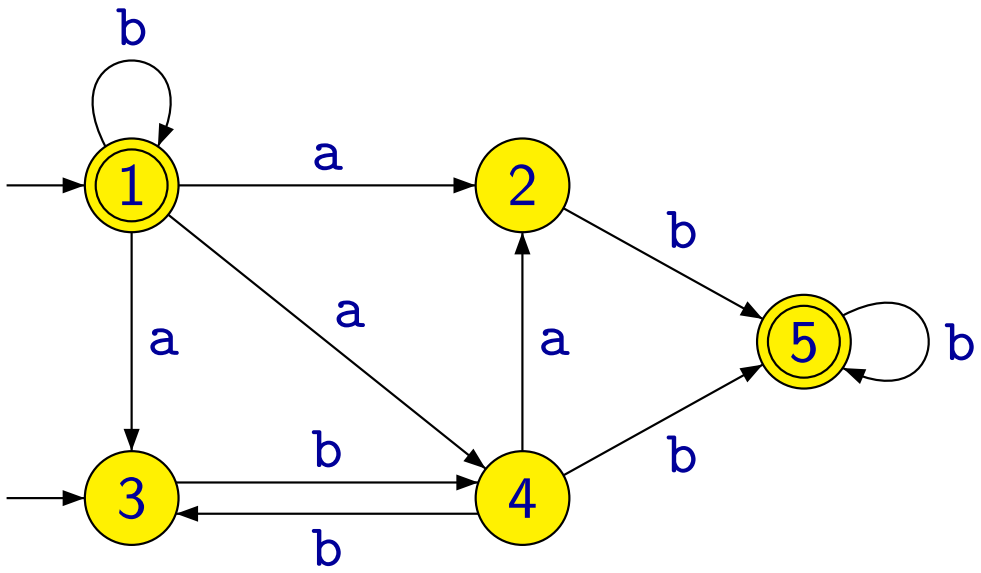
Symboly, jimiž jsou ohodnoceny hrany (tj. přechody) v tomto sledu, tvoří **slovo**, které je přijímáno daným automatem.

Jazyk rozpoznávaný automatem



Jazyk rozpoznávaný automatem je množina všech slov, pro které v grafu existuje takovýto sled.

Nedeterministický konečný automat



Je očividné, že pokud jazyk definujeme tímto způsobem, nemusíme se omezovat na grafy, kde:

- Z každého stavu vede právě jedna hrana označená daným symbolem abecedy.
- Máme právě jeden počáteční stav.

Nedeterministický konečný automat

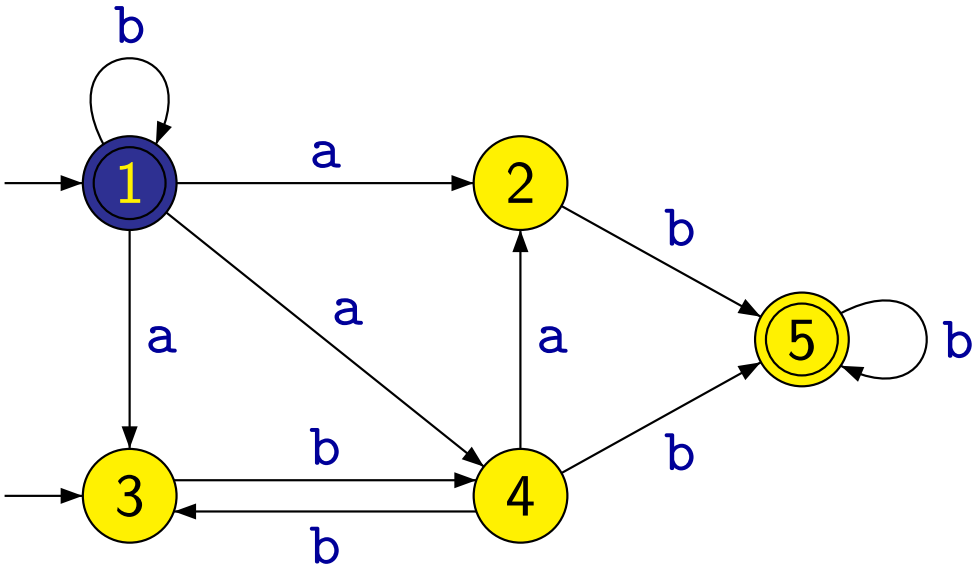
Takto obecněji definovaný automat se nazývá **nedeterministický konečný automat**.

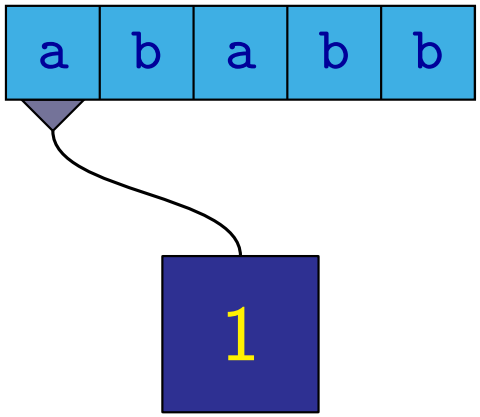
Rozdíly oproti deterministickým konečným automatům:

- Z jednoho stavu může vézt libovolný (i nulový) počet přechodů označených stejným symbolem.
- V automatu může být víc než jeden počáteční stav.

Pokud se na automat díváme jako na zařízení čtoucí slovo, vidíme, že jednomu slovu může odpovídat více než jeden výpočet (nebo naopak žádný).

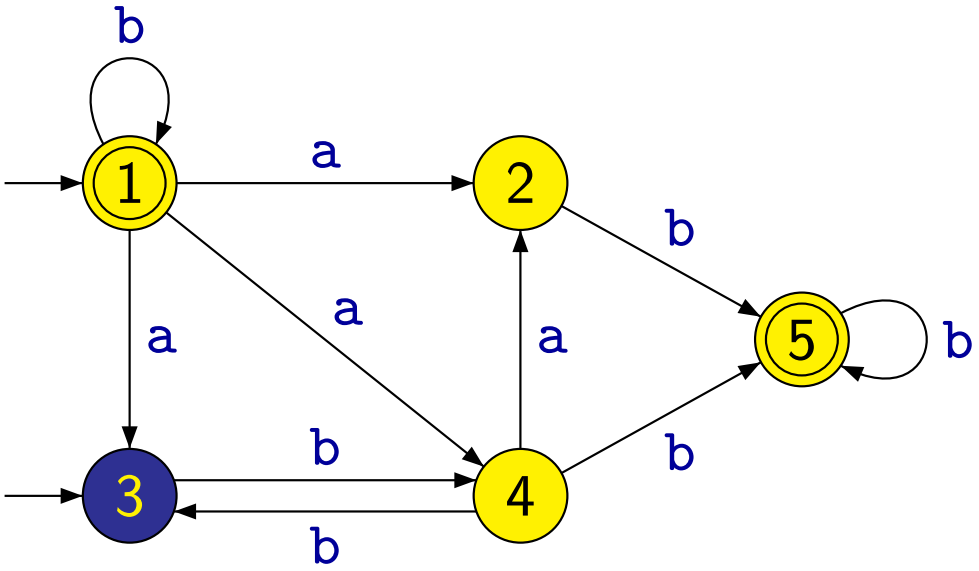
Nedeterministický konečný automat

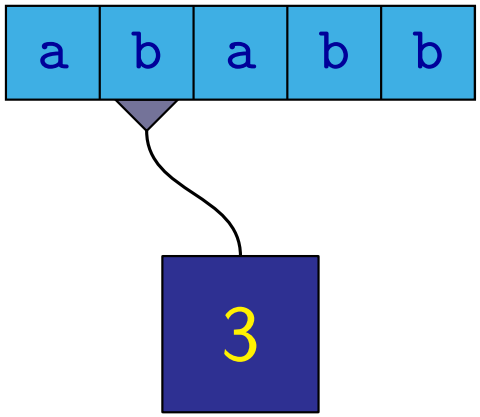




$(1, \mathtt{ababb})$

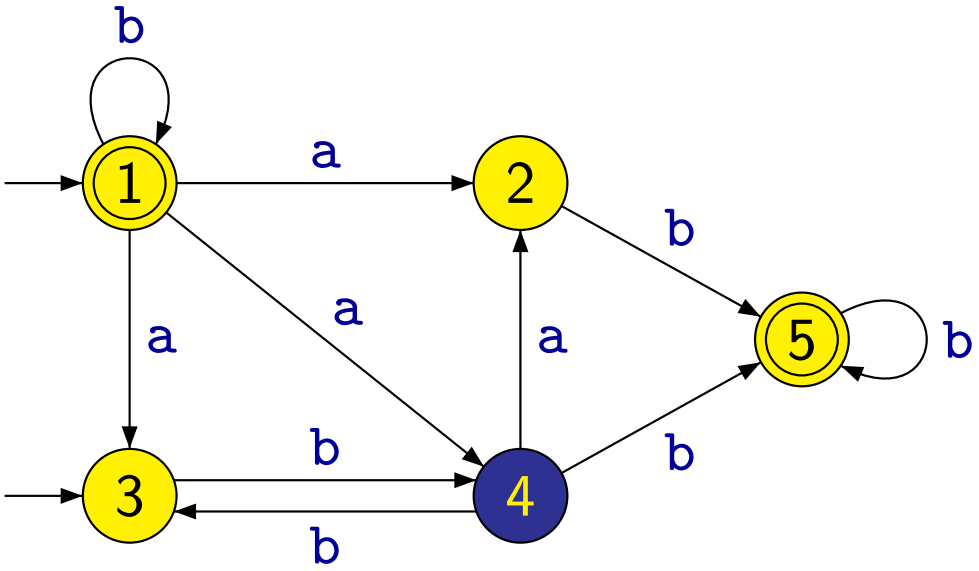
Nedeterministický konečný automat

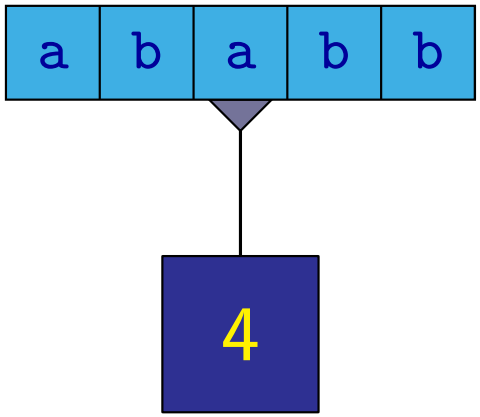




$(1, \mathtt{ababb})$
$\vdash (3, \mathtt{babb})$

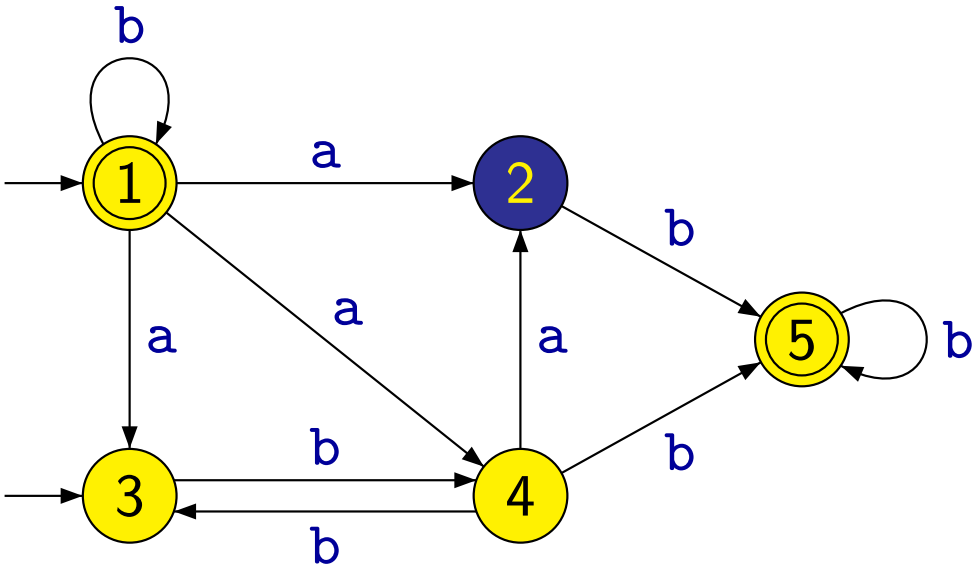
Nedeterministický konečný automat

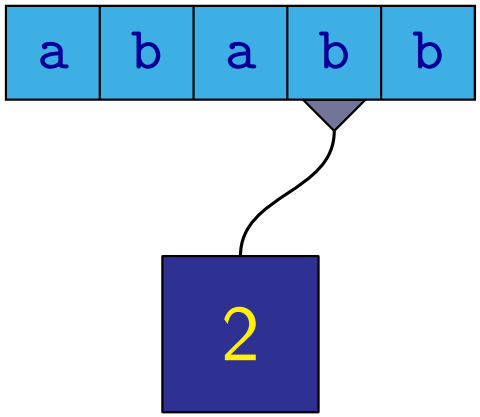




$(1, \mathtt{ababb})$
$\vdash (3, \mathtt{babb})$
$\vdash (4, \mathtt{abb})$

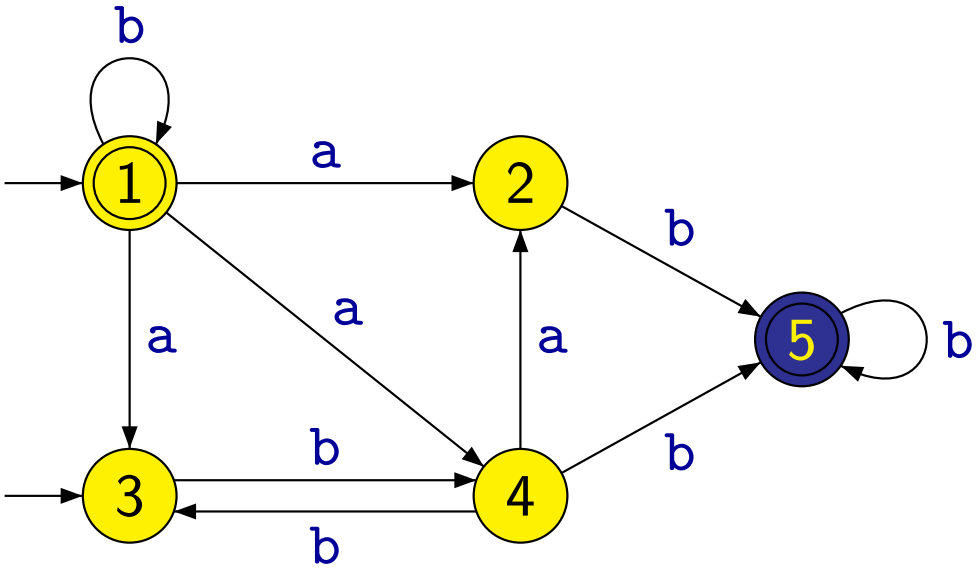
Nedeterministický konečný automat

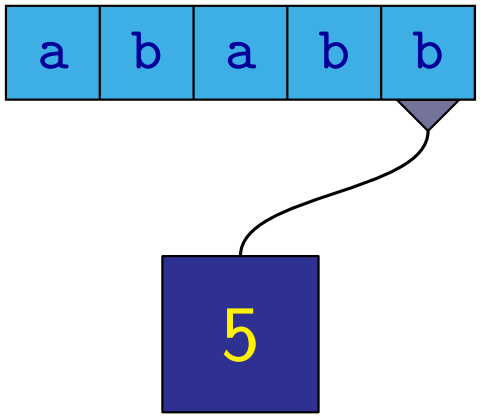




$(1, \mathtt{ababb})$
$\vdash (3, \mathtt{babb})$
$\vdash (4, \mathtt{abb})$
$\vdash (2, \mathtt{bb})$

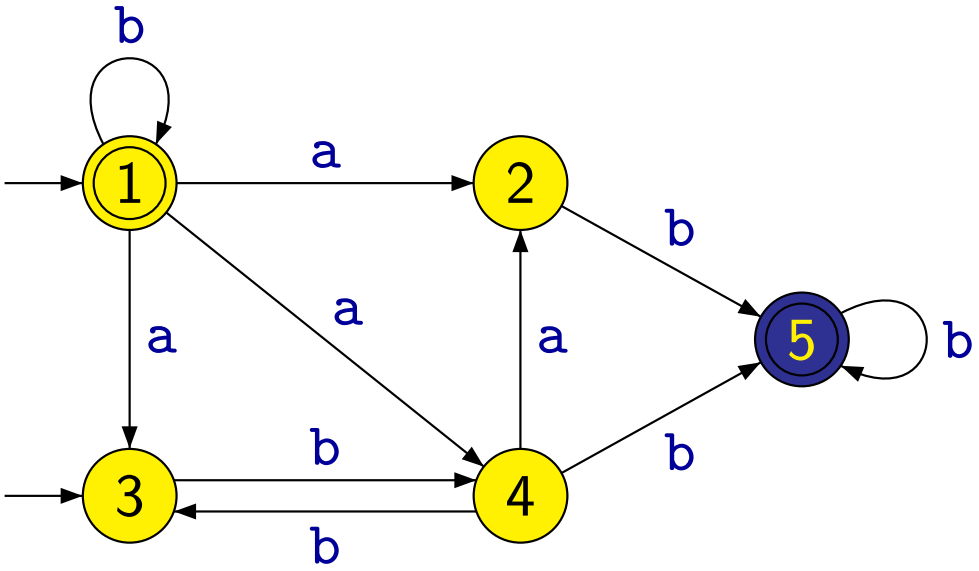
Nedeterministický konečný automat

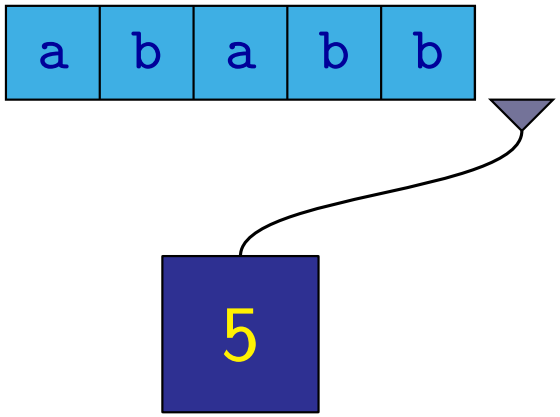




$(1, \mathtt{ababb})$
$\vdash (3, \mathtt{babb})$
$\vdash (4, \mathtt{abb})$
$\vdash (2, \mathtt{bb})$
$\vdash (5, \mathtt{b})$

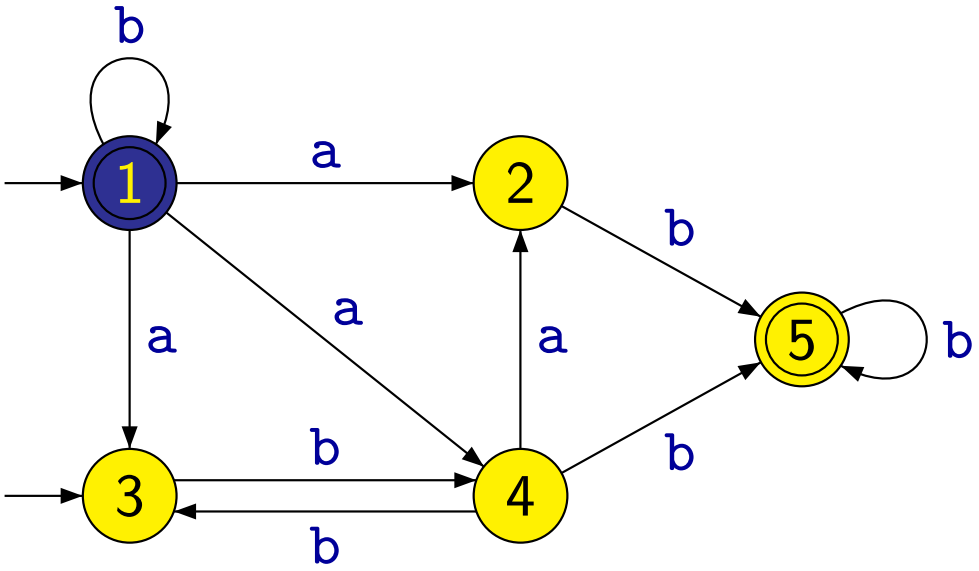
Nedeterministický konečný automat

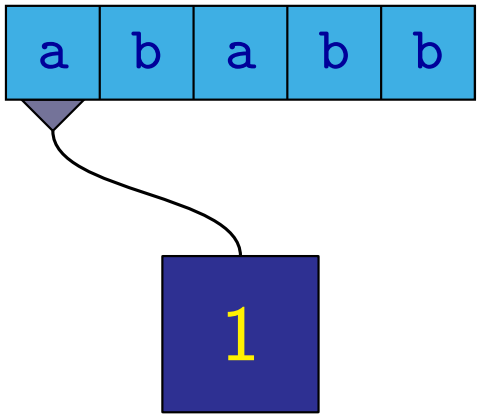




$(1, \mathtt{ababb})$
$\vdash (3, \mathtt{babb})$
$\vdash (4, \mathtt{abb})$
$\vdash (2, \mathtt{bb})$
$\vdash (5, \mathtt{b})$
$\vdash (5, \varepsilon)$

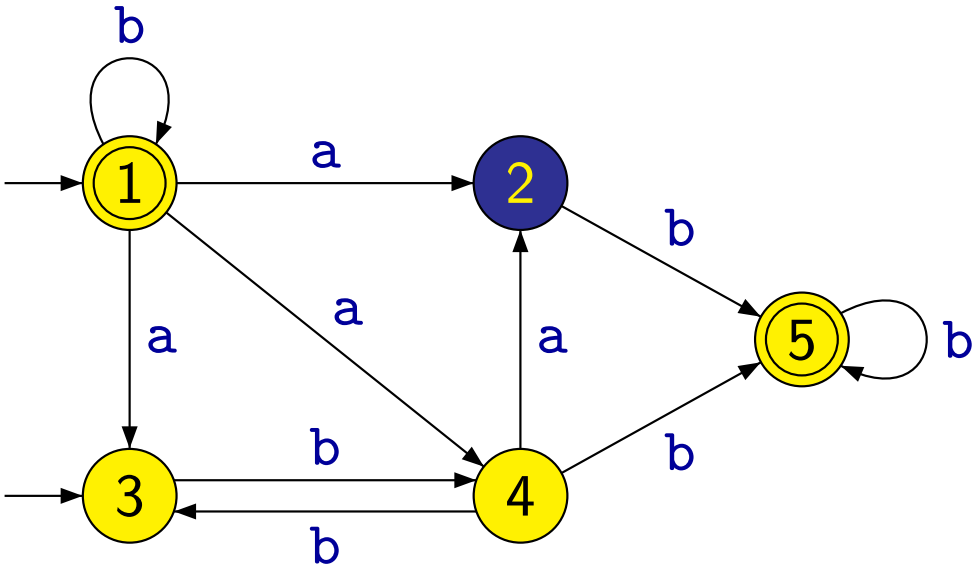
Nedeterministický konečný automat

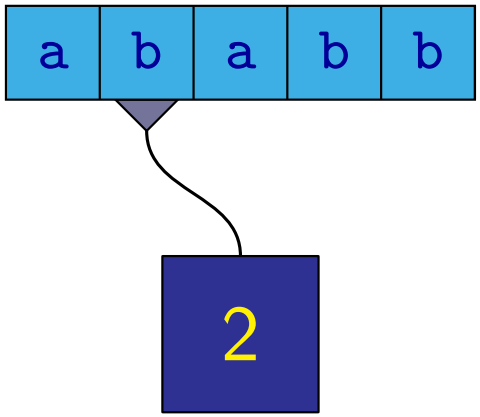




$(1, \mathtt{ababb})$

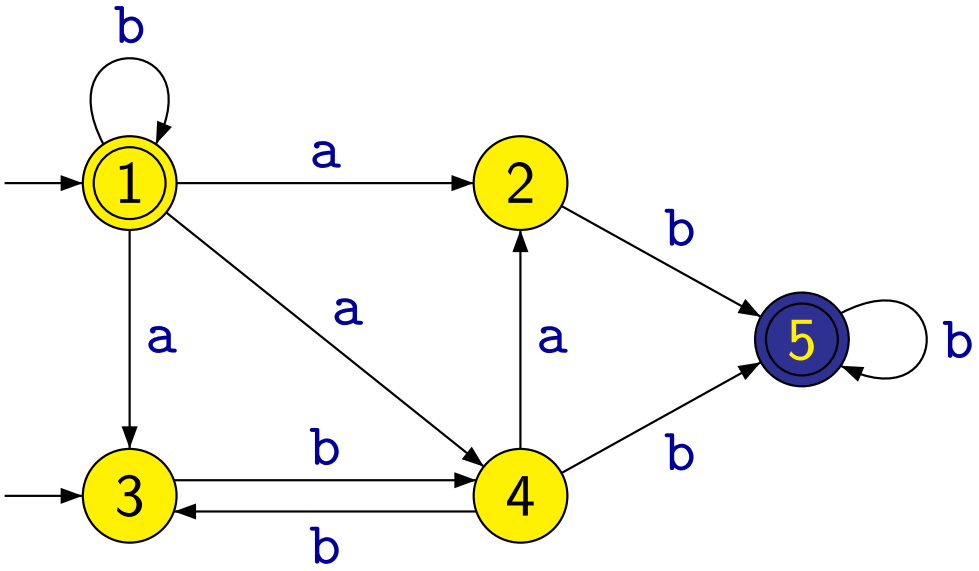
Nedeterministický konečný automat

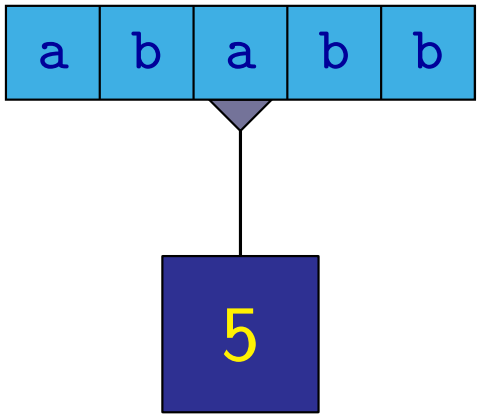




$(1, \mathtt{ababb})$
$\vdash (2, \mathtt{babb})$

Nedeterministický konečný automat

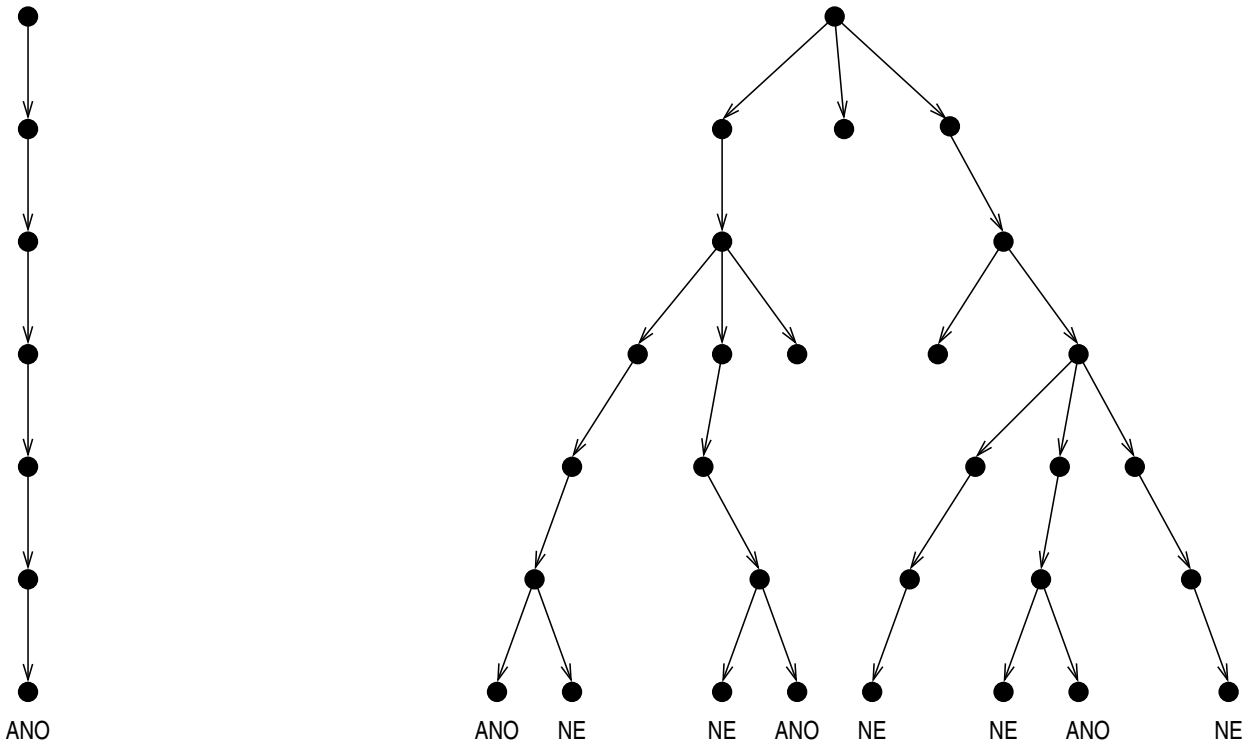




$$(1, \mathtt{ababb}) \vdash (2, \mathtt{babb}) \vdash (5, \mathtt{abb})$$

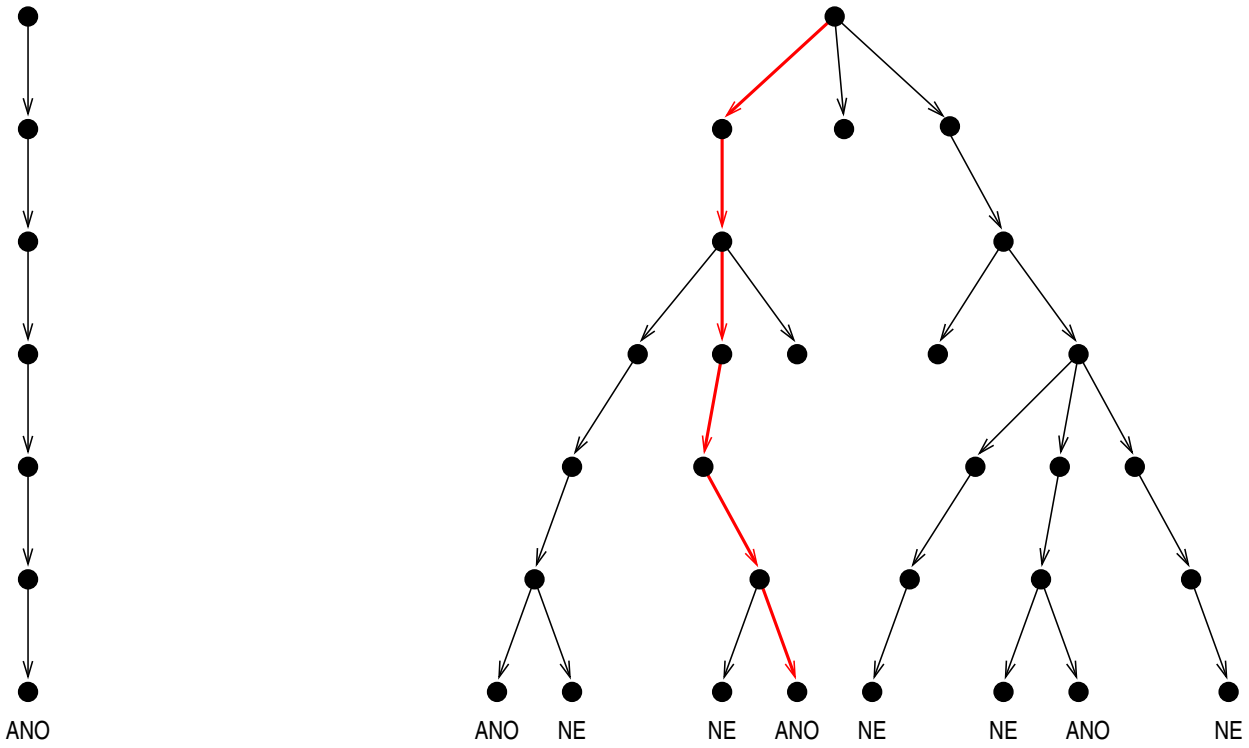
Nedeterministický konečný automat

Nedeterministický konečný automat přijímá dané slovo, jestliže **existuje** alespoň jeden jeho výpočet, který vede k přijetí tohoto slova.



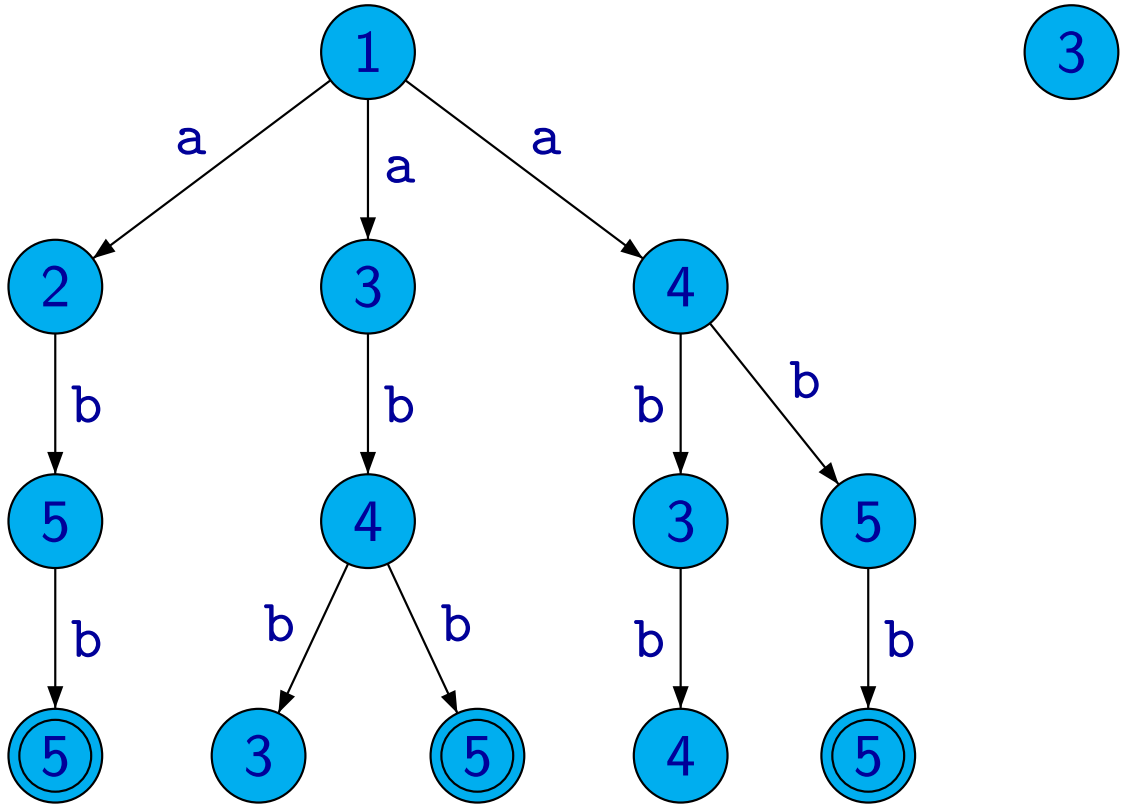
Nedeterministický konečný automat

Nedeterministický konečný automat přijímá dané slovo, jestliže **existuje** alespoň jeden jeho výpočet, který vede k přijetí tohoto slova.



Nedeterministický konečný automat

	a	b
↔ 1	2, 3, 4	1
2	–	5
→ 3	–	4
4	2	3, 5
← 5	–	5



Příklad: Les reprezentující všechny možné výpočty nad slovem `abb`.

Nedeterministický konečný automat

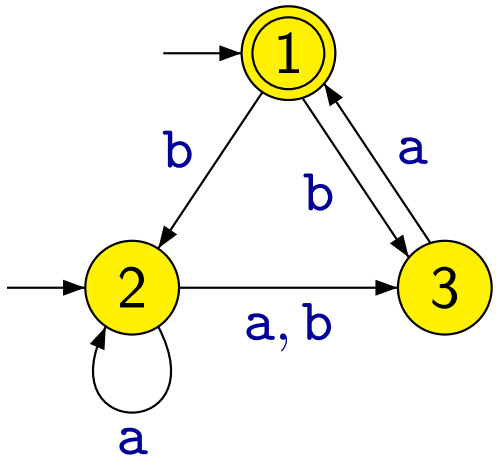
Formálně je **nedeterministický konečný automat** definován jako pětice

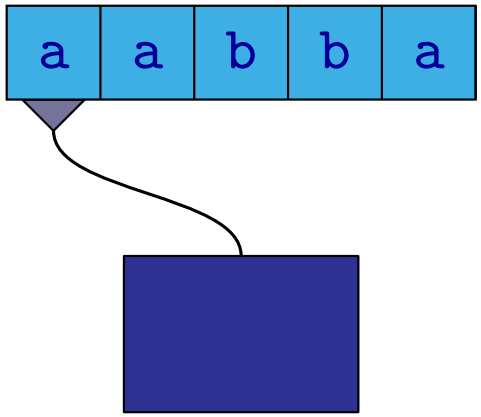
$$(Q, \Sigma, \delta, I, F)$$

kde:

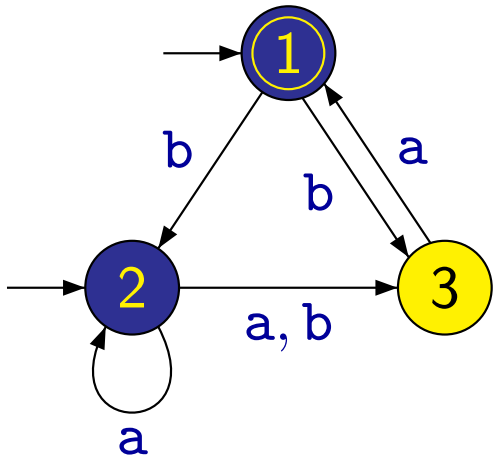
- Q je konečná množina **stavů**
- Σ je konečná **abeceda**
- $\delta : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$ je **přechodová funkce**
- $I \subseteq Q$ je množina **počátečních stavů**
- $F \subseteq Q$ je množina **přijímajících stavů**

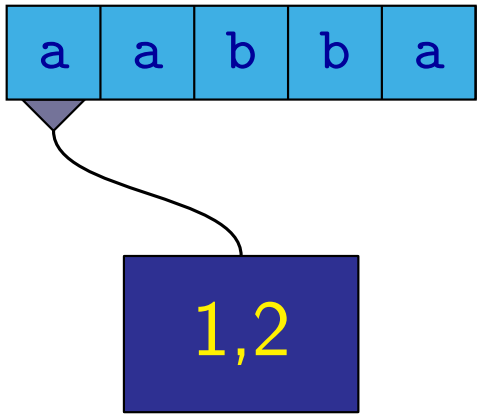
Převod nedeterministického automatu na deterministický



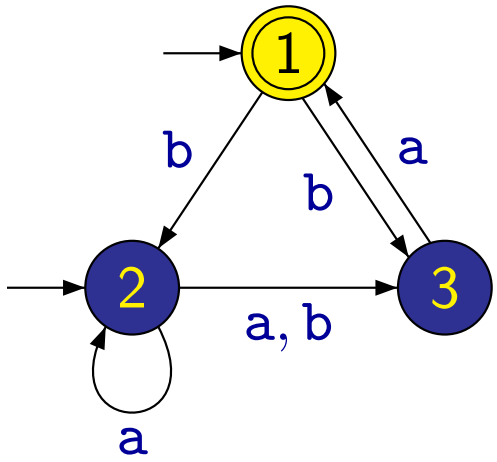


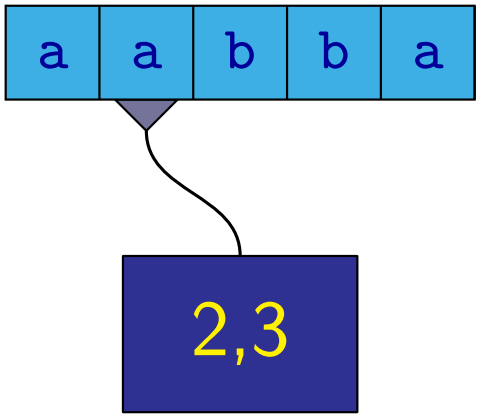
Převod nedeterministického automatu na deterministický



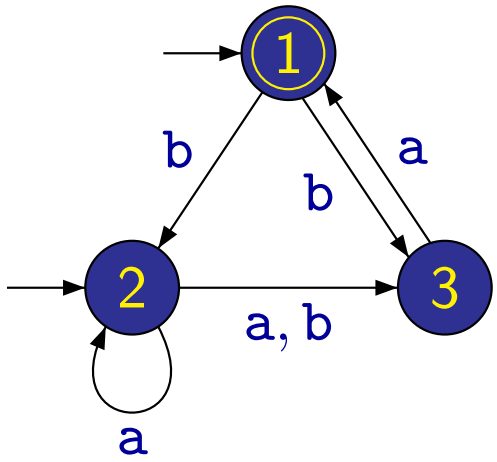


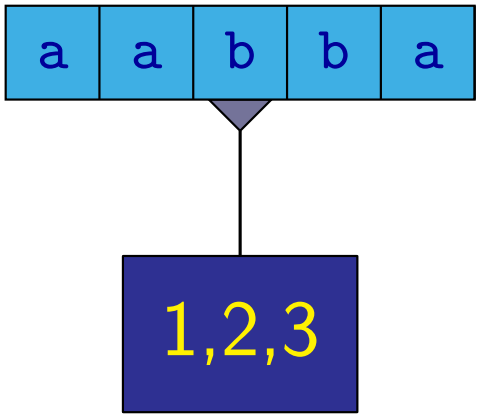
Převod nedeterministického automatu na deterministický



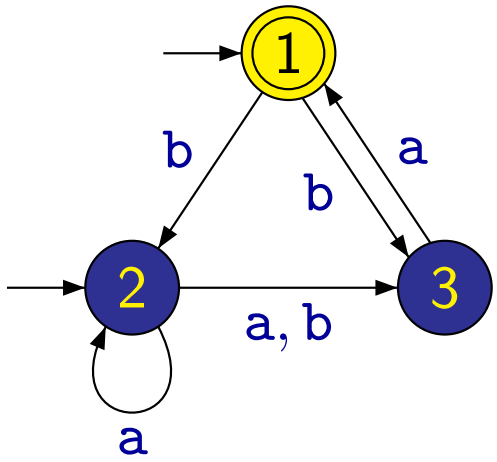


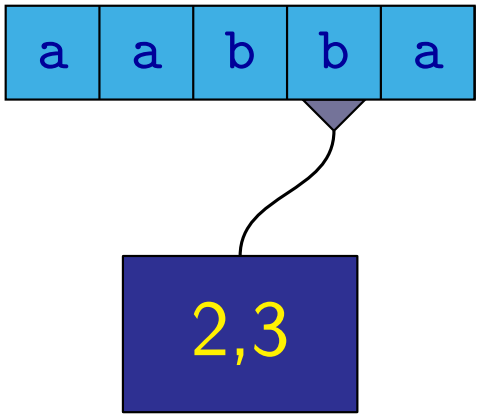
Převod nedeterministického automatu na deterministický



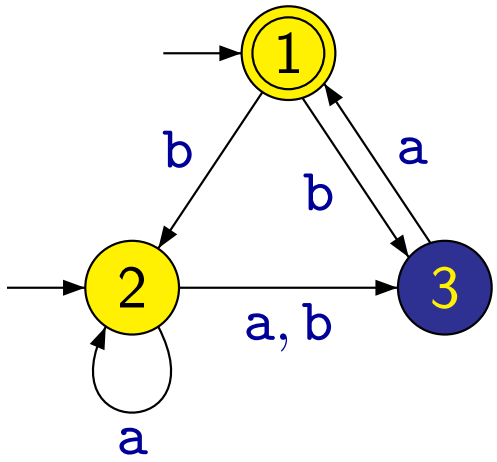


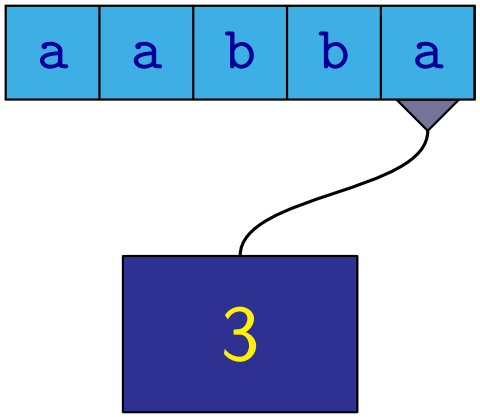
Převod nedeterministického automatu na deterministický



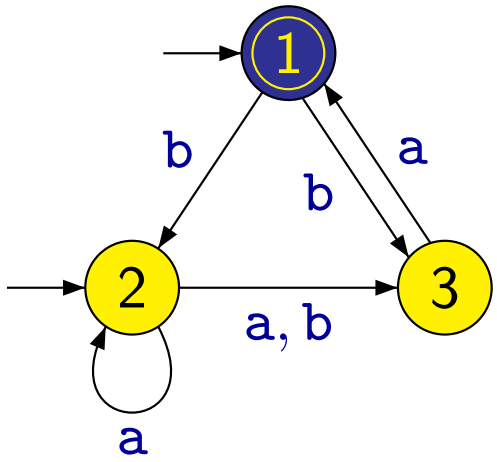


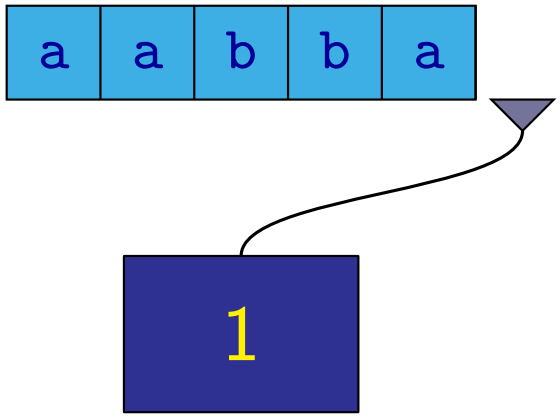
Převod nedeterministického automatu na deterministický



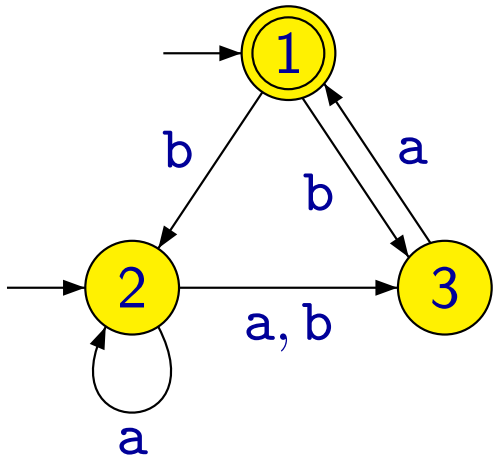


Převod nedeterministického automatu na deterministický

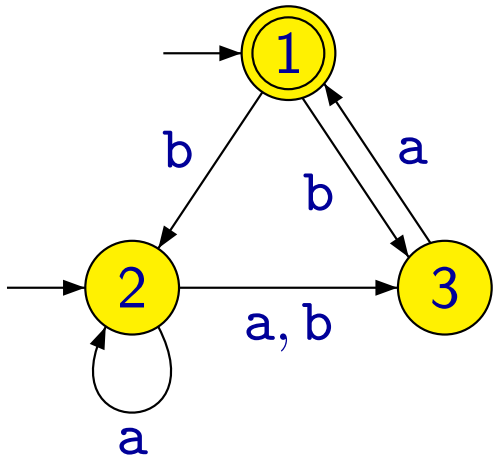




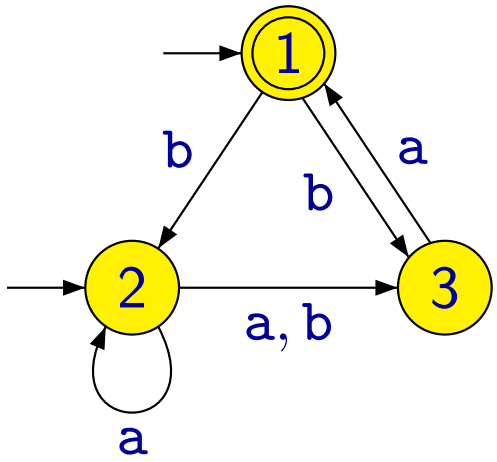
Převod nedeterministického automatu na deterministický

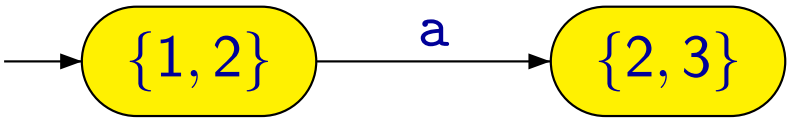


Převod nedeterministického automatu na deterministický

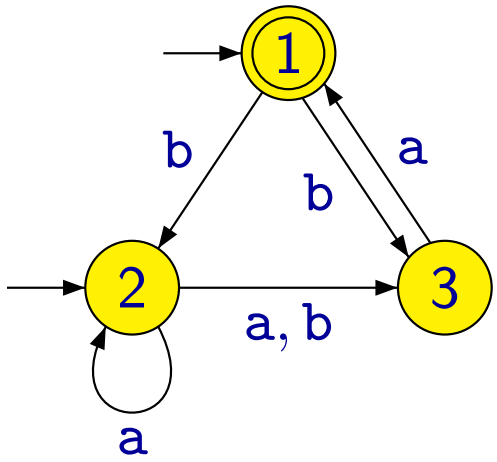


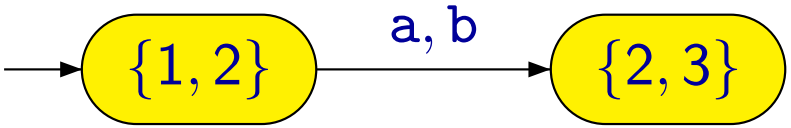
Převod nedeterministického automatu na deterministický



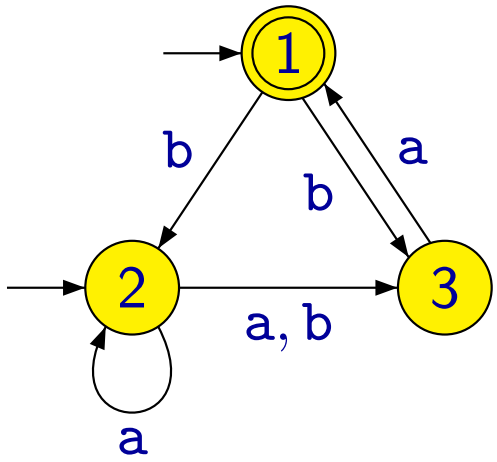


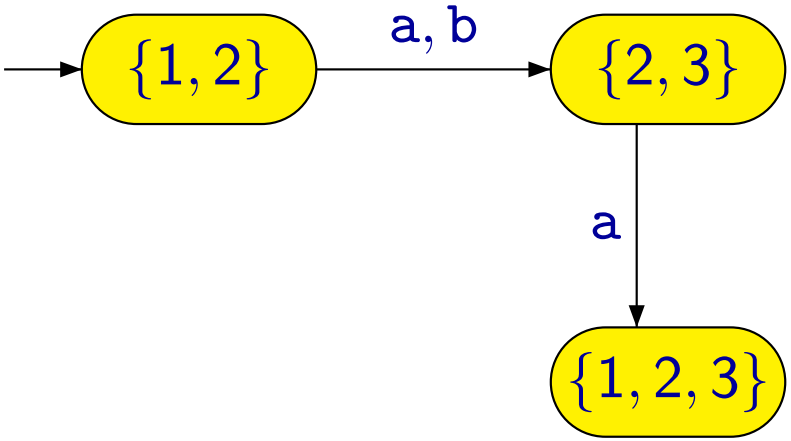
Převod nedeterministického automatu na deterministický



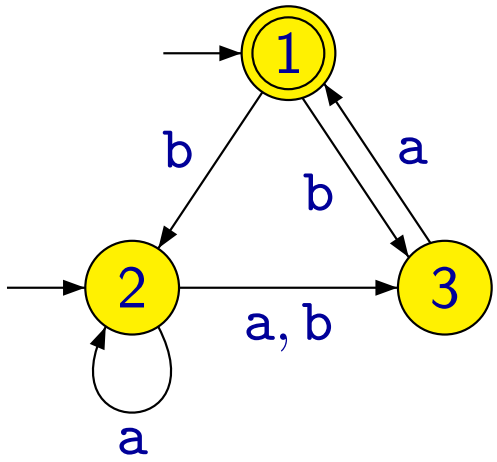


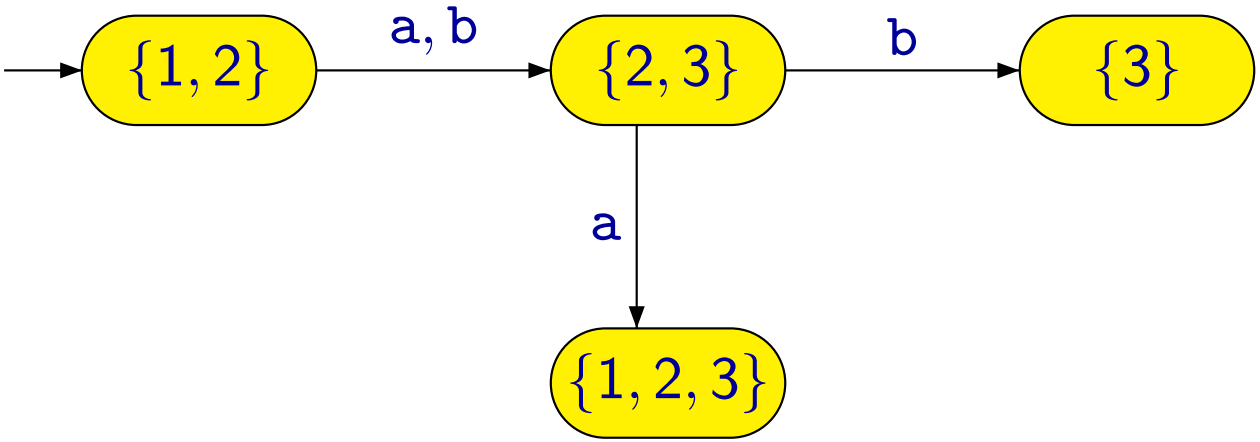
Převod nedeterministického automatu na deterministický



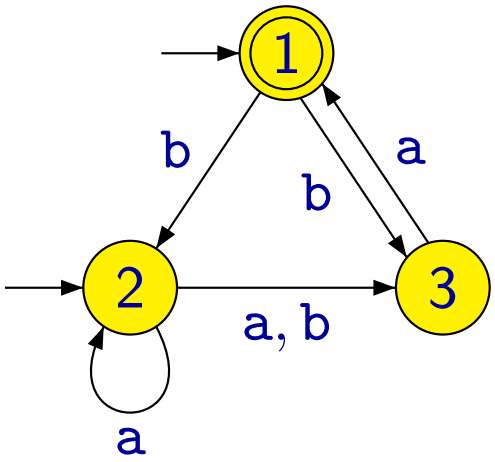


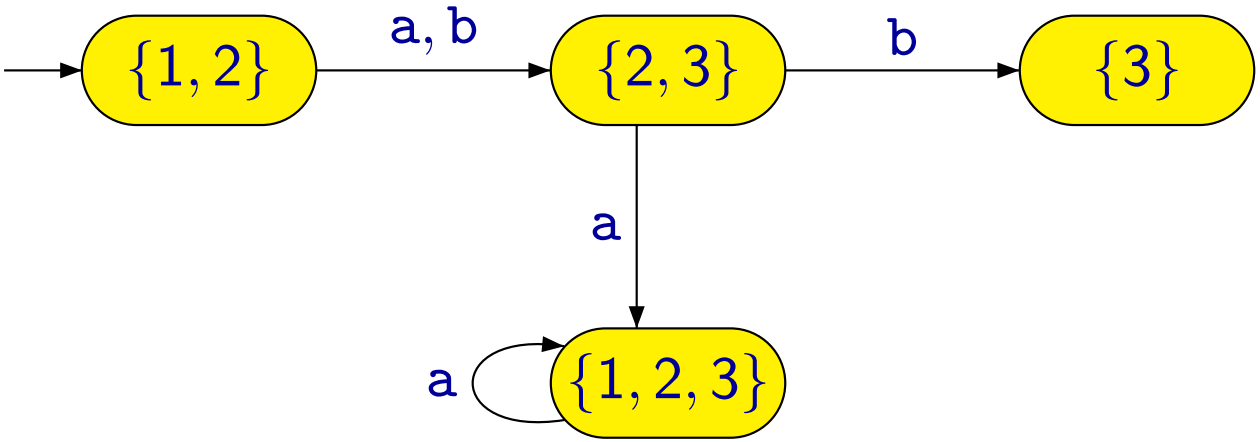
Převod nedeterministického automatu na deterministický



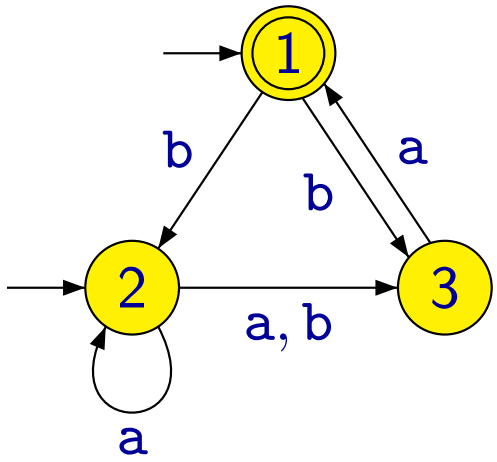


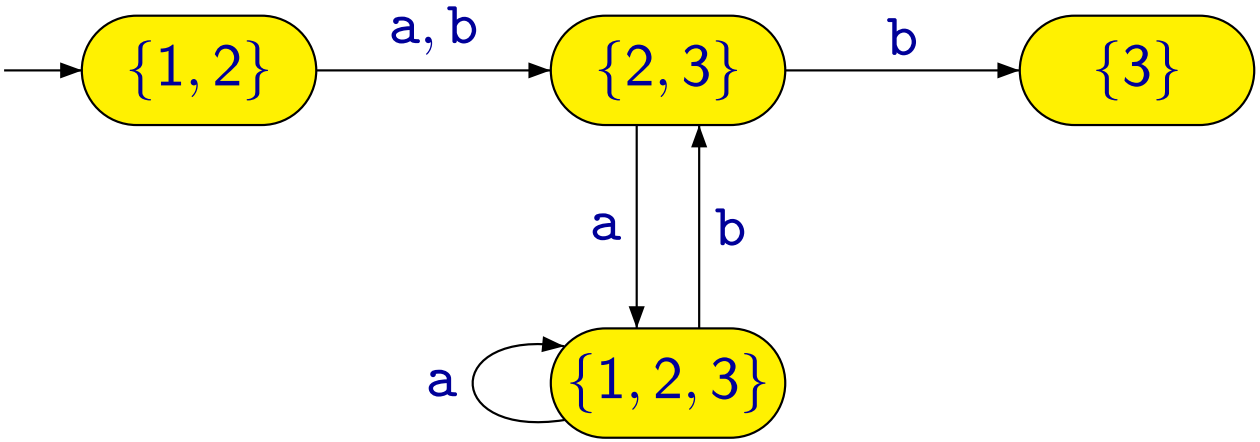
Převod nedeterministického automatu na deterministický



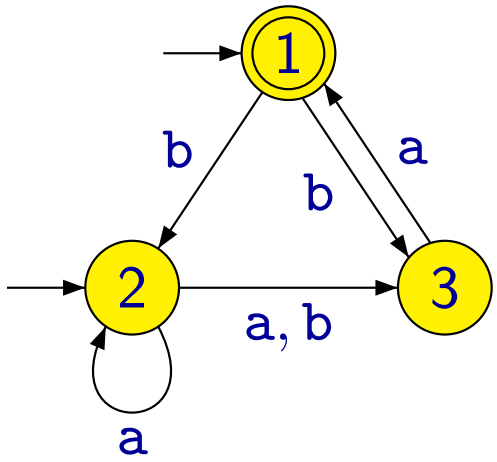


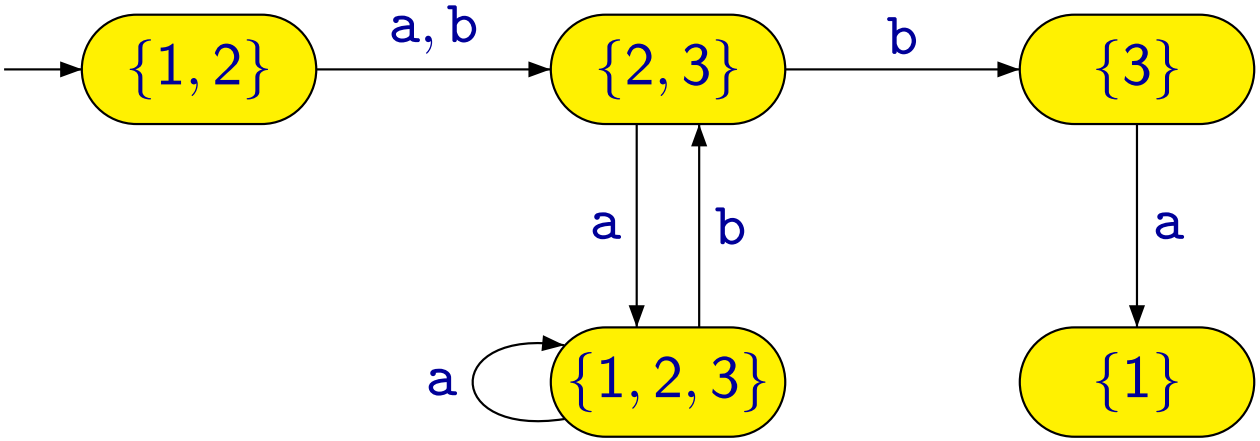
Převod nedeterministického automatu na deterministický



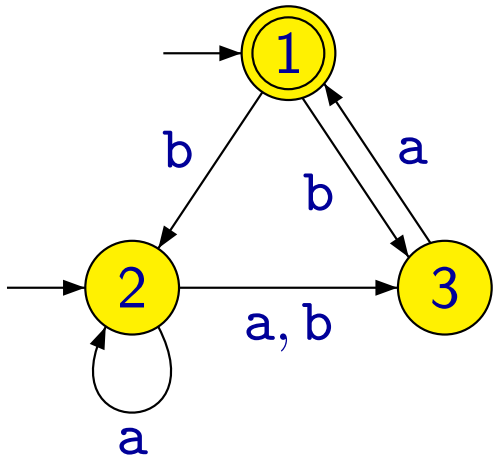


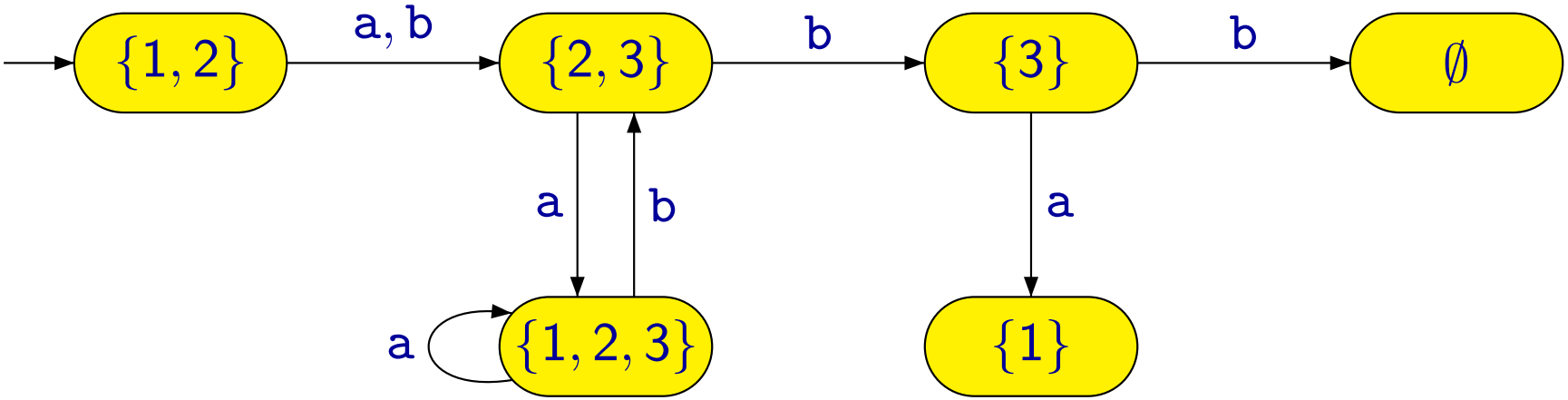
Převod nedeterministického automatu na deterministický



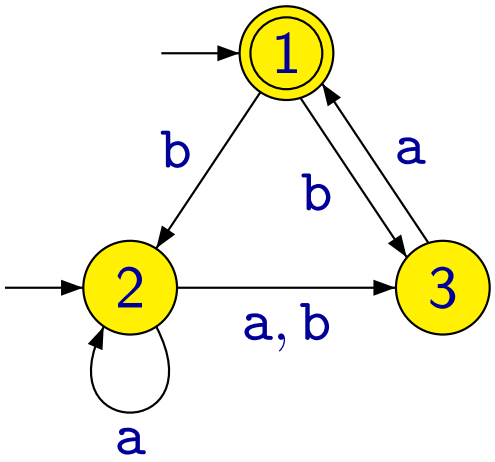


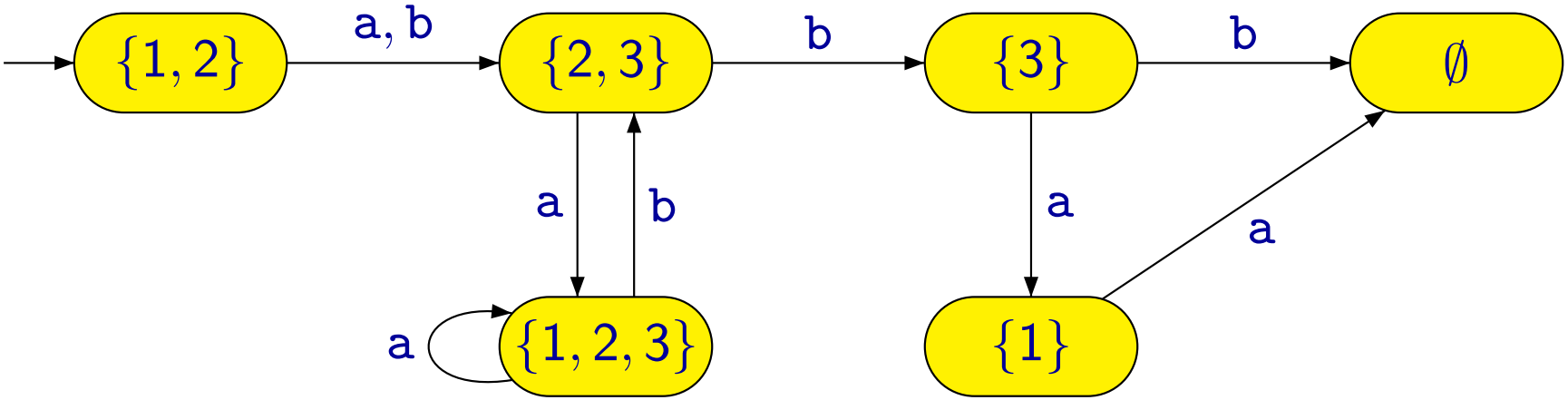
Převod nedeterministického automatu na deterministický



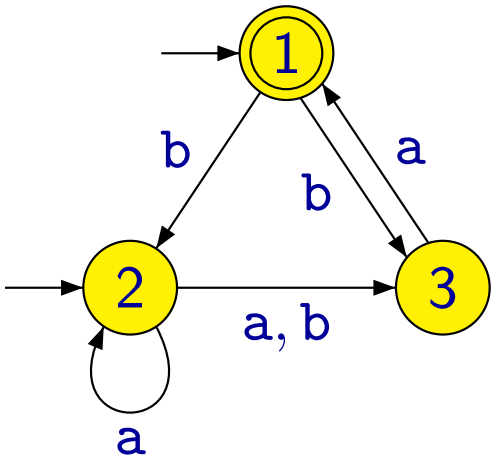


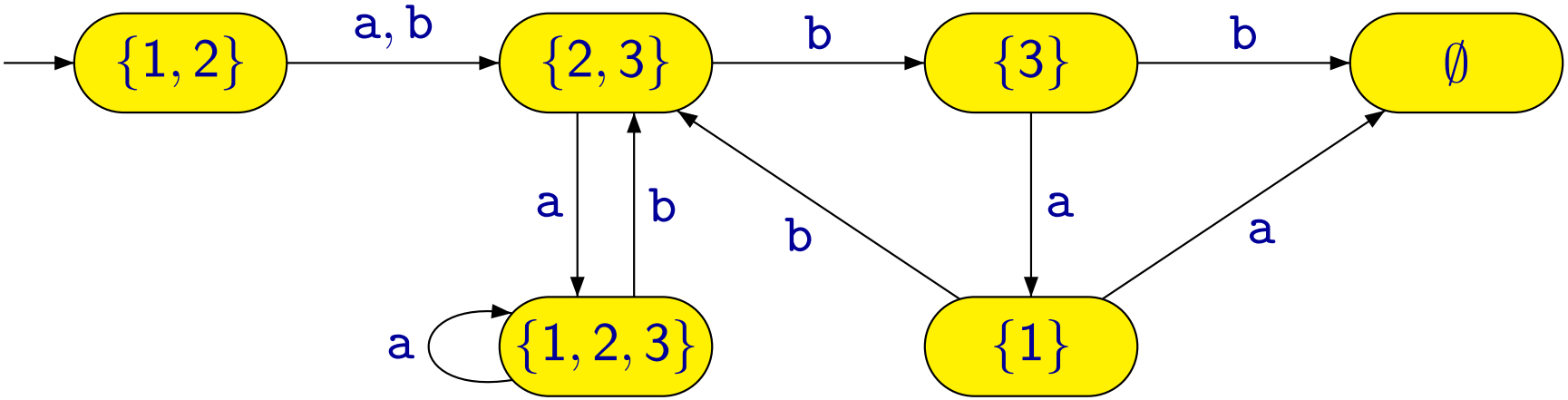
Převod nedeterministického automatu na deterministický



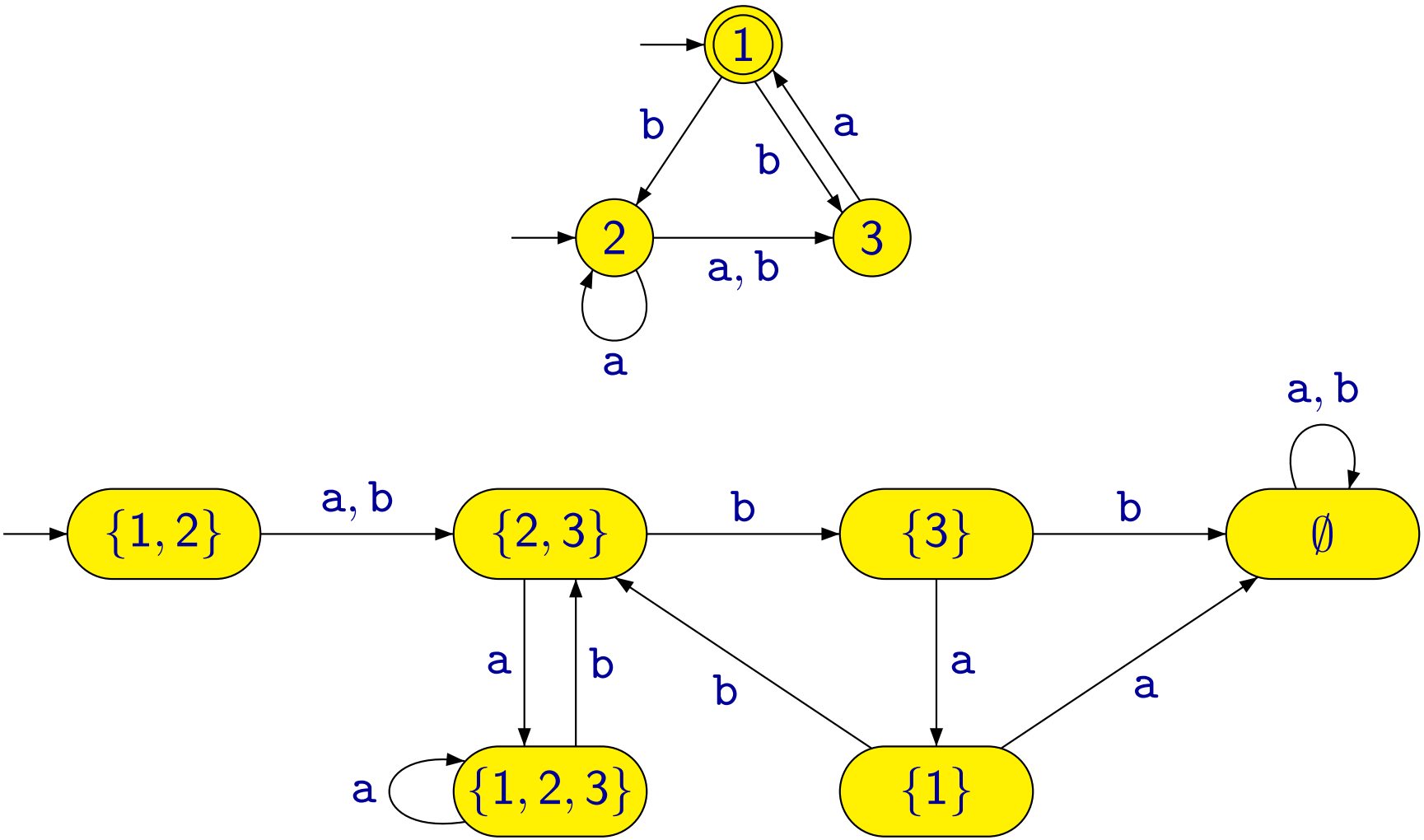


Převod nedeterministického automatu na deterministický

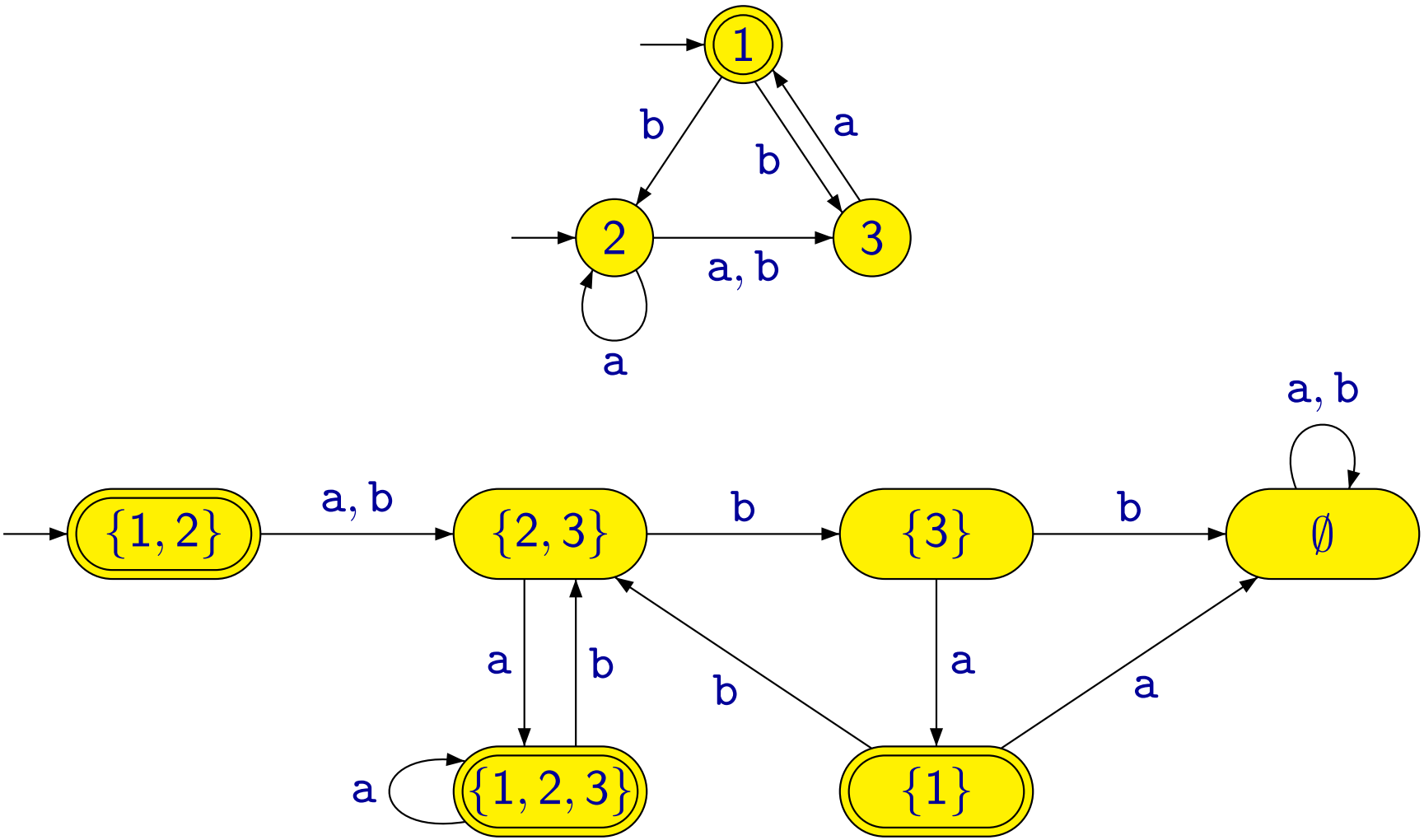




Převod nedeterministického automatu na deterministický



Převod nedeterministického automatu na deterministický



Převod nedeterministického automatu na deterministický

	a	b
$\leftrightarrow 1$	$-$	$2,3$
$\rightarrow 2$	$2,3$	3
3	1	$-$

Převod nedeterministického automatu na deterministický

	a	b
$\leftrightarrow 1$	$-$	$2,3$
$\rightarrow 2$	$2,3$	3
3	1	$-$

	a	b

Převod nedeterministického automatu na deterministický

	a	b
$\leftrightarrow 1$	–	$2,3$
$\rightarrow 2$	$2,3$	3
3	1	–

	a	b
$\leftrightarrow \{1,2\}$		

Převod nedeterministického automatu na deterministický

	a	b
$\leftrightarrow 1$	–	$2,3$
$\rightarrow 2$	$2,3$	3
3	1	–

	a	b
$\leftrightarrow \{1,2\}$	$\{2,3\}$	

Převod nedeterministického automatu na deterministický

	a	b
$\leftrightarrow 1$	–	$2,3$
$\rightarrow 2$	$2,3$	3
3	1	–

	a	b
$\leftrightarrow \{1,2\}$	$\{2,3\}$	
$\{2,3\}$		

Převod nedeterministického automatu na deterministický

	a	b
$\leftrightarrow 1$	–	$2,3$
$\rightarrow 2$	$2,3$	3
3	1	–

	a	b
$\leftrightarrow \{1,2\}$	$\{2,3\}$	$\{2,3\}$
$\{2,3\}$		

Převod nedeterministického automatu na deterministický

	a	b
$\leftrightarrow 1$	–	$2,3$
$\rightarrow 2$	$2,3$	3
3	1	–

	a	b
$\leftrightarrow \{1,2\}$	$\{2,3\}$	$\{2,3\}$
$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$	

Převod nedeterministického automatu na deterministický

	a	b
$\leftrightarrow 1$	–	$2,3$
$\rightarrow 2$	$2,3$	3
3	1	–

	a	b
$\leftrightarrow \{1,2\}$	$\{2,3\}$	$\{2,3\}$
$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$	
$\leftarrow \{1,2,3\}$		

Převod nedeterministického automatu na deterministický

	a	b
$\leftrightarrow 1$	–	$2,3$
$\rightarrow 2$	$2,3$	3
3	1	–

	a	b
$\leftrightarrow \{1,2\}$	$\{2,3\}$	$\{2,3\}$
$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$	$\{3\}$
$\leftarrow \{1,2,3\}$		

Převod nedeterministického automatu na deterministický

	a	b
$\leftrightarrow 1$	–	$2,3$
$\rightarrow 2$	$2,3$	3
3	1	–

	a	b
$\leftrightarrow \{1,2\}$	$\{2,3\}$	$\{2,3\}$
$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$	$\{3\}$
$\leftarrow \{1,2,3\}$		
$\{3\}$		

Převod nedeterministického automatu na deterministický

	a	b
$\leftrightarrow 1$	–	$2,3$
$\rightarrow 2$	$2,3$	3
3	1	–

	a	b
$\leftrightarrow \{1,2\}$	$\{2,3\}$	$\{2,3\}$
$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$	$\{3\}$
$\leftarrow \{1,2,3\}$	$\{1,2,3\}$	
$\{3\}$		

Převod nedeterministického automatu na deterministický

	a	b
$\leftrightarrow 1$	–	$2,3$
$\rightarrow 2$	$2,3$	3
3	1	–

	a	b
$\leftrightarrow \{1,2\}$	$\{2,3\}$	$\{2,3\}$
$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$	$\{3\}$
$\leftarrow \{1,2,3\}$	$\{1,2,3\}$	$\{2,3\}$
$\{3\}$		

Převod nedeterministického automatu na deterministický

	a	b
$\leftrightarrow 1$	–	2, 3
$\rightarrow 2$	2, 3	3
3	1	–

	a	b
$\leftrightarrow \{1,2\}$	$\{2,3\}$	$\{2,3\}$
$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$	$\{3\}$
$\leftarrow \{1,2,3\}$	$\{1,2,3\}$	$\{2,3\}$
$\{3\}$	$\{1\}$	

Převod nedeterministického automatu na deterministický

	a	b
$\leftrightarrow 1$	–	$2,3$
$\rightarrow 2$	$2,3$	3
3	1	–

	a	b
$\leftrightarrow \{1,2\}$	$\{2,3\}$	$\{2,3\}$
$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$	$\{3\}$
$\leftarrow \{1,2,3\}$	$\{1,2,3\}$	$\{2,3\}$
$\{3\}$	$\{1\}$	
$\leftarrow \{1\}$		

Převod nedeterministického automatu na deterministický

	a	b
$\leftrightarrow 1$	–	$2,3$
$\rightarrow 2$	$2,3$	3
3	1	–

	a	b
$\leftrightarrow \{1,2\}$	$\{2,3\}$	$\{2,3\}$
$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$	$\{3\}$
$\leftarrow \{1,2,3\}$	$\{1,2,3\}$	$\{2,3\}$
$\{3\}$	$\{1\}$	$\emptyset$
$\leftarrow \{1\}$		

Převod nedeterministického automatu na deterministický

	a	b
$\leftrightarrow 1$	–	$2,3$
$\rightarrow 2$	$2,3$	3
3	1	–

	a	b
$\leftrightarrow \{1,2\}$	$\{2,3\}$	$\{2,3\}$
$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$	$\{3\}$
$\leftarrow \{1,2,3\}$	$\{1,2,3\}$	$\{2,3\}$
$\{3\}$	$\{1\}$	$\emptyset$
$\leftarrow \{1\}$		
$\emptyset$		

Převod nedeterministického automatu na deterministický

	a	b
$\leftrightarrow 1$	–	$2,3$
$\rightarrow 2$	$2,3$	3
3	1	–

	a	b
$\leftrightarrow \{1,2\}$	$\{2,3\}$	$\{2,3\}$
$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$	$\{3\}$
$\leftarrow \{1,2,3\}$	$\{1,2,3\}$	$\{2,3\}$
$\{3\}$	$\{1\}$	$\emptyset$
$\leftarrow \{1\}$	$\emptyset$	
$\emptyset$		

Převod nedeterministického automatu na deterministický

	a	b
$\leftrightarrow 1$	–	$2,3$
$\rightarrow 2$	$2,3$	3
3	1	–

	a	b
$\leftrightarrow \{1,2\}$	$\{2,3\}$	$\{2,3\}$
$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$	$\{3\}$
$\leftarrow \{1,2,3\}$	$\{1,2,3\}$	$\{2,3\}$
$\{3\}$	$\{1\}$	$\emptyset$
$\leftarrow \{1\}$	$\emptyset$	$\{2,3\}$
$\emptyset$		

Převod nedeterministického automatu na deterministický

	a	b
$\leftrightarrow 1$	–	$2,3$
$\rightarrow 2$	$2,3$	3
3	1	–

	a	b
$\leftrightarrow \{1,2\}$	$\{2,3\}$	$\{2,3\}$
$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$	$\{3\}$
$\leftarrow \{1,2,3\}$	$\{1,2,3\}$	$\{2,3\}$
$\{3\}$	$\{1\}$	$\emptyset$
$\leftarrow \{1\}$	$\emptyset$	$\{2,3\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Převod nedeterministického automatu na deterministický

	a	b
$\leftrightarrow 1$	–	2, 3
$\rightarrow 2$	2, 3	3
3	1	–

	a	b
$\leftrightarrow \{1,2\}$	$\{2,3\}$	$\{2,3\}$
$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$	$\{3\}$
$\leftarrow \{1,2,3\}$	$\{1,2,3\}$	$\{2,3\}$
$\{3\}$	$\{1\}$	$\emptyset$
$\leftarrow \{1\}$	$\emptyset$	$\{2,3\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

	a	b
$\leftrightarrow 1$	2	2
2	3	4
$\leftarrow 3$	3	2
4	5	6
$\leftarrow 5$	6	2
6	6	6

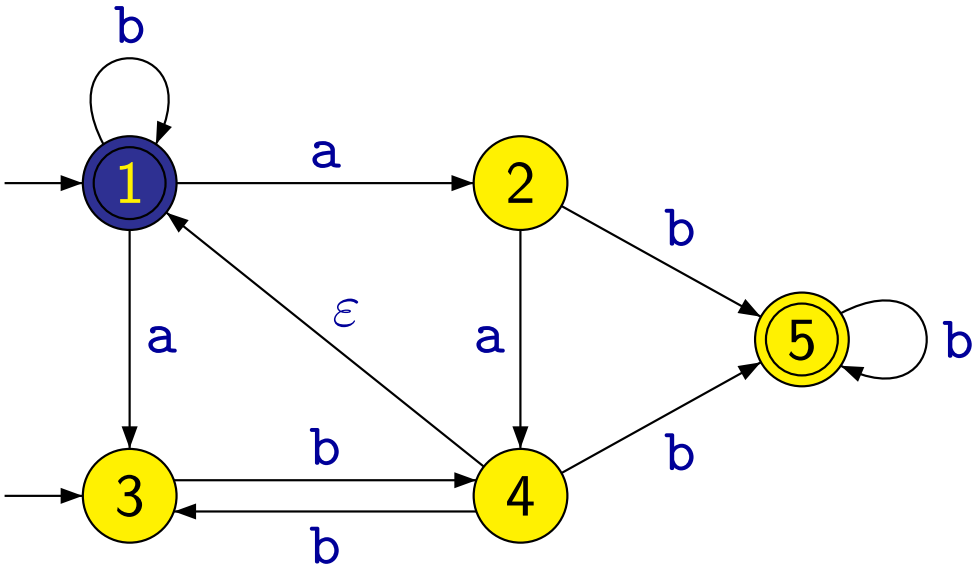
Převod nedeterministického automatu na deterministický

Poznámka: Při převodu nedeterministického automatu, který má n stavů, může mít výsledný deterministický automat až 2^n stavů.

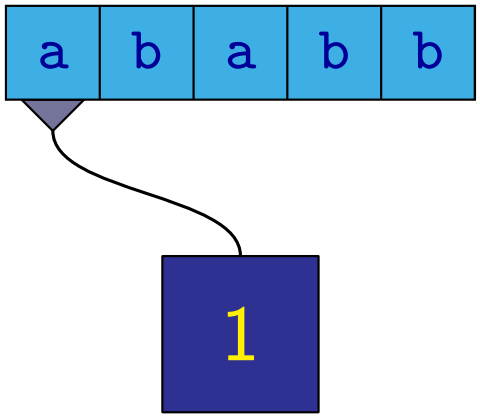
Například při převodu automatu, který má 20 stavů, může vzniknout automat, který má $2^{20} = 1048576$ stavů.

Často má sice výsledný automat podstatně méně než 2^n stavů, nicméně tyto nejhorší případy občas nastávají.

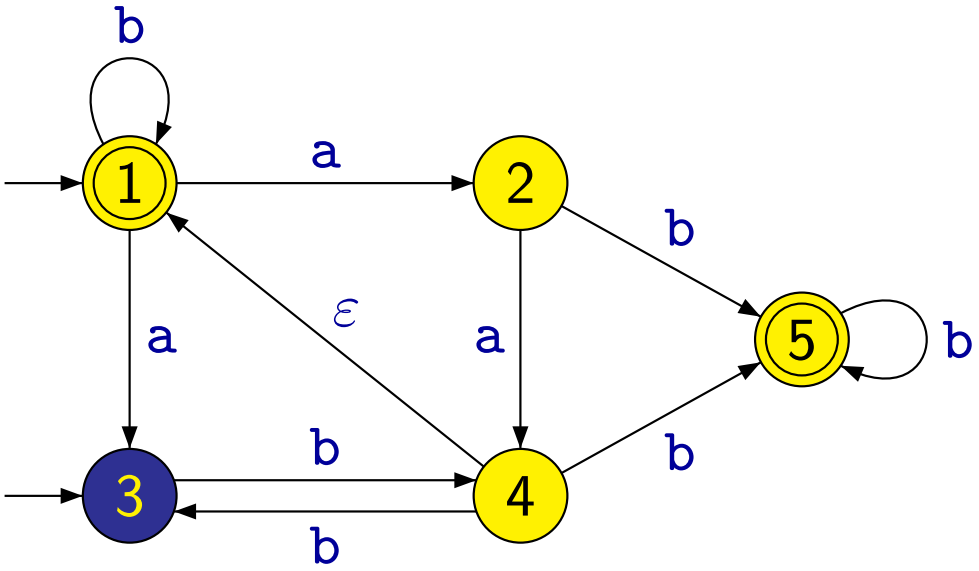
Zobecněný nedeterministický konečný automat

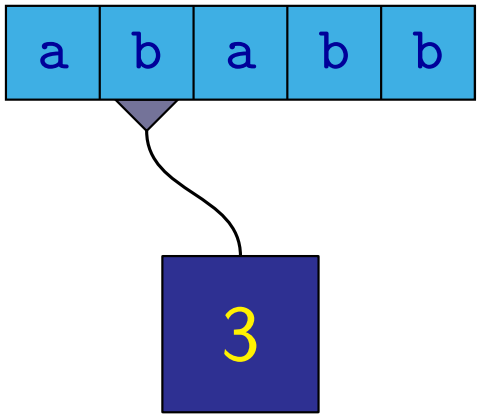


$(1, ababb)$



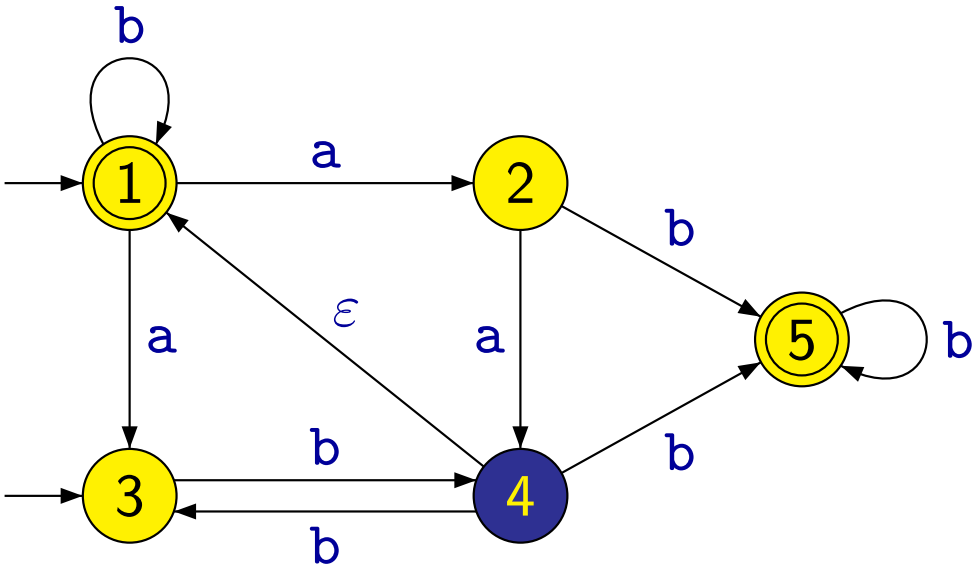
Zobecněný nedeterministický konečný automat

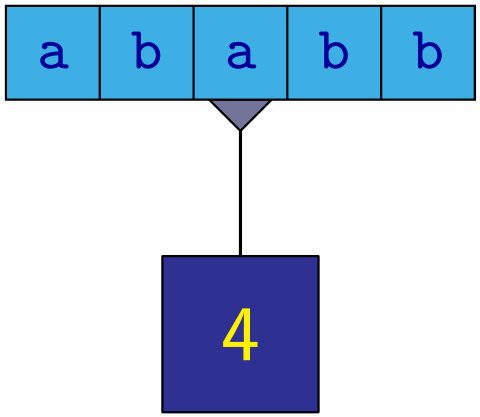




$(1, \mathtt{ababb})$
$\vdash (3, \mathtt{babb})$

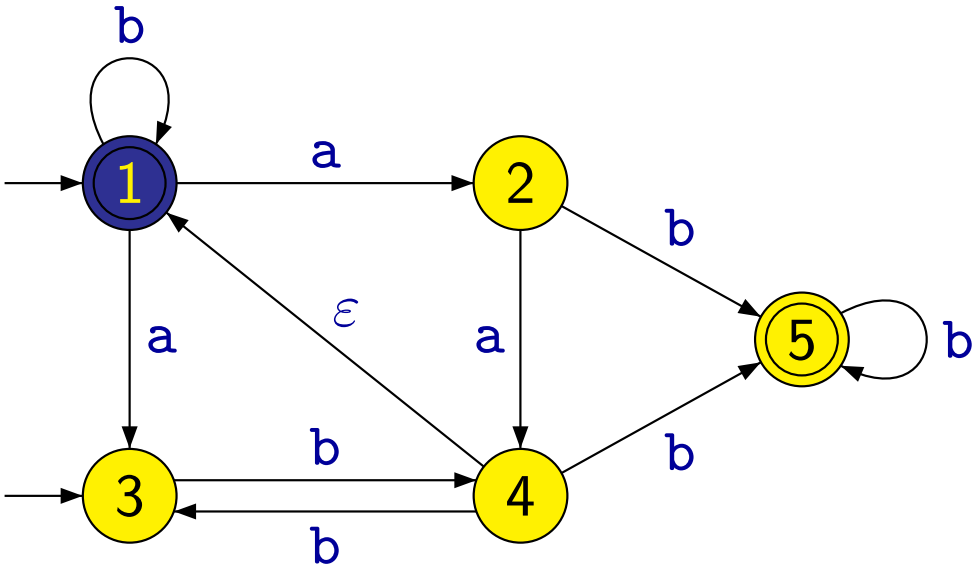
Zobecněný nedeterministický konečný automat

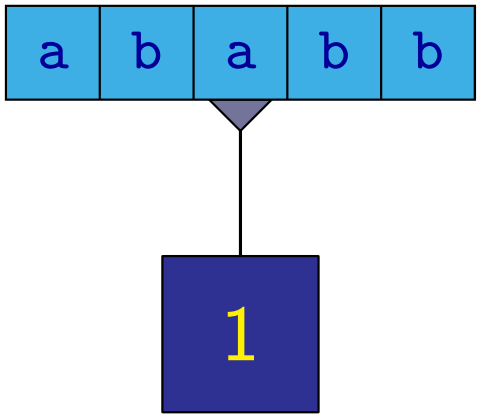




$$(1, \mathtt{ababb}) \vdash (3, \mathtt{babb}) \vdash (4, \mathtt{abb})$$

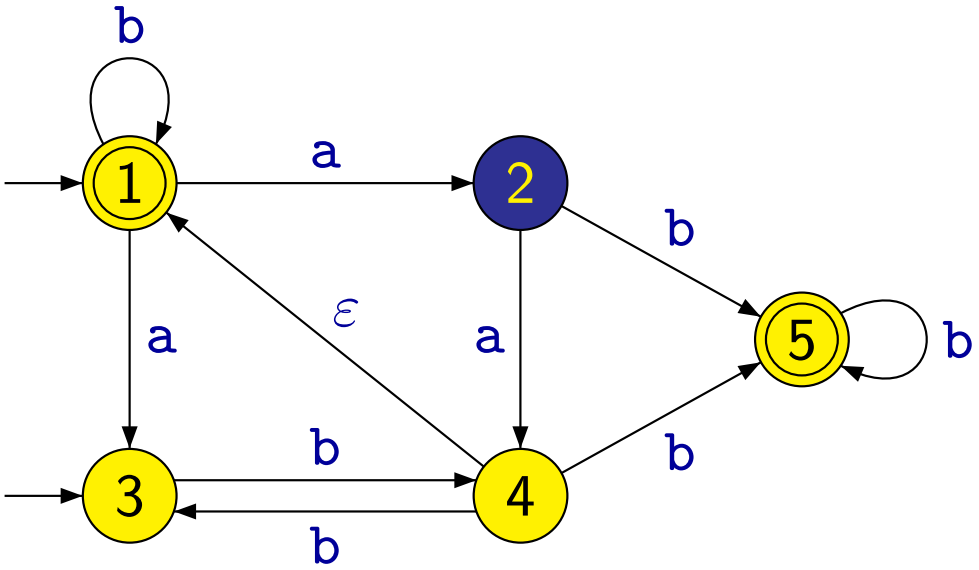
Zobecněný nedeterministický konečný automat

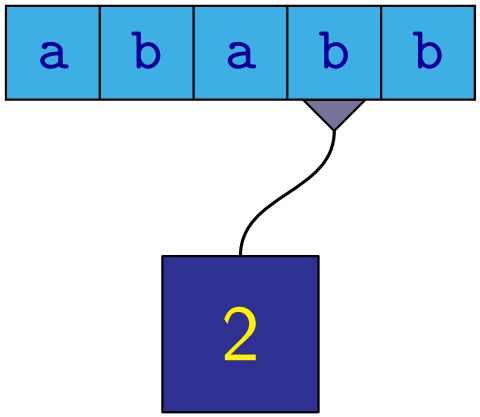




$$(1, \mathtt{ababb}) \vdash (3, \mathtt{babb}) \vdash (4, \mathtt{abb}) \vdash (1, \mathtt{abb})$$

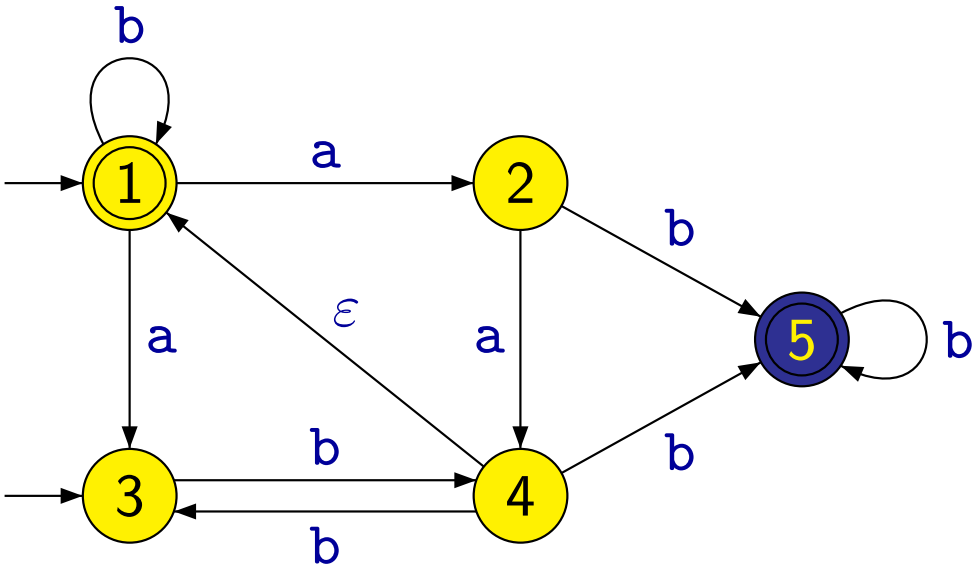
Zobecněný nedeterministický konečný automat

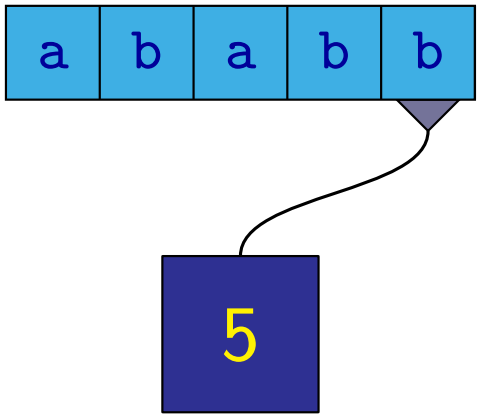




$$
\begin{aligned}
&(1, \mathtt{ababb}) \\
&\vdash (3, \mathtt{babb}) \\
&\vdash (4, \mathtt{abb}) \\
&\vdash (1, \mathtt{abb}) \\
&\vdash (2, \mathtt{bb})
\end{aligned}
$$

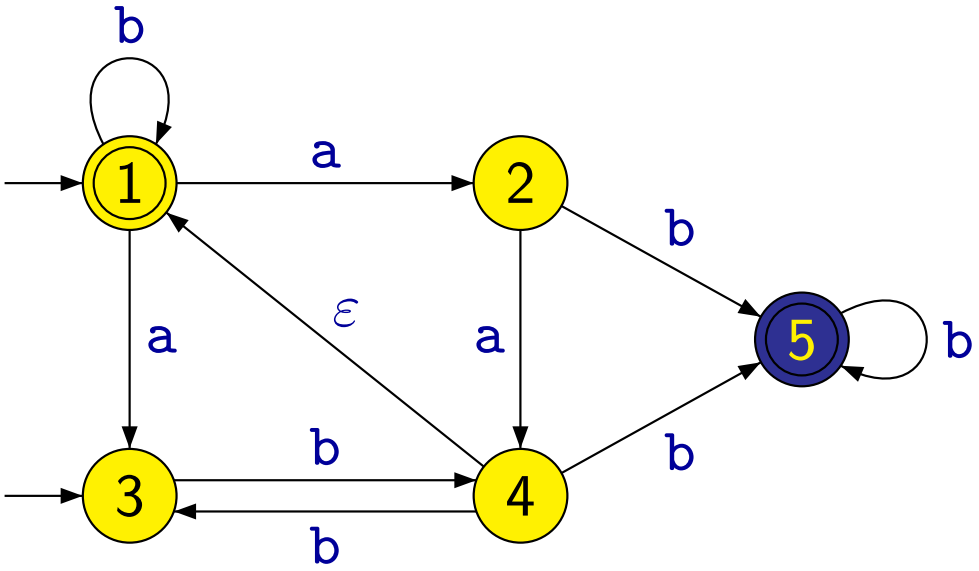
Zobecněný nedeterministický konečný automat

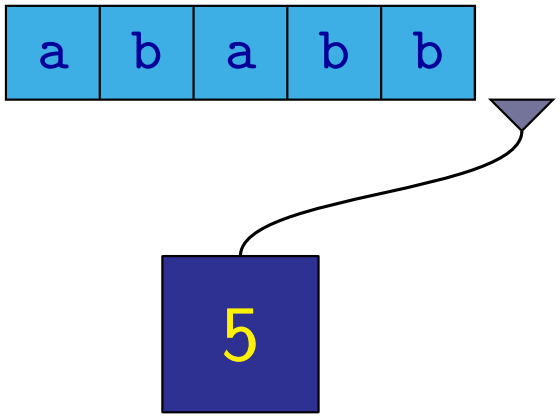




$(1, \mathtt{ababb})$
$\vdash (3, \mathtt{babb})$
$\vdash (4, \mathtt{abb})$
$\vdash (1, \mathtt{abb})$
$\vdash (2, \mathtt{bb})$
$\vdash (5, \mathtt{b})$

Zobecněný nedeterministický konečný automat





$$
\begin{aligned}
&(1, \mathtt{ababb}) \\
&\vdash (3, \mathtt{babb}) \\
&\vdash (4, \mathtt{abb}) \\
&\vdash (1, \mathtt{abb}) \\
&\vdash (2, \mathtt{bb}) \\
&\vdash (5, \mathtt{b}) \\
&\vdash (5, \varepsilon)
\end{aligned}
$$

Zobecněný nedeterministický konečný automat

Oproti nedeterministickému konečnému automatu má **zobecněný nedeterministický konečný automat** tzv. ε-**přechody**, tj. přechody označené symbolem ε.

Při provádění ε-přechodu se mění pouze stav řídící jednotky, ale hlava na pásce se neposouvá.

Poznámka: Výpočty zobecněného nedeterministického automatu mohou být libovolně dlouhé a dokonce i nekonečné (pokud graf obsahuje cyklus tvořený ε-přechody) bez ohledu na délku slova na pásce.

Zobecněný nedeterministický konečný automat

Formálně je **zobecněný nedeterministický konečný automat** definován jako pětice

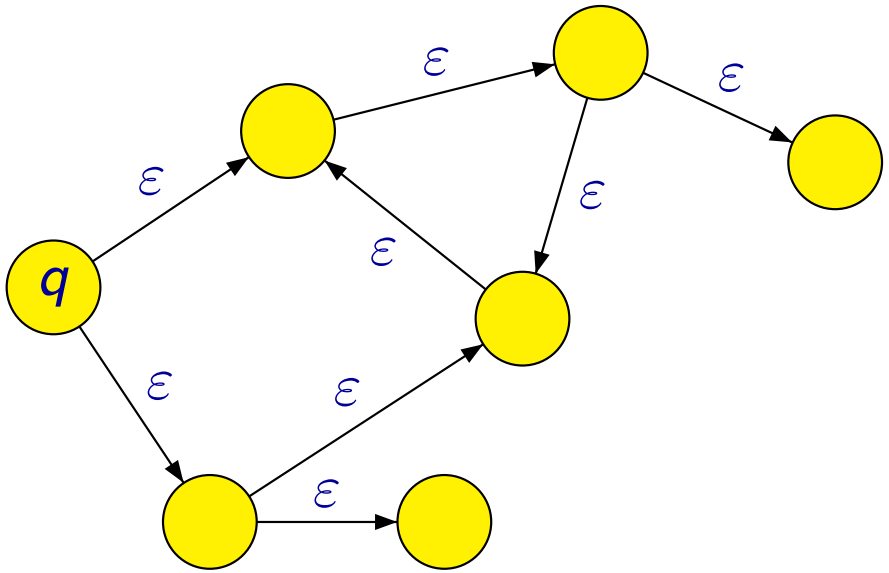
$$(Q, \Sigma, \delta, I, F)$$

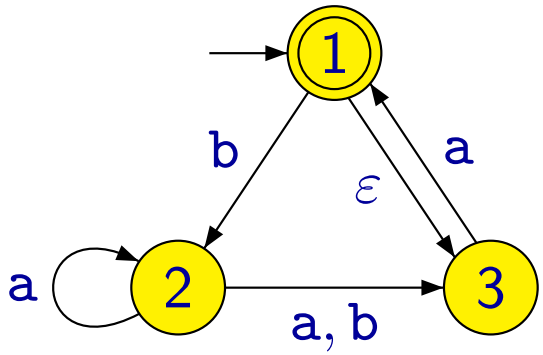
kde:

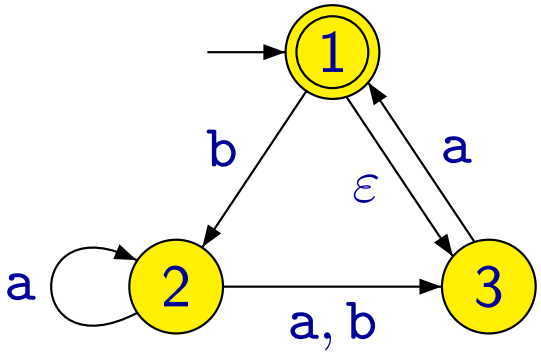
- Q je konečná množina **stavů**
- Σ je konečná **abeceda**
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}(Q)$ je **přechodová funkce**
- $I \subseteq Q$ je množina **počátečních stavů**
- $F \subseteq Q$ je množina **přijímajících stavů**

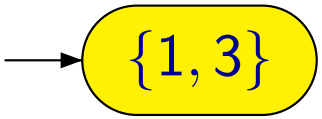
Převod na deterministický konečný automat

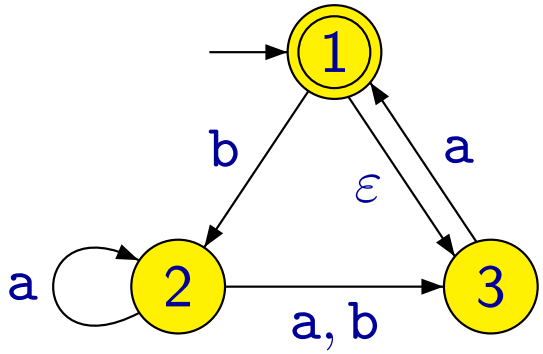
Zobecněný nedeterministický konečný automat je možné převést na deterministický podobnou konstrukcí jako nedeterministický konečný automat, s tím rozdílem, že do množin stavů musíme vždy přidat navíc i všechny stavy dosažitelné daných stavů nějakou sekvencí ε-přechodů.

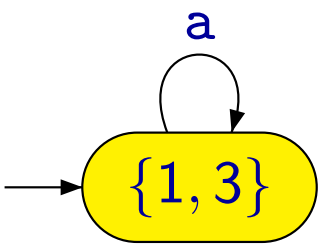


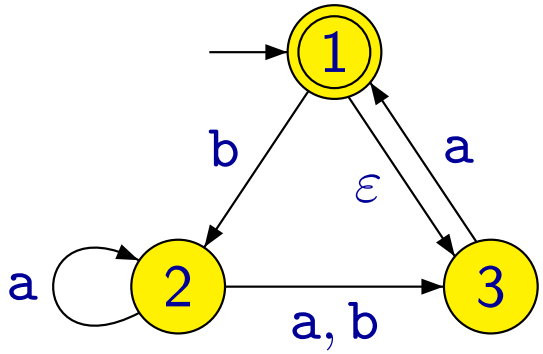

1
2
3
b
a
ε
a
a, b

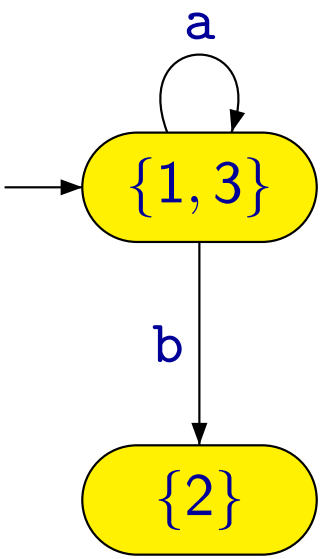

1
b
a
ε
a
2
3
a, b

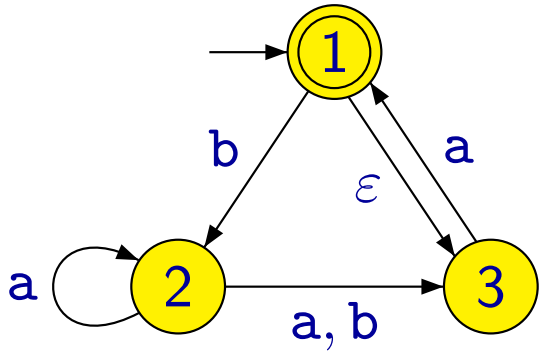

{1, 3}

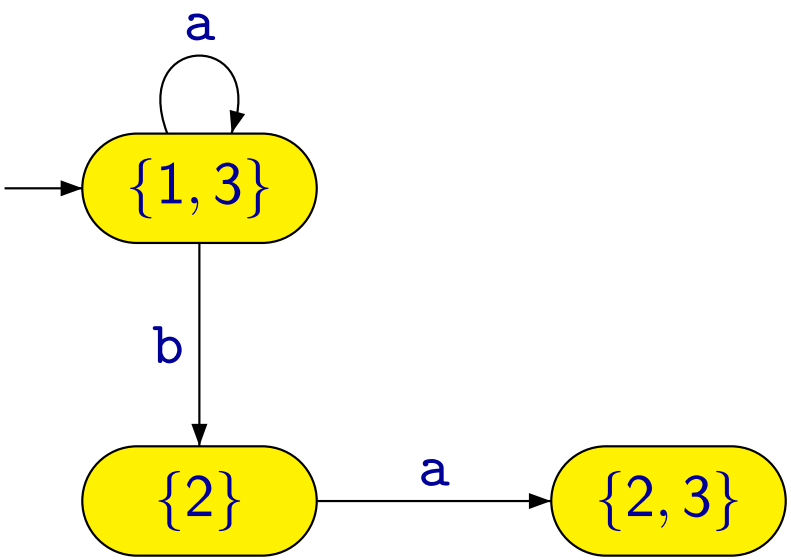

1
b
a
ε
a
2
3
a, b

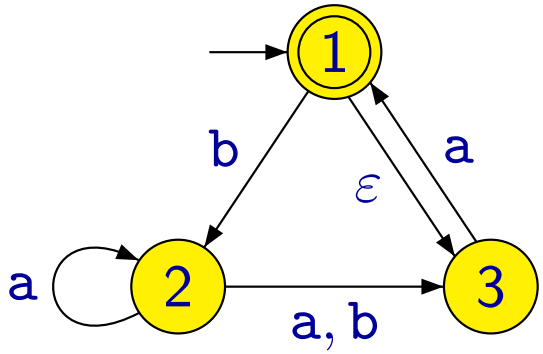

a
{1, 3}

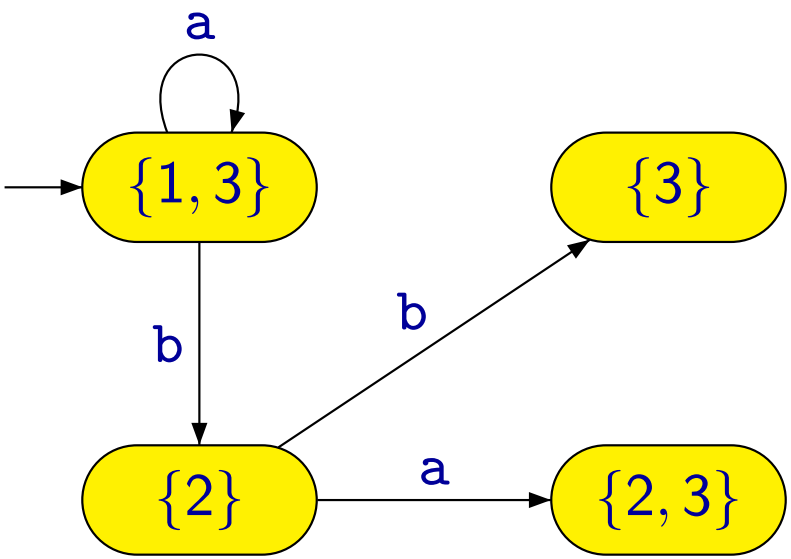

1
b
a
ε
a
2
3
a, b

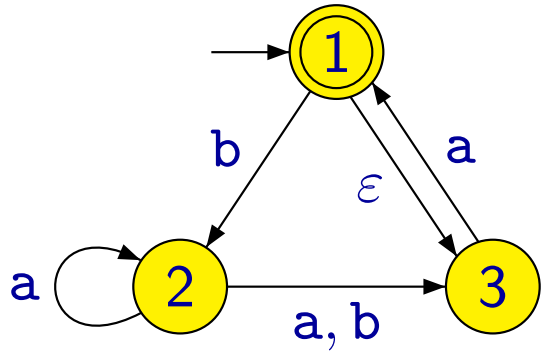

a
{1, 3}
b
{2}

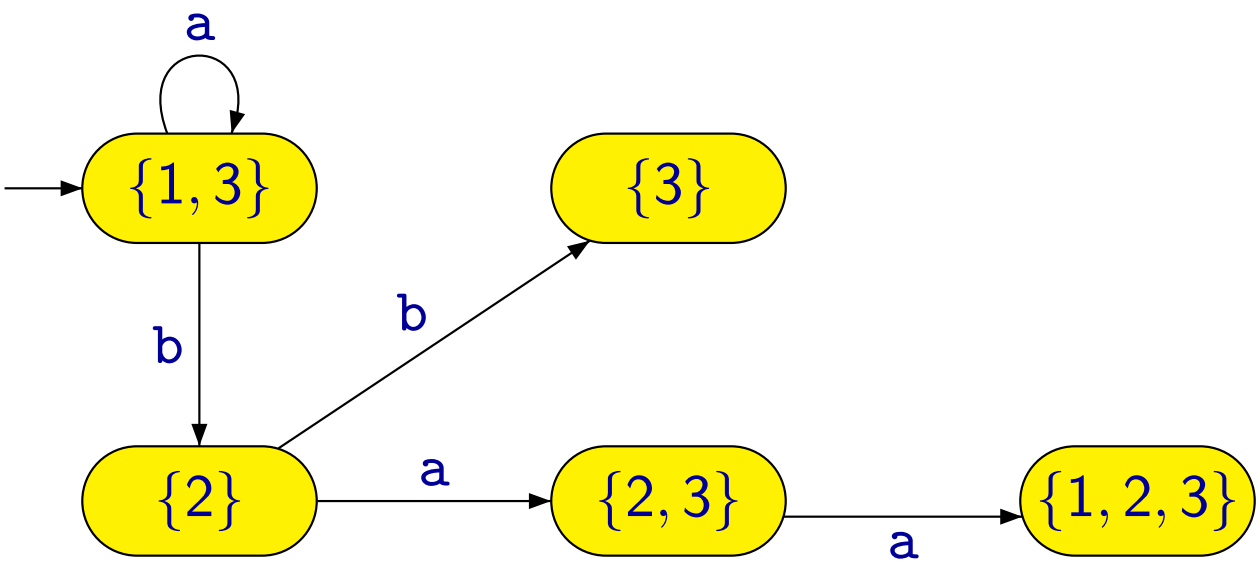

1
b
a
ε
a
2
3
a, b

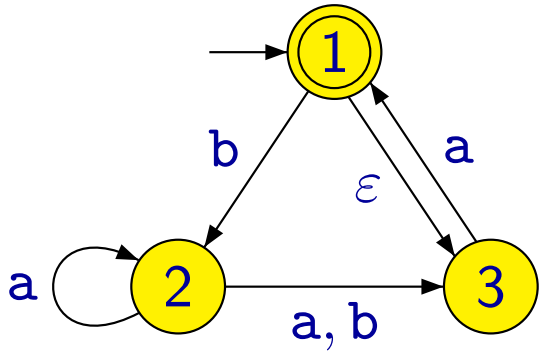

a
{1, 3}
b
{2}
a
{2, 3}

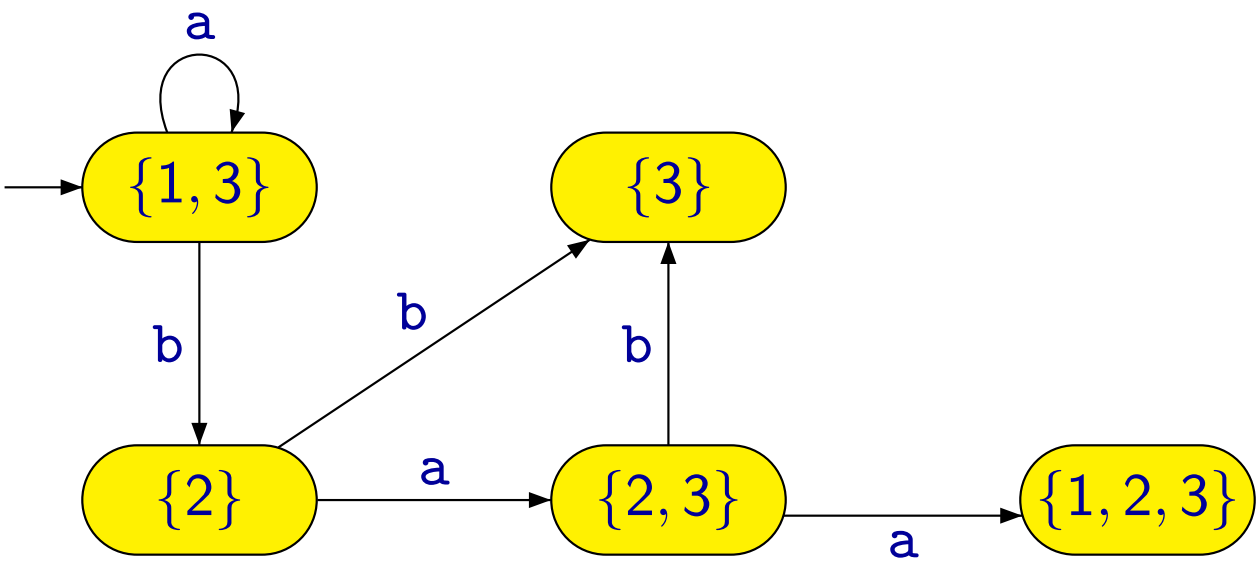

1
b
a
ε
a
2
3
a, b

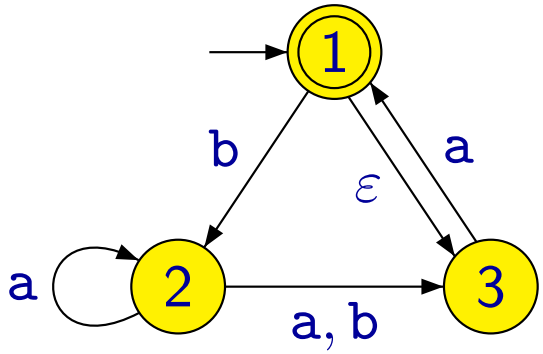

a
{1, 3}
{3}
b
b
{2}
a
{2, 3}

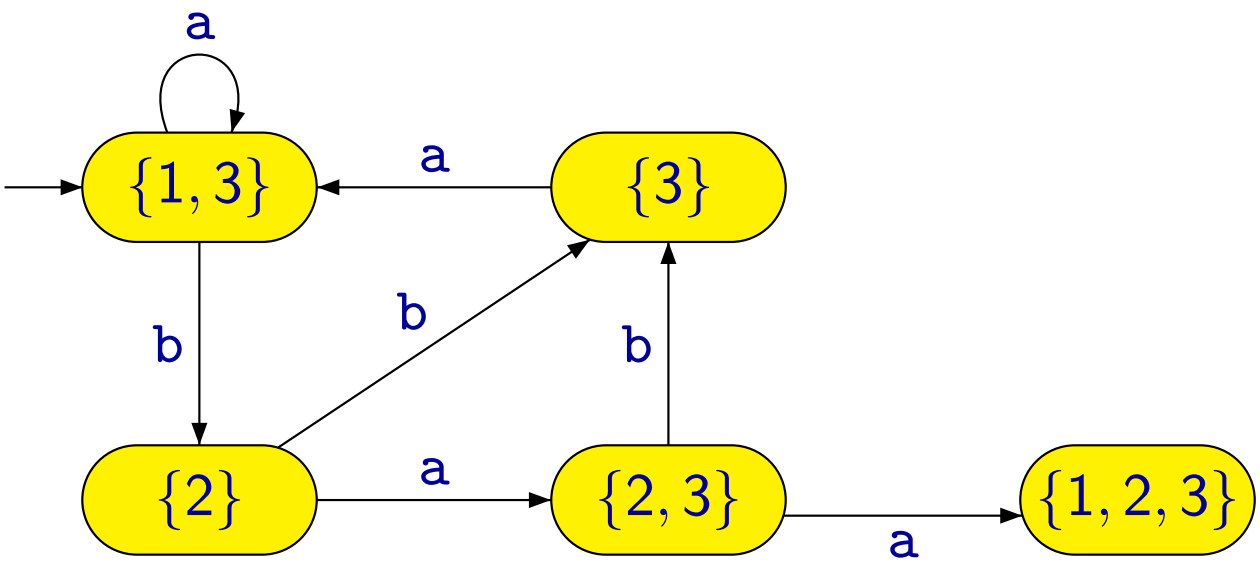

1
b
a
ε
a
2
3
a, b

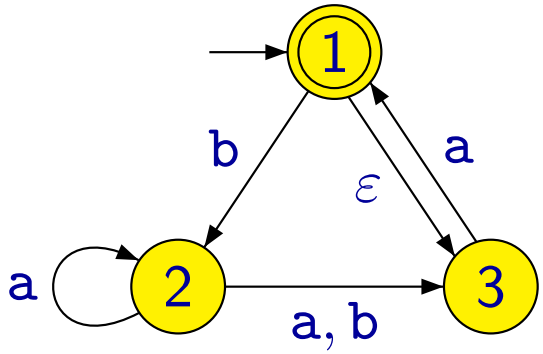

a
{1, 3}
{3}
b
b
{2}
a
{2, 3}
{1, 2, 3}
a

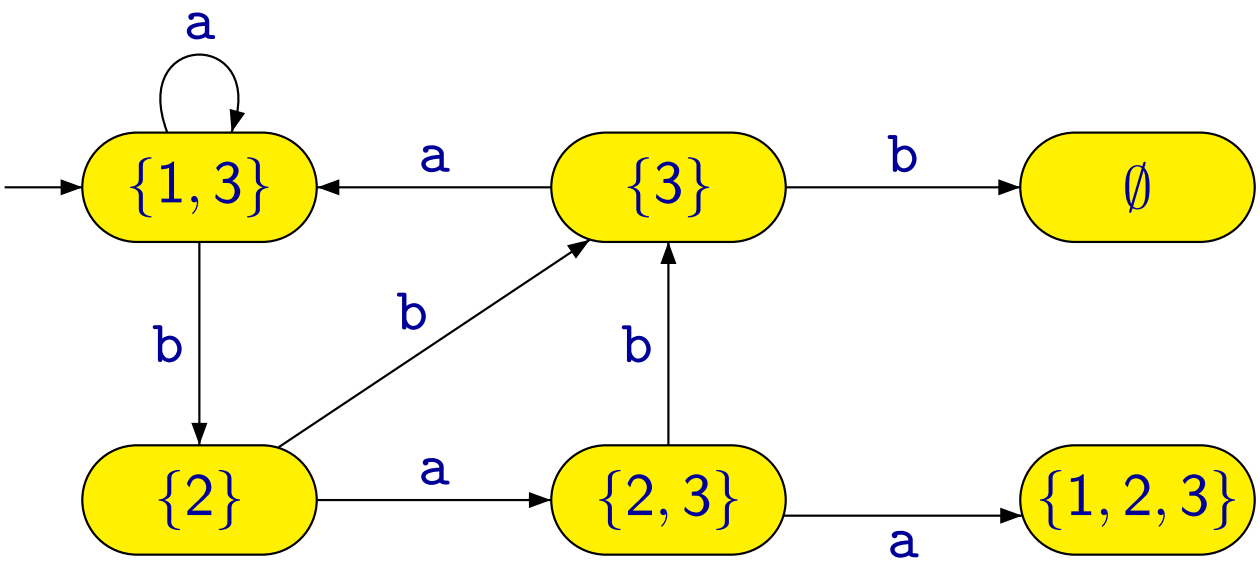

1
b
a
ε
a
2
3
a, b

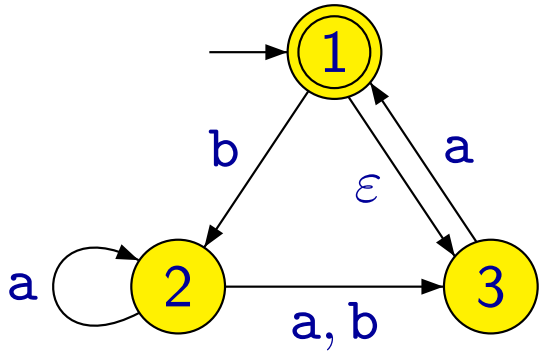

a
{1, 3}
{3}
b
b
b
{2}
a
{2, 3}
{1, 2, 3}
a

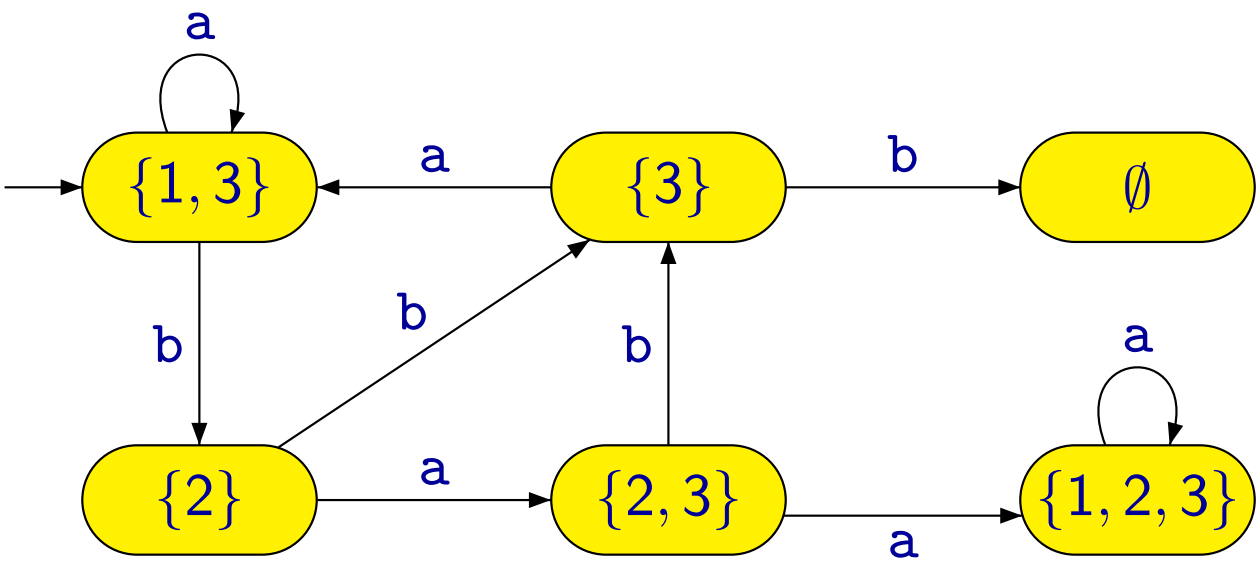

1
b
a
ε
a
2
3
a, b

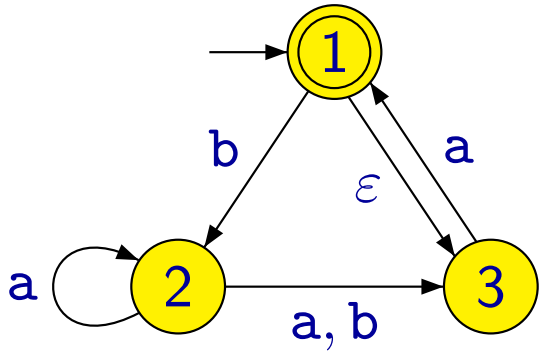

a
{1, 3}
a
{3}
b
b
b
{2}
a
{2, 3}
a
{1, 2, 3}

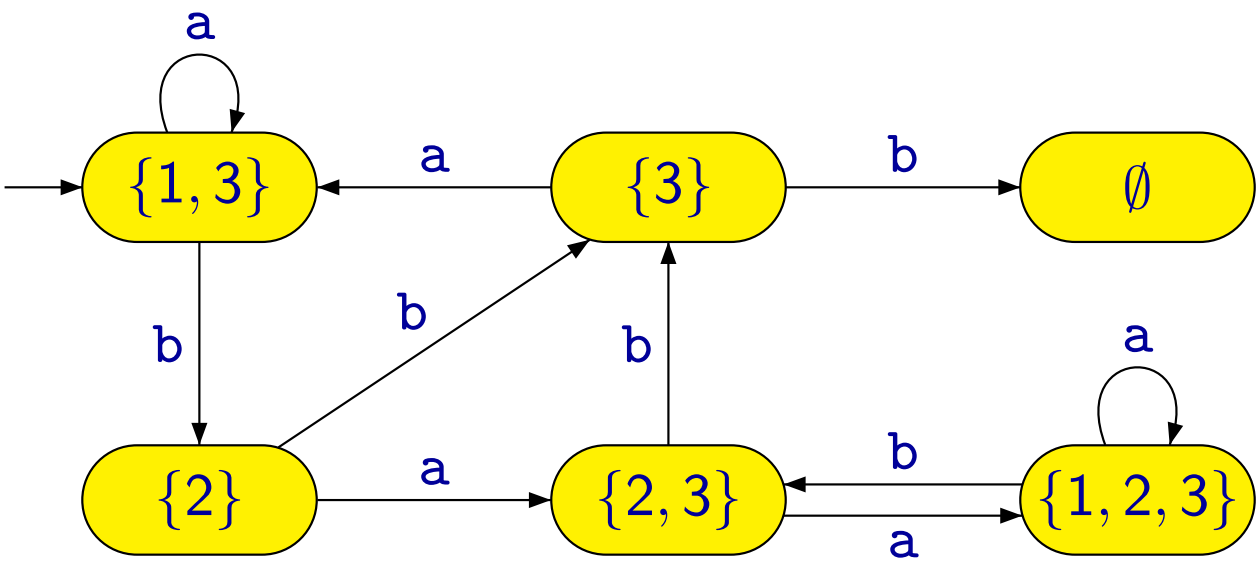

1
b
a
ε
a
2
3
a, b

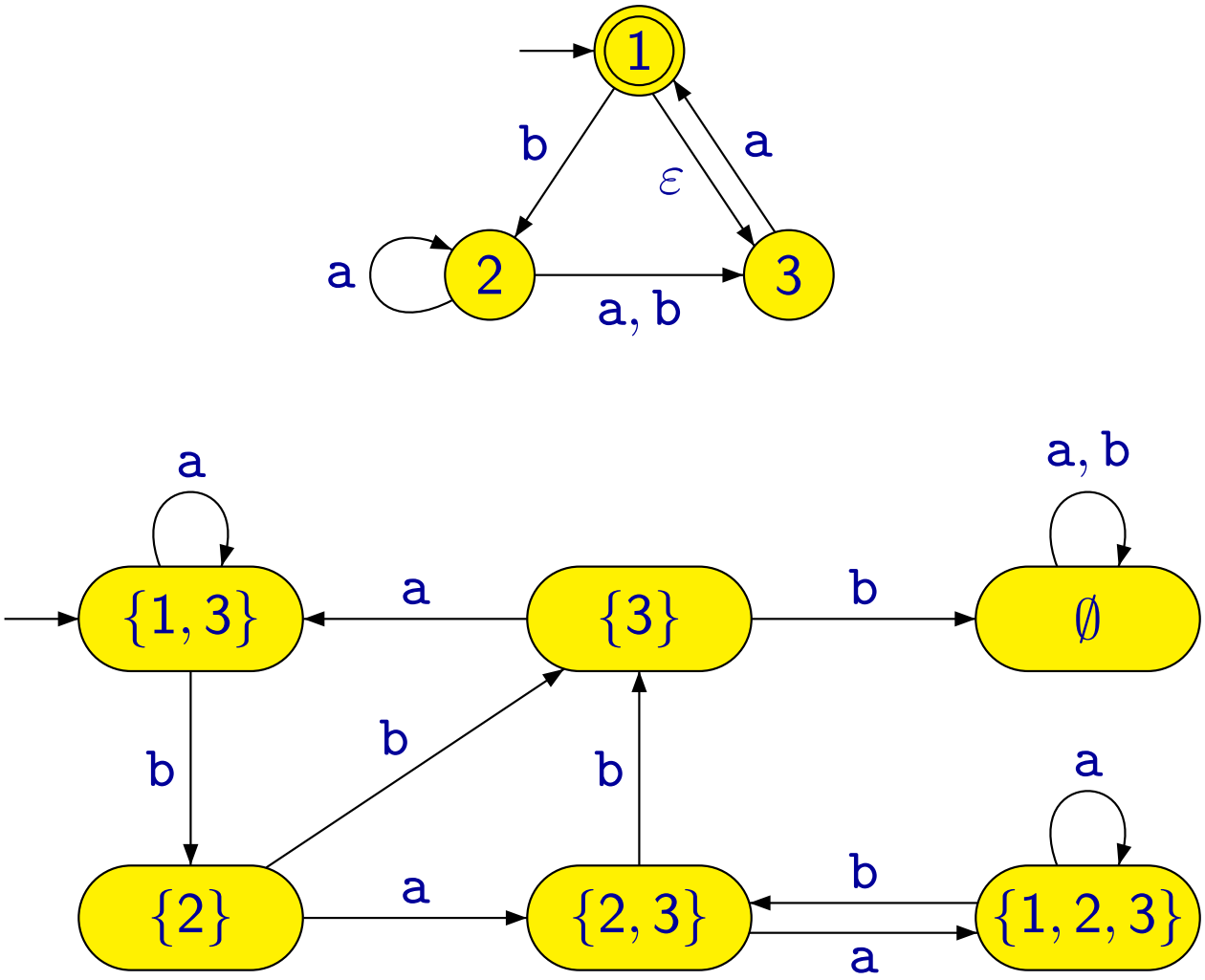

a
{1, 3}
a
{3}
b
∅
b
b
b
{2}
a
{2, 3}
{1, 2, 3}
a

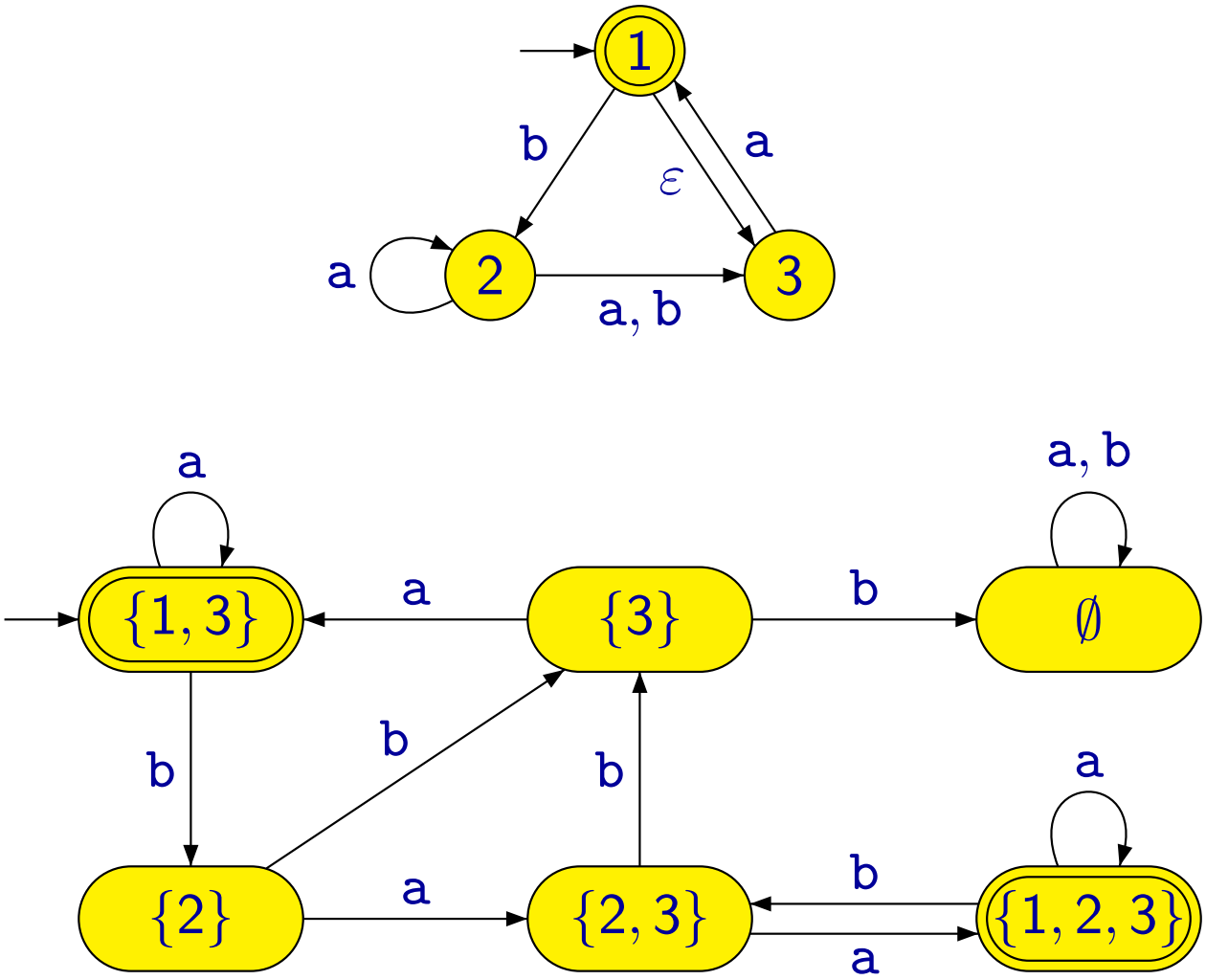

1
b
a
ε
a
2
3
a, b


a
{1, 3}
a
{3}
b
∅
b
b
b
a
{2}
a
{2, 3}
{1, 2, 3}
a


1
b
a
ε
a
2
3
a, b


a
{1, 3}
a
{3}
b
∅
b
b
b
a
{2}
a
{2, 3}
b
{1, 2, 3}
a

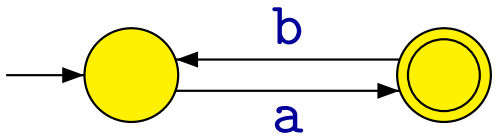

1
b
a
ε
a
2
3
a, b
a
a, b
{1, 3}
a
{3}
b
∅
b
b
b
a
{2}
a
{2, 3}
b
{1, 2, 3}
a


1
b
a
ε
a
2
3
a, b
a
a, b
{1, 3}
a
{3}
b
∅
b
b
b
a
{2}
a
{2, 3}
b
{1, 2, 3}
a

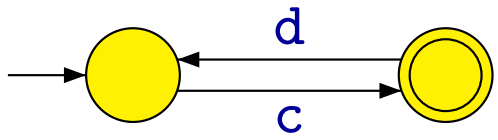
Zřetězení jazyků

$\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$

A_1:



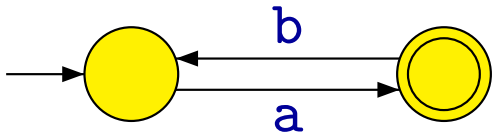
A_2:



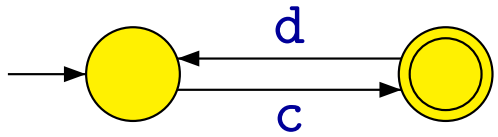
Zřetězení jazyků

$\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$

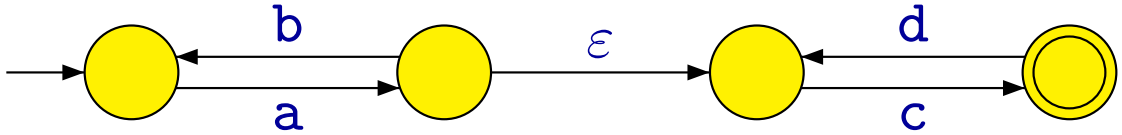
A_1:



A_2:



A:

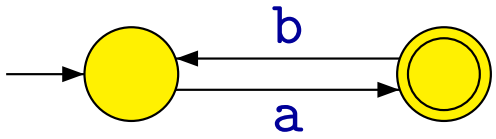


$L(A) = L(A_1) \cdot L(A_2)$

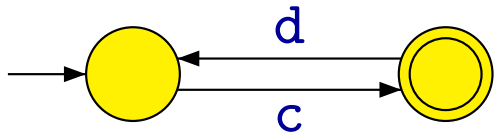
Zřetězení jazyků

$\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$

A_1:

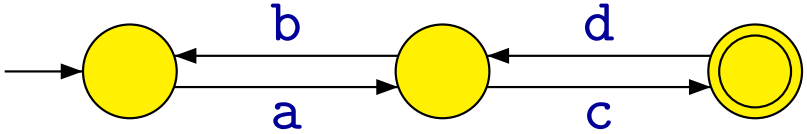


A_2:



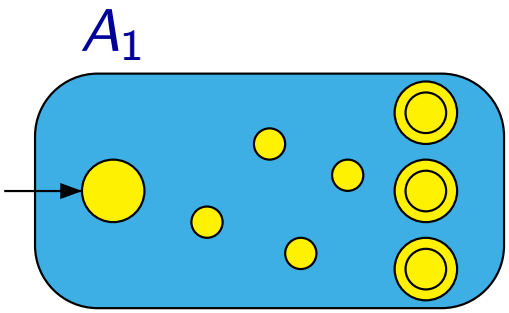
Chybná konstrukce:

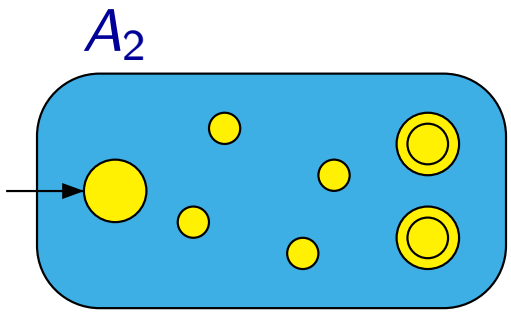
A:



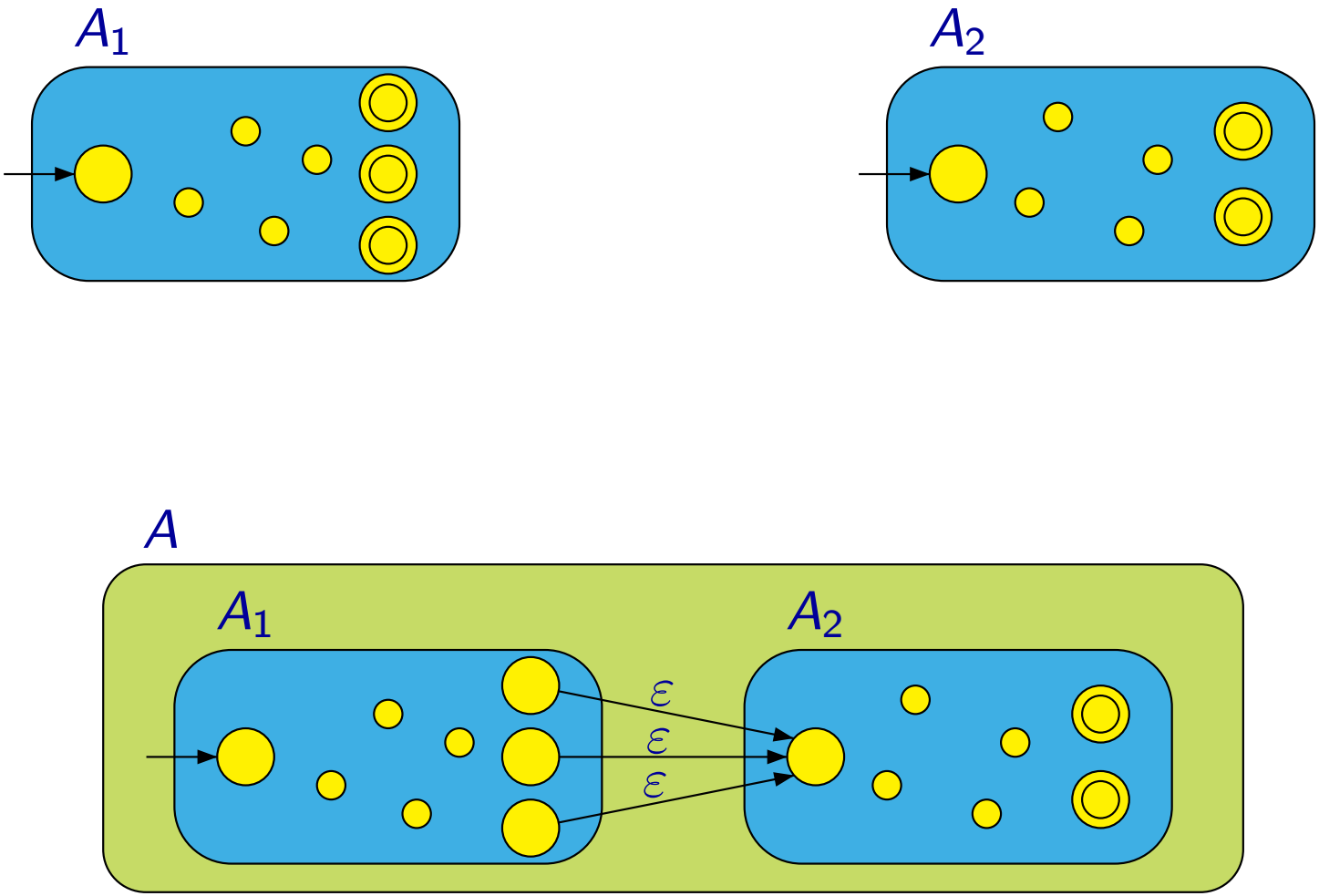
$\mathtt{acdbac} \in L(A)$, ale $\mathtt{acdbac} \notin L(A_1) \cdot L(A_2)$

Zřetězení jazyků

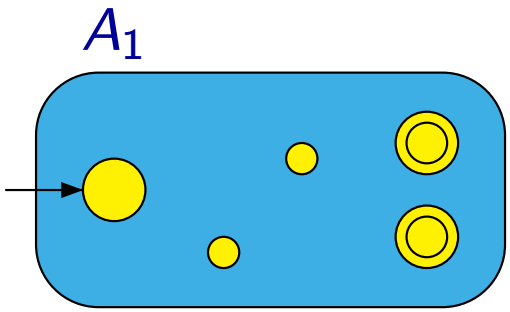




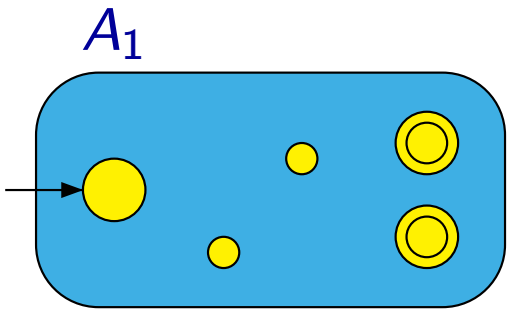
Zřetězení jazyků

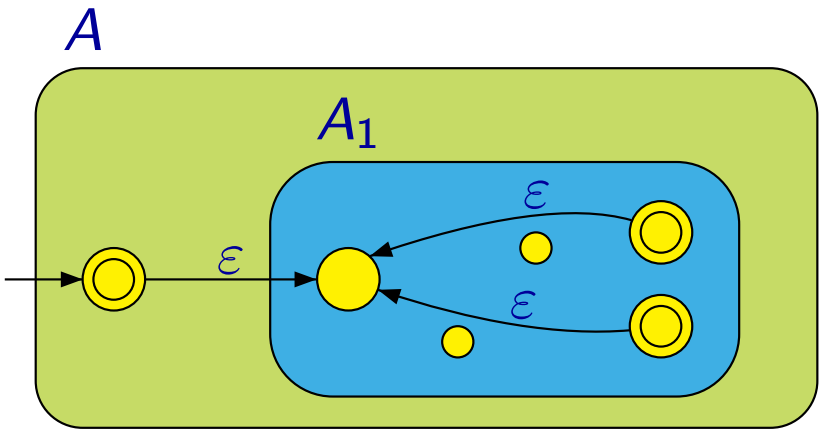


Iterace jazyka



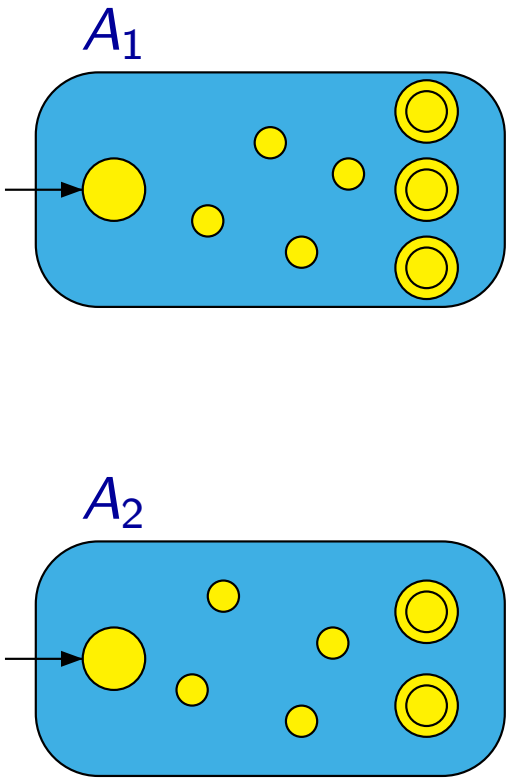
Iterace jazyka





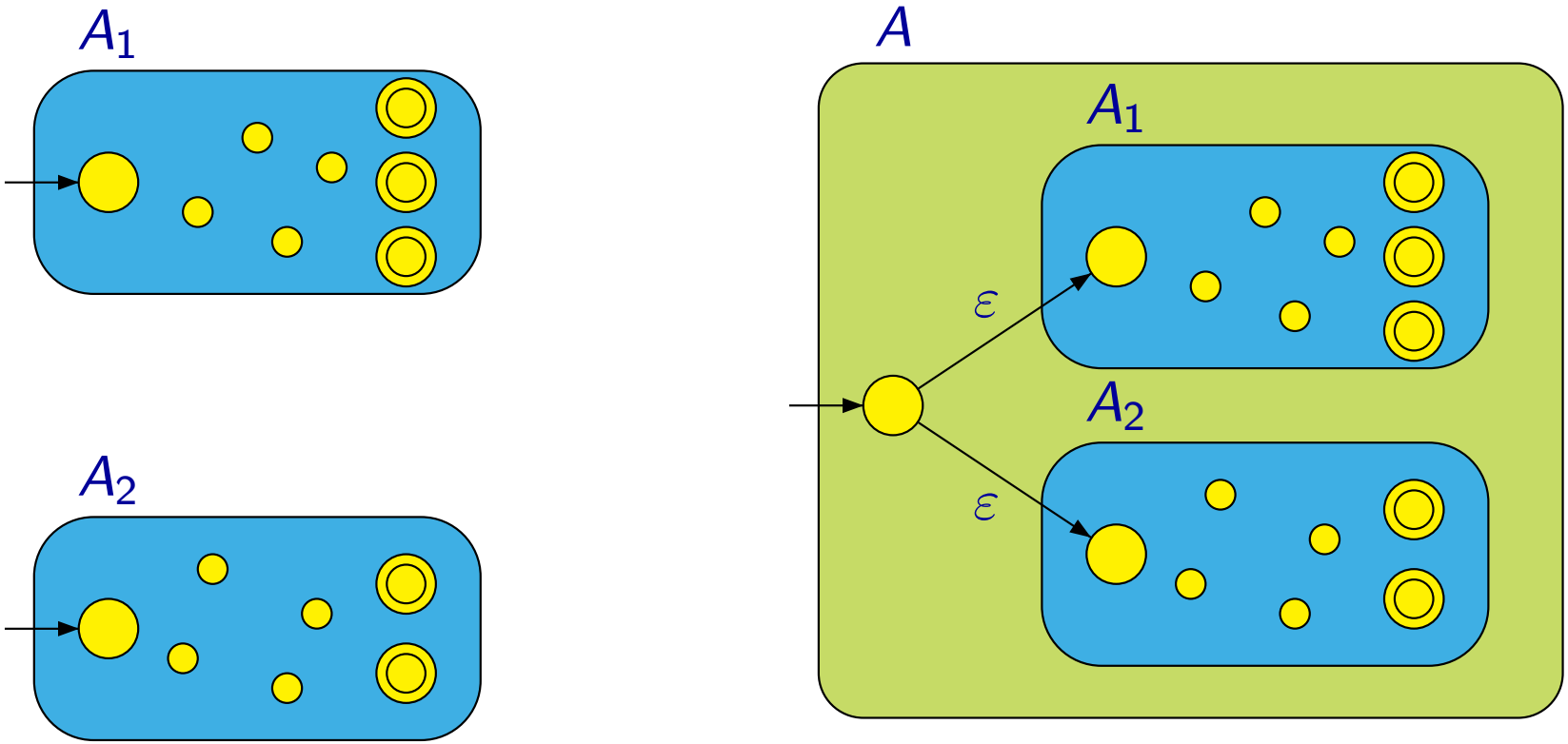
Sjednocení jazyků

Alternativní konstrukce pro sjednocení jazyků:



Sjednocení jazyků

Alternativní konstrukce pro sjednocení jazyků:



Uzavřenost množiny vůči operacím

Předpokládejme, že máme dány množiny X a Y, kde $X \subseteq Y$, a dále nějakou operaci $f : Y \times Y \times \cdots \times Y \to Y$.

O množině X řekneme, že je **uzavřená** vůči operaci f, jestliže platí, že pokud $x_1, x_2, \cdots, x_k \in X$, pak $f(x_1, x_2, \cdots, x_k) \in X$.

Příklad: Uvažujme množinu přirozených čísel $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ a množinu reálných čísel $\mathbb{R}$.

- Množina $\mathbb{N}$ je uzavřená vůči operacím $+$ a $\times$, ale není uzavřená vůči operacím $-$ a $/$.

  Například $3 + 5 \in \mathbb{N}$, ale $3 - 5 \notin \mathbb{N}$ a $3/5 \notin \mathbb{N}$
- Množina $\mathbb{R}$ je uzavřená vůči operacím $+$, $-$, $\times$.
- Množina $\mathbb{R} - \{0\}$ je uzavřená vůči operaci $/$.

Uzavřenost třídy regulárních jazyků

Množina (všech) regulárních jazyků je uzavřená vůči operacím:

- sjednocení
- průniku
- doplňku
- zřetězení
- iteraci
- ...

Poznámka: Jazyk je regulární, pokud existuje konečný automat, který ho rozpoznává.

Existují i jazyky, které nejsou regulární.

Regulární výrazy

Regulární výrazy

Jako například v aritmetice můžeme pomocí operátorů $+$ a $\times$ vytvářet výrazy jako

$$(5 + 3) \times 4$$

můžeme v teorii formálních jazyků pomocí operátorů $+$, $\cdot$ a * vytvářet tzv. **regulární výrazy**, jako třeba

$$(0 + 1) \cdot 0^*$$

které reprezentují jazyky.

Jako je hodnotou aritmetického výrazu $(5 + 3) \times 4$ číslo 32, je hodnotou regulárního výrazu $(0 + 1) \cdot 0^*$ jazyk

$$(\{0\} \cup \{1\}) \cdot \{0\}^*$$

Regulární výrazy

Induktivní definice regulárních výrazů nad abecedou Σ:

- $\emptyset$, ε, a (kde $a \in \Sigma$) jsou regulární výrazy:

  $\emptyset$ ... označuje prázdný jazyk
  ε ... označuje jazyk $\{\varepsilon\}$
  a ... označuje jazyk $\{a\}$

- Jestliže α, β jsou regulární výrazy, pak i $(\alpha + \beta)$, $(\alpha \cdot \beta)$, (α^*) jsou regulární výrazy:

  $(\alpha + \beta)$ ... označuje sjednocení jazyků označených α a β
  $(\alpha \cdot \beta)$ ... označuje zřetězení jazyků označených α a β
  (α^*) ... označuje iteraci jazyka označeného α

- Neexistují žádné další regulární výrazy než ty definované podle předchozích dvou bodů.

Regulární výrazy

Příklad:

- Podle definice jsou 0 i 1 regulární výrazy.

Regulární výrazy

Příklad:

- Podle definice jsou 0 i 1 regulární výrazy.
- Protože 0 i 1 jsou regulární výrazy, je i $(0 + 1)$ regulární výraz.

Regulární výrazy

Příklad:

- Podle definice jsou 0 i 1 regulární výrazy.
- Protože 0 i 1 jsou regulární výrazy, je i $(0 + 1)$ regulární výraz.
- Protože 0 je regulární výraz, je i (0^*) regulární výraz.

Regulární výrazy

Příklad:

- Podle definice jsou 0 i 1 regulární výrazy.
- Protože 0 i 1 jsou regulární výrazy, je i $(0 + 1)$ regulární výraz.
- Protože 0 je regulární výraz, je i (0^*) regulární výraz.
- Protože $(0 + 1)$ i (0^*) jsou regulární výrazy, je i $((0 + 1) \cdot (0^*))$ regulární výraz.

Regulární výrazy

Příklad:

- Podle definice jsou 0 i 1 regulární výrazy.
- Protože 0 i 1 jsou regulární výrazy, je i $(0 + 1)$ regulární výraz.
- Protože 0 je regulární výraz, je i (0^*) regulární výraz.
- Protože $(0 + 1)$ i (0^*) jsou regulární výrazy, je i $((0 + 1) \cdot (0^*))$ regulární výraz.

Poznámka: Jestliže α je regulární výraz, zápisem $[\alpha]$ označujeme jazyk definovaný regulárním výrazem α.

$$[((0 + 1) \cdot (0^*))] = \{0, 1, 00, 10, 000, 100, 0000, 1000, 00000, \ldots\}$$

Regulární výrazy

Aby byl zápis regulárních výrazů přehlednější a stručnější, používáme následují pravidla:

- Vynecháváme vnější pár závorek.
- Vynecháváme závorky, které jsou zbytečné vzhledem k asociativitě operací sjednocení ($+$) a zřetězení ($\cdot$).
- Vynecháváme závorky, které jsou zbytečné vzhledem k prioritě operací (nejvyšší prioritu má iterace (*), menší zřetězení ($\cdot$) a nejmenší sjednocení ($+$)).
- Nepíšeme tečku pro zřetězení.

Příklad: Místo

$$(((((0 \cdot 1)^*) \cdot 1) \cdot (1 \cdot 1)) + (((0 \cdot 0) + 1)^*))$$

obvykle píšeme

$$(01)^*111 + (00 + 1)^*$$

Regulární výrazy

Příklady: Ve všech případech $\Sigma = \{0, 1\}$.

0 . . . jazyk tvořený jediným slovem 0

Regulární výrazy

Příklady: Ve všech případech $\Sigma = \{0, 1\}$.

0 . . . jazyk tvořený jediným slovem 0

01 . . . jazyk tvořený jediným slovem 01

Regulární výrazy

Příklady: Ve všech případech $\Sigma = \{0, 1\}$.

0 ... jazyk tvořený jediným slovem 0

01 ... jazyk tvořený jediným slovem 01

$0 + 1$ ... jazyk tvořený dvěma slovy 0 a 1

Regulární výrazy

Příklady: Ve všech případech $\Sigma = \{0, 1\}$.

0 ... jazyk tvořený jediným slovem 0

01 ... jazyk tvořený jediným slovem 01

$0 + 1$ ... jazyk tvořený dvěma slovy 0 a 1

0^* ... jazyk tvořený slovy ε, 0, 00, 000, ...

Regulární výrazy

Příklady: Ve všech případech $\Sigma = \{0, 1\}$.

0 ... jazyk tvořený jediným slovem 0

01 ... jazyk tvořený jediným slovem 01

$0 + 1$ ... jazyk tvořený dvěma slovy 0 a 1

0^* ... jazyk tvořený slovy ε, 0, 00, 000, ...

$(01)^*$ ... jazyk tvořený slovy ε, 01, 0101, 010101, ...

Regulární výrazy

Příklady: Ve všech případech $\Sigma = \{0, 1\}$.

0 ... jazyk tvořený jediným slovem 0

01 ... jazyk tvořený jediným slovem 01

$0 + 1$ ... jazyk tvořený dvěma slovy 0 a 1

0^* ... jazyk tvořený slovy ε, 0, 00, 000, ...

$(01)^*$ ... jazyk tvořený slovy ε, 01, 0101, 010101, ...

$(0 + 1)^*$ ... jazyk tvořený všemi slovy nad abecedou $\{0, 1\}$

Regulární výrazy

Příklady: Ve všech případech $\Sigma = \{0, 1\}$.

0 ... jazyk tvořený jediným slovem 0

01 ... jazyk tvořený jediným slovem 01

$0 + 1$ ... jazyk tvořený dvěma slovy 0 a 1

0^* ... jazyk tvořený slovy ε, 0, 00, 000, ...

$(01)^*$ ... jazyk tvořený slovy ε, 01, 0101, 010101, ...

$(0 + 1)^*$ ... jazyk tvořený všemi slovy nad abecedou $\{0, 1\}$

$(0 + 1)^*00$ ... jazyk tvořený všemi slovy končícími 00

Regulární výrazy

Příklady: Ve všech případech $\Sigma = \{0, 1\}$.

0 ... jazyk tvořený jediným slovem 0

01 ... jazyk tvořený jediným slovem 01

$0 + 1$ ... jazyk tvořený dvěma slovy 0 a 1

0^* ... jazyk tvořený slovy ε, 0, 00, 000, ...

$(01)^*$ ... jazyk tvořený slovy ε, 01, 0101, 010101, ...

$(0 + 1)^*$ ... jazyk tvořený všemi slovy nad abecedou $\{0, 1\}$

$(0 + 1)^*00$ ... jazyk tvořený všemi slovy končícími 00

$(01)^*111(01)^*$ ... jazyk tvořený všemi slovy obsahujícími podslovo 111 předcházené i následované libovolným počtem slov 01

Regulární výrazy

$(0+1)^*00 + (01)^*111(01)^*$ ... jazyk tvořený všemi slovy, která buď končí 00 nebo obsahují podslovo 111 předcházené i následované libovolným počtem slov 01

Regulární výrazy

$(0+1)^*00 + (01)^*111(01)^*$ ... jazyk tvořený všemi slovy, která buď končí 00 nebo obsahují podslovo 111 předcházené i následované libovolným počtem slov 01

$(0+1)^*1(0+1)^*$ ... jazyk tvořený všemi slovy obsahujícími alespoň jeden symbol 1

Regulární výrazy

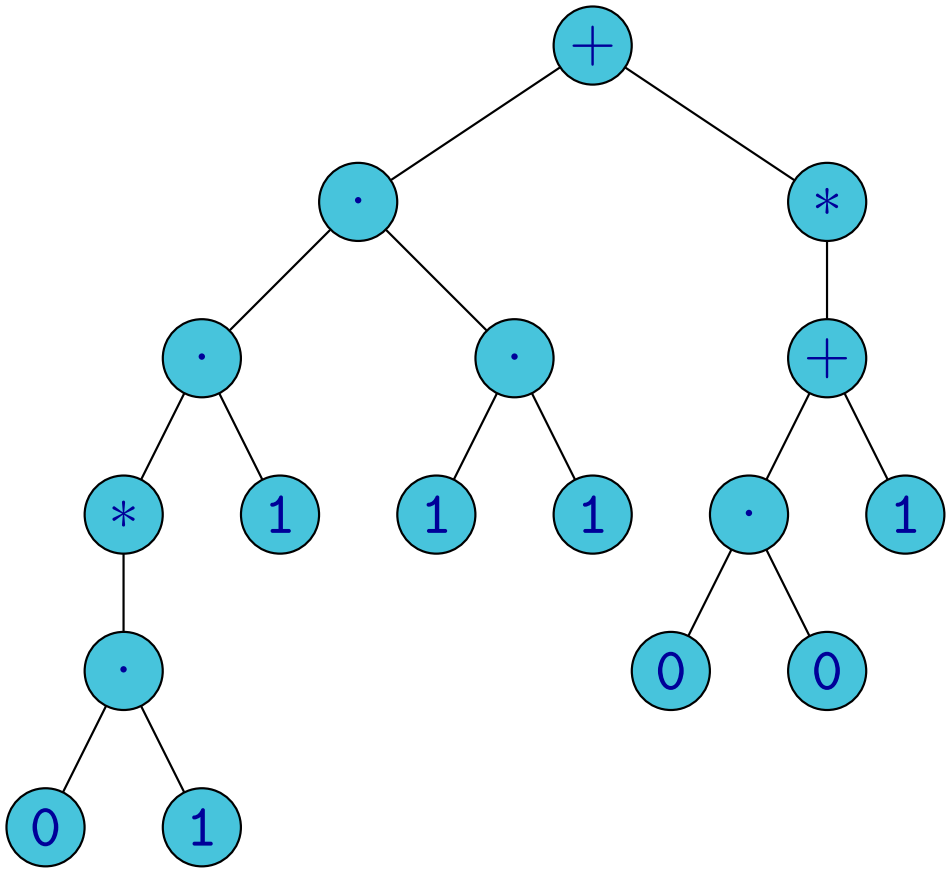
$(0+1)^*00+(01)^*111(01)^*$ ... jazyk tvořený všemi slovy, která buď končí 00 nebo obsahují podslovo 111 předcházené i následované libovolným počtem slov 01

$(0+1)^*1(0+1)^*$ ... jazyk tvořený všemi slovy obsahujícími alespoň jeden symbol 1

$(0^*10^*10^*)^*$ ... jazyk tvořený všemi slovy obsahujícími sudý počet symbolů 1

Regulární výrazy

Strukturu regulárního výrazu si můžeme znázornit jako strom:



$$(((((0 \cdot 1)^*) \cdot 1) \cdot (1 \cdot 1)) + (((0 \cdot 0) + 1)^*))$$

Převod regulárního výrazu na konečný automat

Tvrzení

Každý jazyk, který je možné vyjádřit regulárním výrazem, je regulární (tj. rozpoznávaný nějakým konečným automatem).

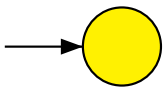
Důkaz: Stačí ukázat, jak k danému regulárnímu výrazu α zkonstruovat konečný automat, který rozpoznává jazyk $[\alpha]$.

Konstrukce je rekurzivní a postupuje podle struktury výrazu α:

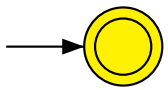
- Pokud je α elementární výraz (tj. $\emptyset$, ε nebo a):
  - Sestrojíme přímo odpovídající automat.
- Pokud je α tvaru $(\beta + \gamma)$, $(\beta \cdot \gamma)$ nebo (β^*):
  - Rekurzivně sestrojíme automaty rozpoznávající jazyky $[\beta]$ a $[\gamma]$.
  - Z nich sestrojíme automat rozpoznávající jazyk $[\alpha]$.

Převod regulárního výrazu na konečný automat

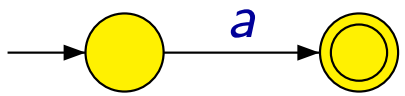
Automaty pro elementární výrazy:



$\emptyset$



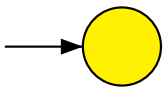
ε



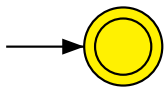
a

Převod regulárního výrazu na konečný automat

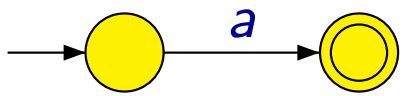
Automaty pro elementární výrazy:



$\emptyset$

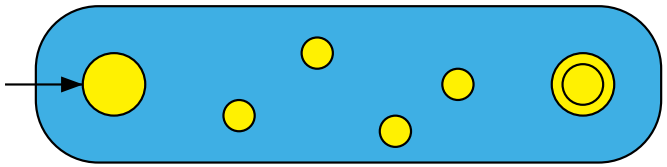


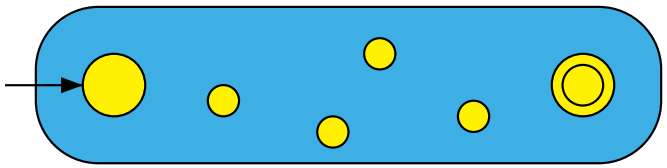
ε



a

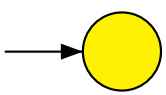
Konstrukce pro sjednocení:



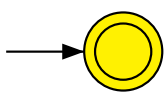


Převod regulárního výrazu na konečný automat

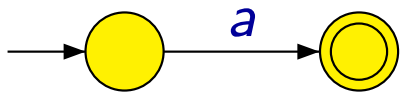
Automaty pro elementární výrazy:



$\emptyset$

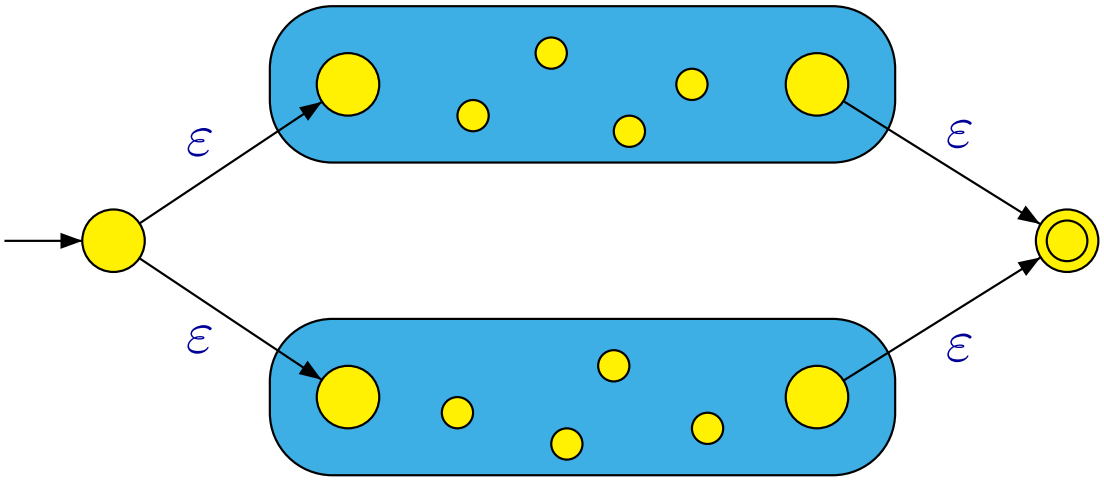


ε



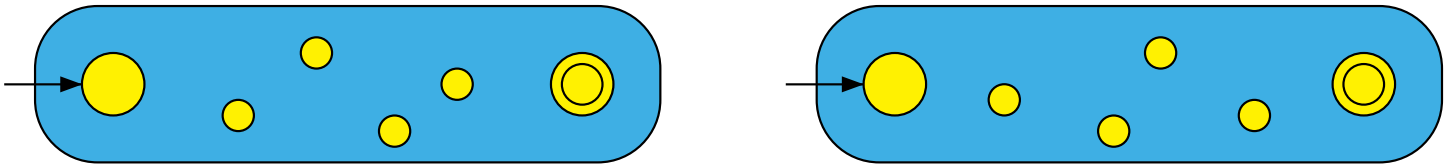
a

Konstrukce pro sjednocení:



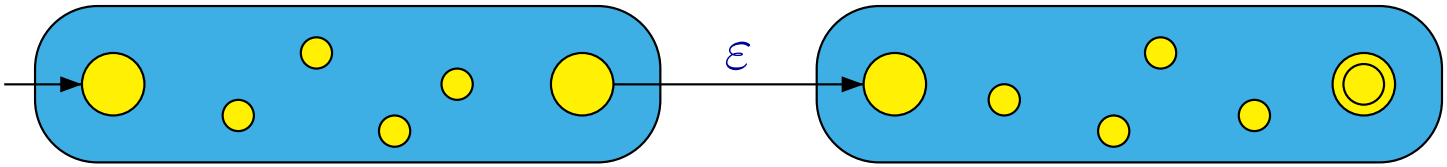
Převod regulárního výrazu na konečný automat

Konstrukce pro zřetězení:



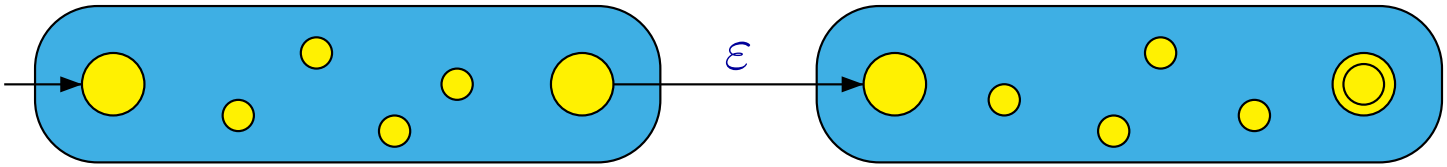
Převod regulárního výrazu na konečný automat

Konstrukce pro zřetězení:

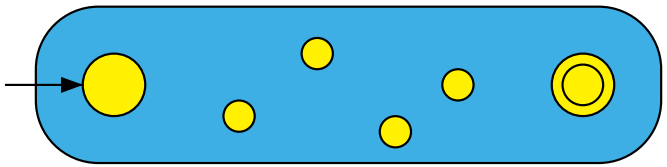


Převod regulárního výrazu na konečný automat

Konstrukce pro zřetězení:

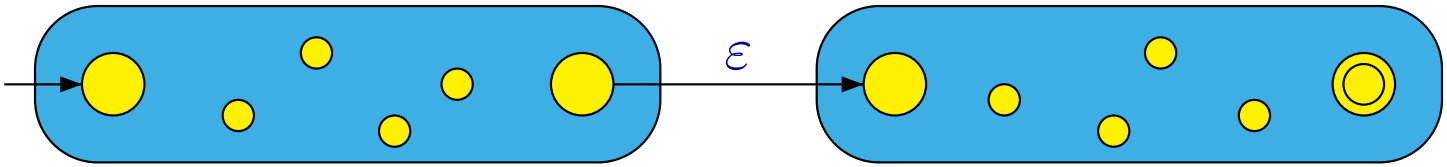


Konstrukce pro iteraci:

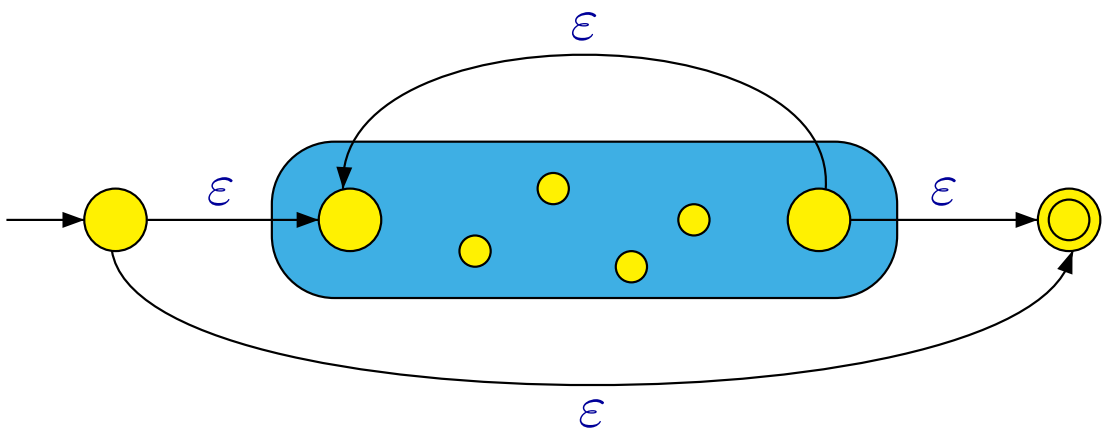


Převod regulárního výrazu na konečný automat

Konstrukce pro zřetězení:



Konstrukce pro iteraci:

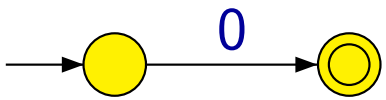


Převod regulárního výrazu na konečný automat

Příklad: Konstrukce automatu pro výraz $((0 + 1) \cdot 1)^*$:

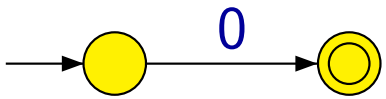
Převod regulárního výrazu na konečný automat

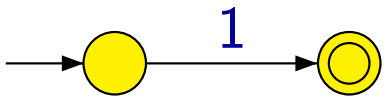
Příklad: Konstrukce automatu pro výraz $((0 + 1) \cdot 1)^*$:



Převod regulárního výrazu na konečný automat

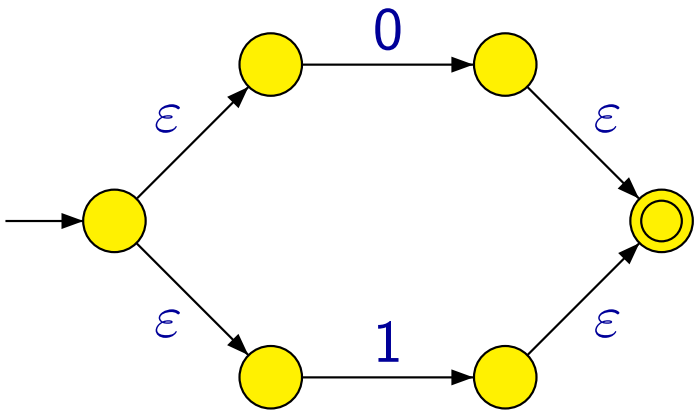
Příklad: Konstrukce automatu pro výraz $((0 + 1) \cdot 1)^*$:





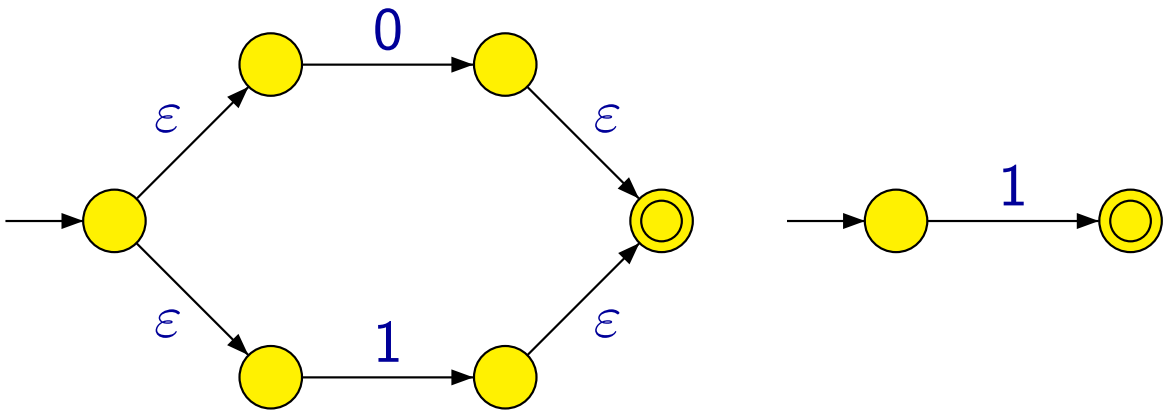
Převod regulárního výrazu na konečný automat

Příklad: Konstrukce automatu pro výraz $((0 + 1) \cdot 1)^*$:



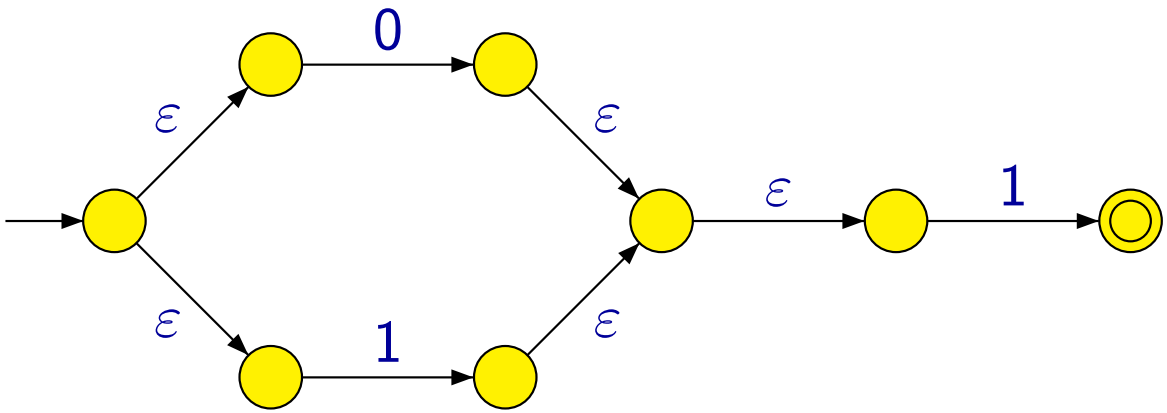
Převod regulárního výrazu na konečný automat

Příklad: Konstrukce automatu pro výraz $((0+1)\cdot 1)^*$:



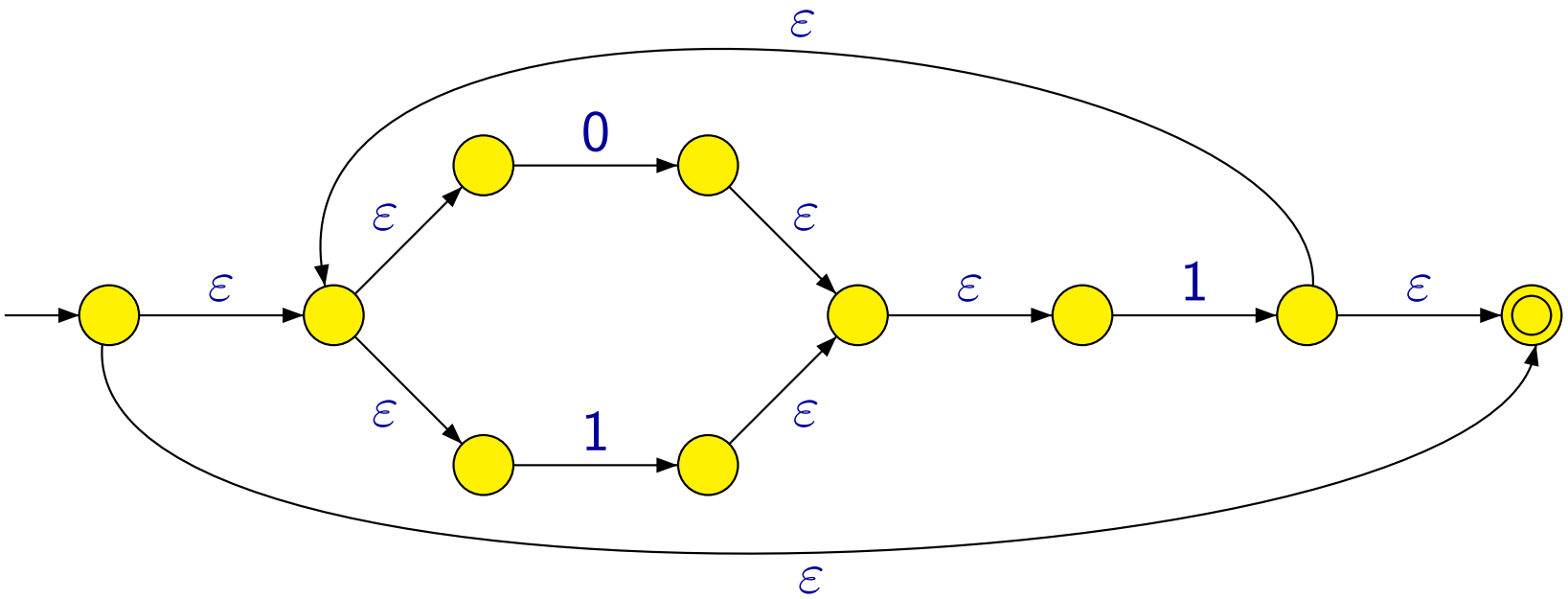
Převod regulárního výrazu na konečný automat

Příklad: Konstrukce automatu pro výraz $((0+1)\cdot 1)^*$:



Převod regulárního výrazu na konečný automat

Příklad: Konstrukce automatu pro výraz $((0+1)\cdot 1)^*$:



Převod regulárního výrazu na konečný automat

Pokud se výraz α skládá z n znaků (nepočítáme-li závorky), má výsledný automat:

- nejvýše $2n$ stavů,
- nejvýše $4n$ přechodů.

Poznámka: Převodem ze zobecněného nedeterministického automatu na deterministický však může počet stavů vzrůst exponenciálně, tj. výsledný automat pak může mít až $2^{2n} = 4^n$ stavů.

Převod konečného automatu na regulární výraz

Tvrzení

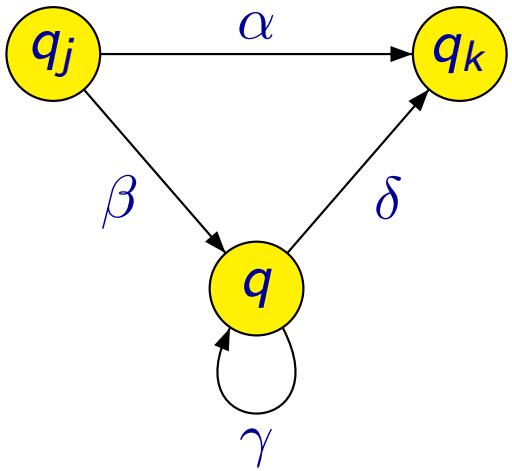
Každý regulární jazyk je možné popsat nějakým regulárním výrazem.

Důkaz: Stačí ukázat, jak pro libovolný konečný automat A zkonstruovat regulární výraz α takový, že $[\alpha] = L(A)$.

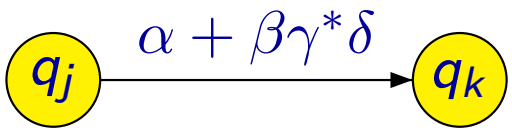
- A upravíme tak, aby měl právě jeden počáteční a právě jeden koncový stav.
- Budeme postupně odebírat jednotlivé stavy.
- Přechody budou označeny regulárními výrazy.
- Zbude automat se dvěma stavy – počátečním a koncovým, a jedním přechodem ohodnoceným výsledným regulárním výrazem.

Převod konečného automatu na regulární výraz

Hlavní myšlenka: Při odstraňování stavu q nahradit pro každou dvojici zbylých stavů q_j, q_k cestu z q_j do q_k vedoucí přes q.

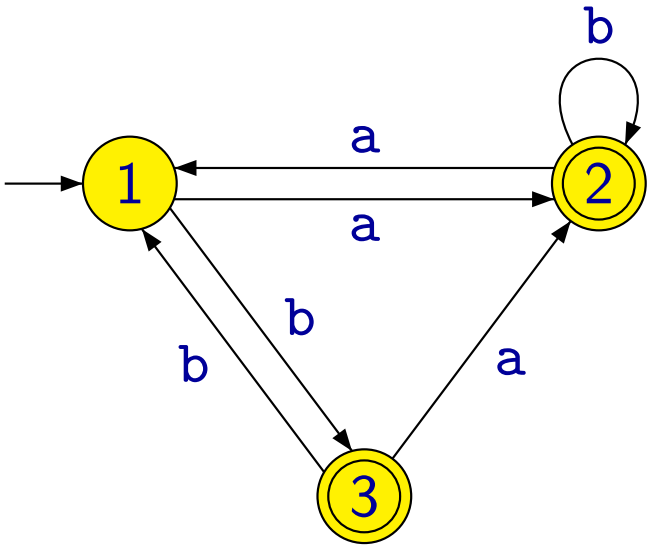


Po odstranění stavu q:



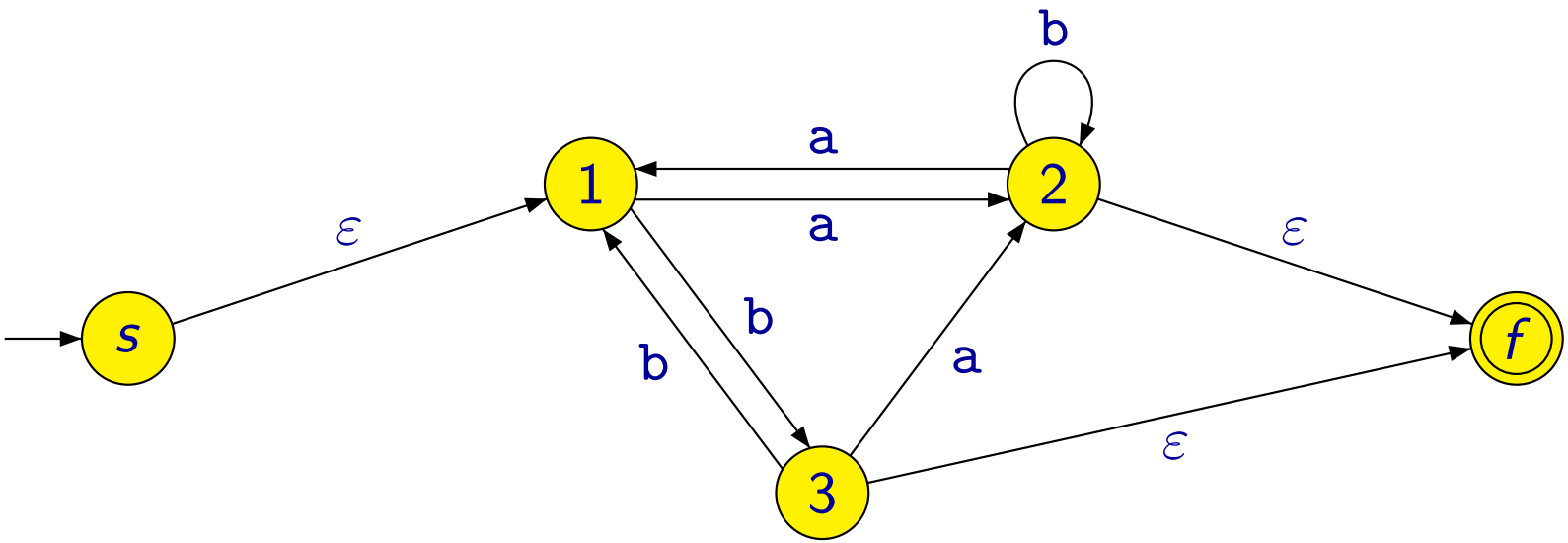
Převod konečného automatu na regulární výraz

Příklad:



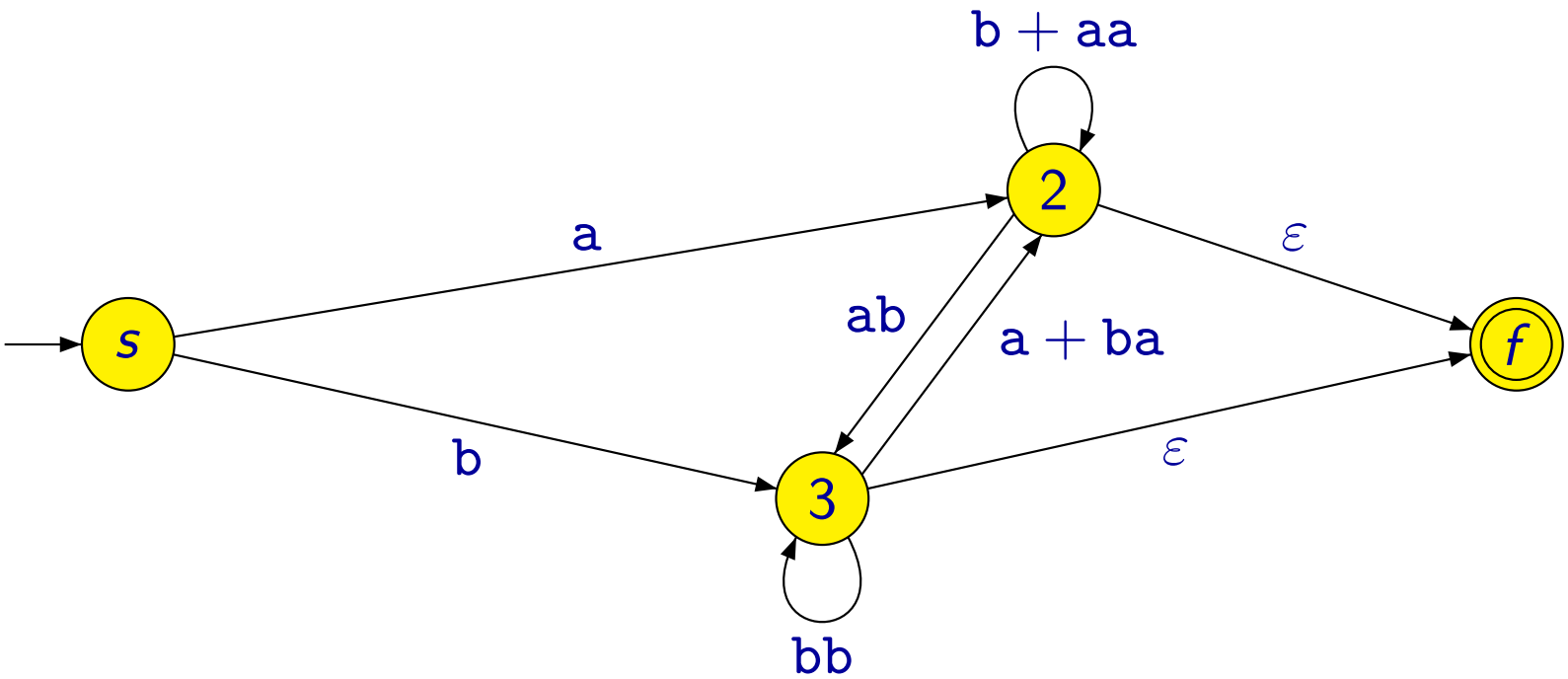
Převod konečného automatu na regulární výraz

Příklad:



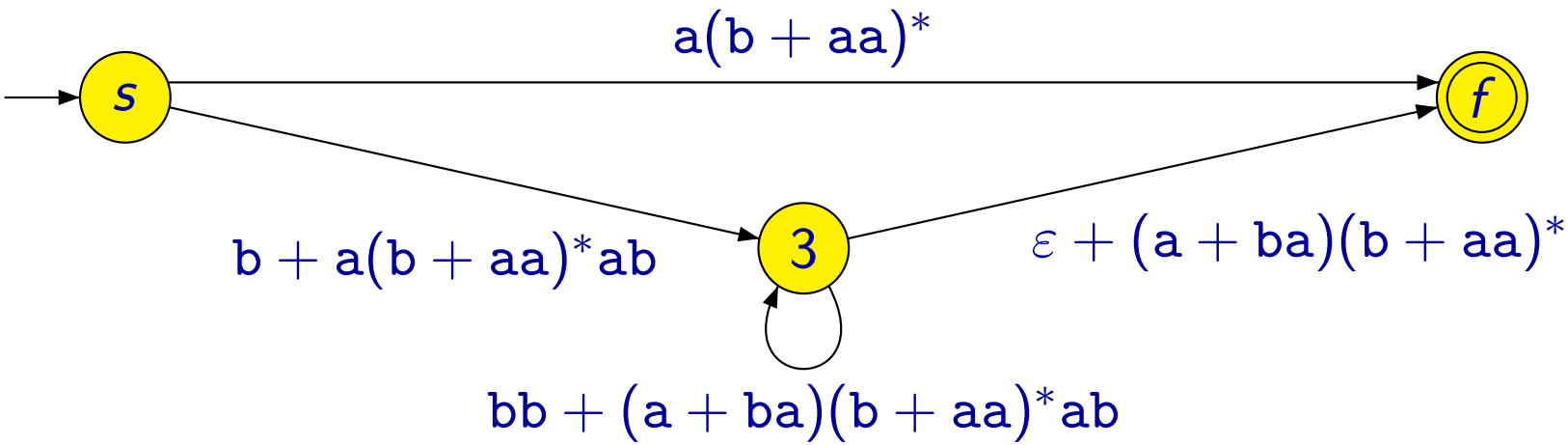
Převod konečného automatu na regulární výraz

Příklad:



Převod konečného automatu na regulární výraz

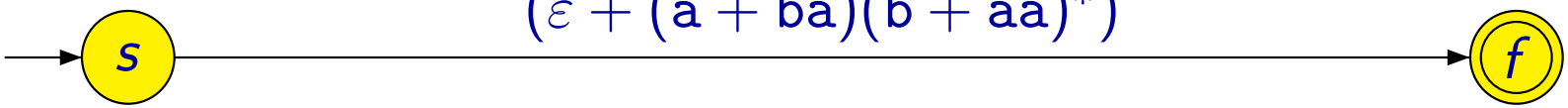
Příklad:



Převod konečného automatu na regulární výraz

Příklad:

$$\mathtt{a}(\mathtt{b}+\mathtt{aa})^*+$$
$$(\mathtt{b}+\mathtt{a}(\mathtt{b}+\mathtt{aa})^*\mathtt{ab})$$
$$(\mathtt{bb}+(\mathtt{a}+\mathtt{ba})(\mathtt{b}+\mathtt{aa})^*\mathtt{ab})^*$$
$$(\varepsilon+(\mathtt{a}+\mathtt{ba})(\mathtt{b}+\mathtt{aa})^*)$$

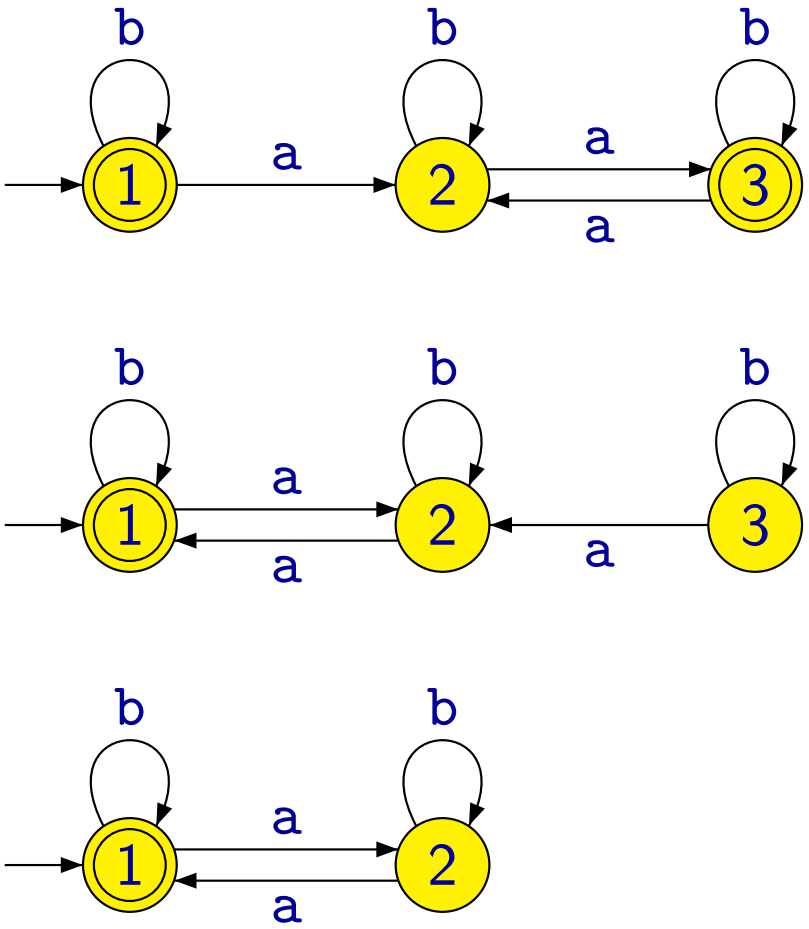


Ekvivalence konečných automatů a regulárních výrazů

Věta

Jazyk je regulární právě tehdy, když je ho možné popsat regulárním výrazem.

Ekvivalence automatů



- Všechny 3 automaty přijímají jazyk všech slov se sudým počtem *a*-ček
- Nejvýhodnější je pro nás poslední z nich – má nejméně stavů

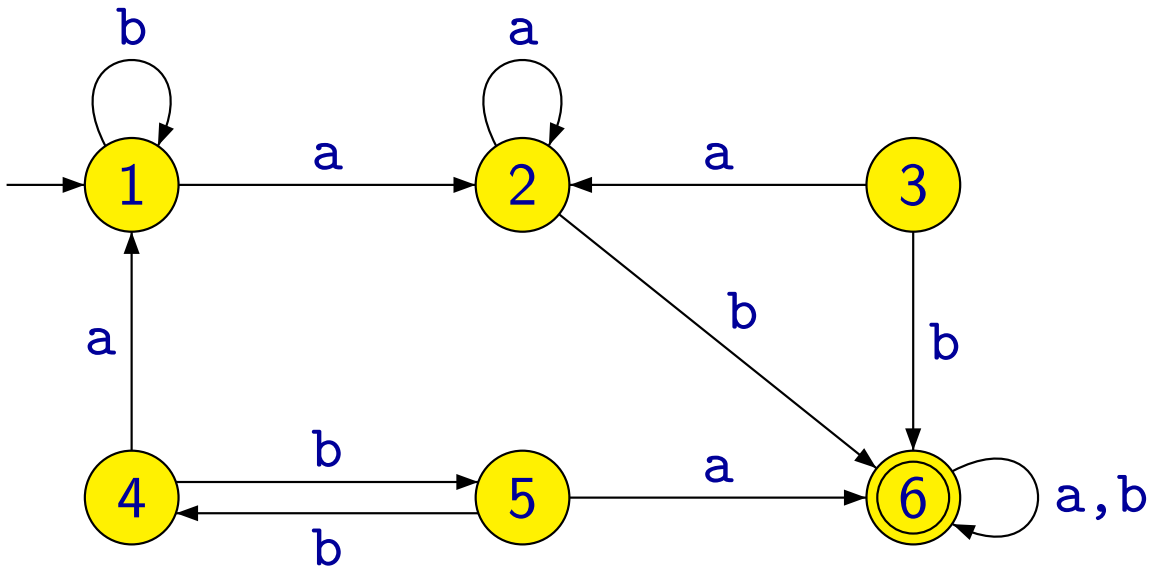
Ekvivalence automatů

Definice

O konečných automatech A_1, A_2 řekneme, že jsou **ekvivalentní**, jestliže $L(A_1) = L(A_2)$.

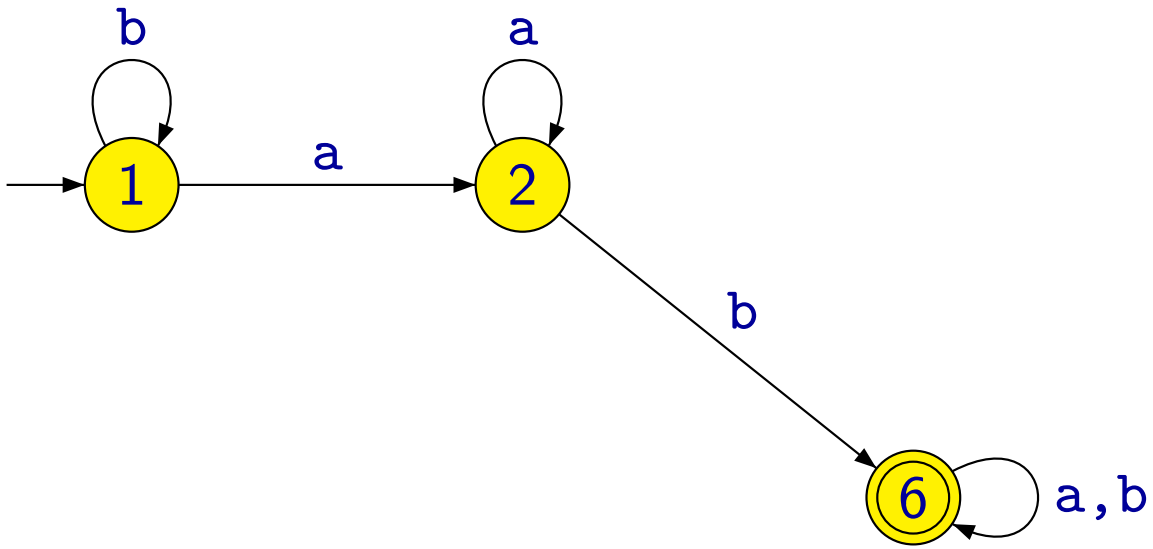
- Existuje nějaký vhodný algoritmus zjišťující, jestli jsou dva automaty ekvivalentní?

Nedosažitelné stavy automatu



- Automat přijímá jazyk $L = \{w \in a, b^* \mid w \text{ obsahuje podslovo } ab\}$
- Pro žádnou posloupnost vstupních symbolů se automat nedostane do stavů 3, 4, nebo 5

Nedosažitelné stavy automatu



- Automat přijímá jazyk $L = \{w \in a, b^* \mid w \text{ obsahuje podslovo } ab\}$
- Pro žádnou posloupnost vstupních symbolů se automat nedostane do stavů 3, 4, nebo 5
- Pokud tyto stavy odstraníme, pořád automat přijímá stejný jazyk $L = \{w \in a, b^* \mid w \text{ obsahuje podslovo } ab\}$

Nedosažitelné stavy automatu

Definice

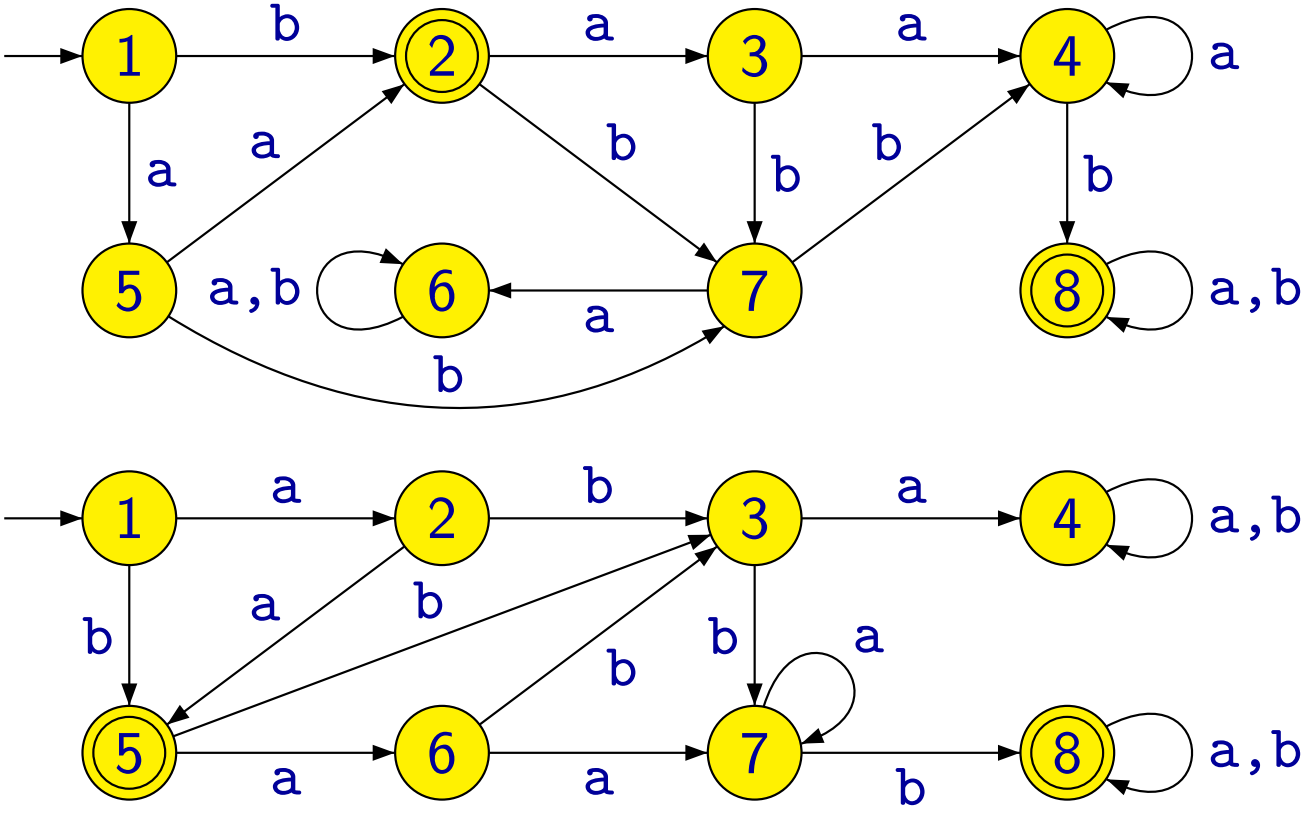
Stav q deterministického konečného automatu $\mathcal{A}$ je **dosažitelný slovem** w, pokud se výpočet $\mathcal{A}$ po přečtení celého slova w zastaví ve stavu q.

Definice

Stav q deterministického konečného automatu $\mathcal{A}$ je **dosažitelný** pokud existuje nějaké slovo, kterým je stav dosažitelný. V opačném případě stav nazýváme **nedosažitelný**.

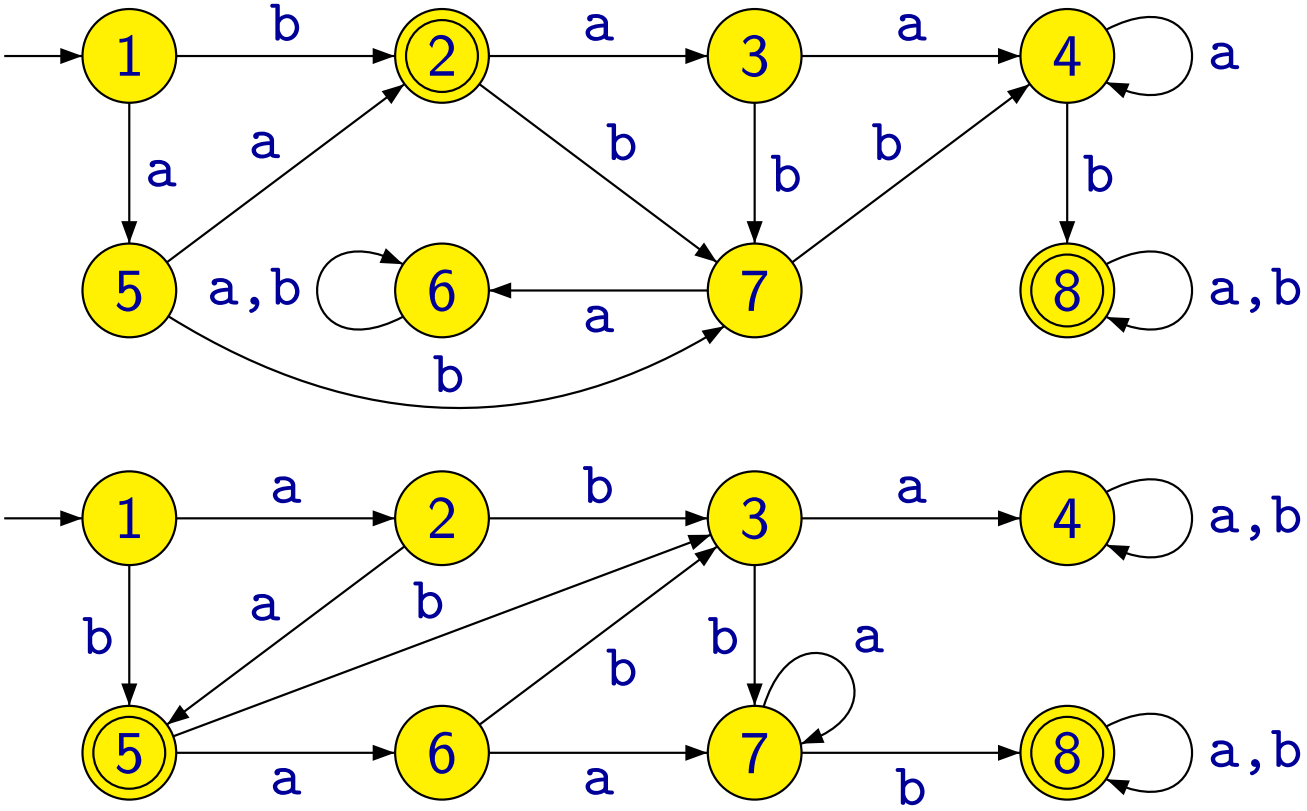
- Do nedosažitelných stavů nevede v grafu automatu žádná orientovaná cesta z počátečního stavu
- Nedosažitelné stavy můžeme z automatu odstranit (spolu se všemi přechody vedoucími z nich). Jazyk přijímaný automatem se nezmění.

Normovaný tvar automatu



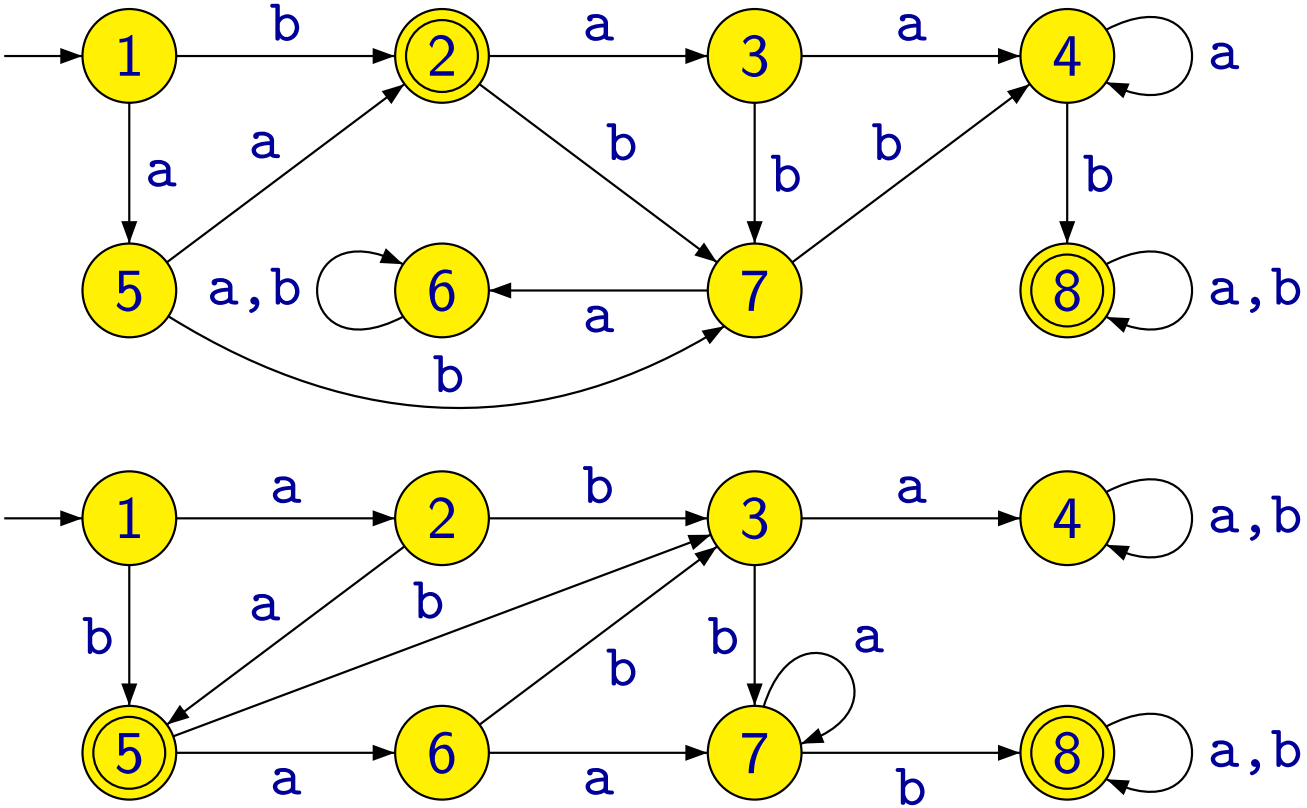
$\mathcal{A}_1$	a	b
$\rightarrow 1$	5	2
$\leftarrow 2$	3	7
3	4	7
4	4	8
5	2	7
6	6	6
7	6	4
$\leftarrow 8$	8	8

Normovaný tvar automatu



$\mathcal{A}_2$	a	b
$\rightarrow 1$	2	5
2	5	3
3	4	7
4	4	4
$\leftarrow 5$	6	3
6	7	3
7	7	8
$\leftarrow 8$	8	8

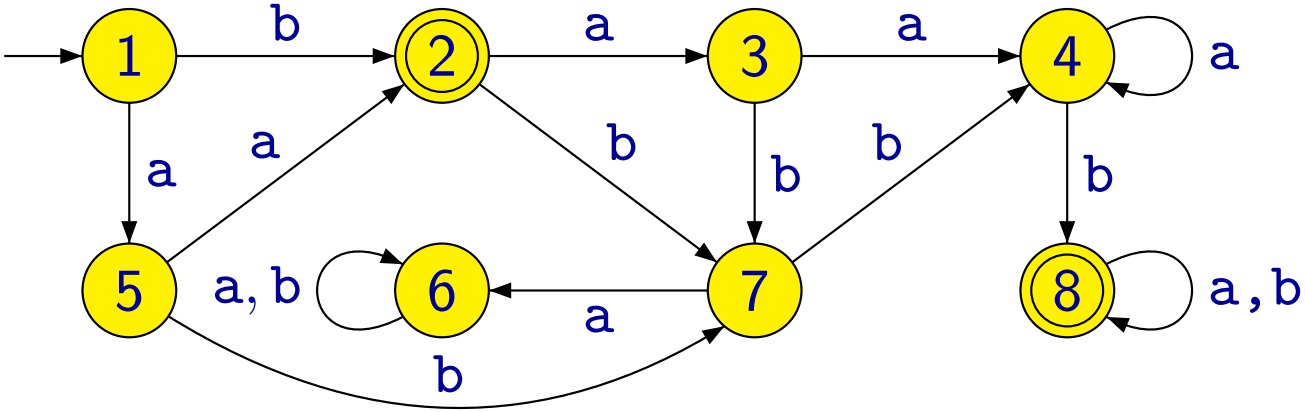
Normovaný tvar automatu



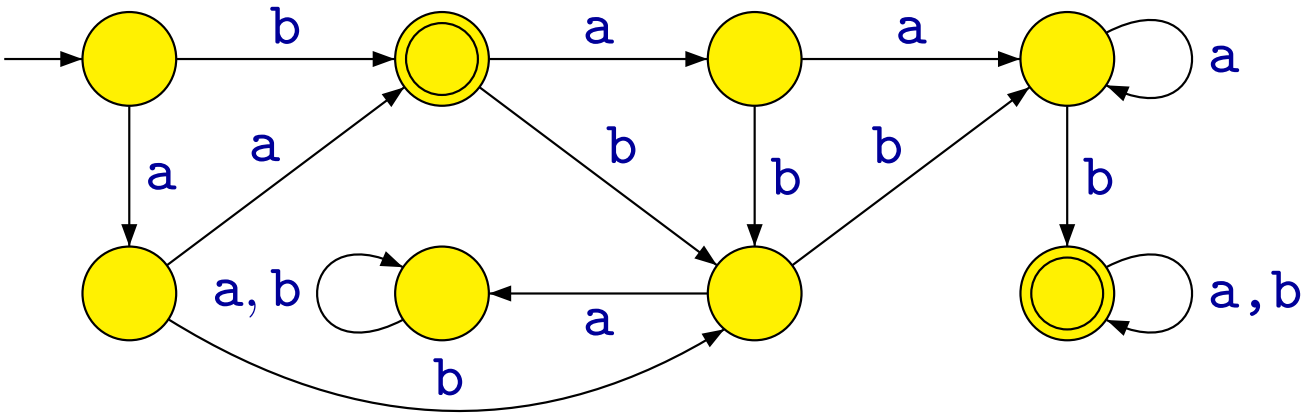
$\mathcal{A}_2$	a	b
$\rightarrow 1$	2	5
2	5	3
3	4	7
4	4	4
$\leftarrow 5$	6	3
6	7	3
7	7	8
$\leftarrow 8$	8	8

- Jak poznáme, že jsou automaty ekvivalentní, když se liší přechodová funkce?
- Automaty na obrázku můžu čísly $1-8$ pojmenovat $8!$ způsoby
- Chtěli bychom jednoznačně vybrat jedno z možných pojmenování

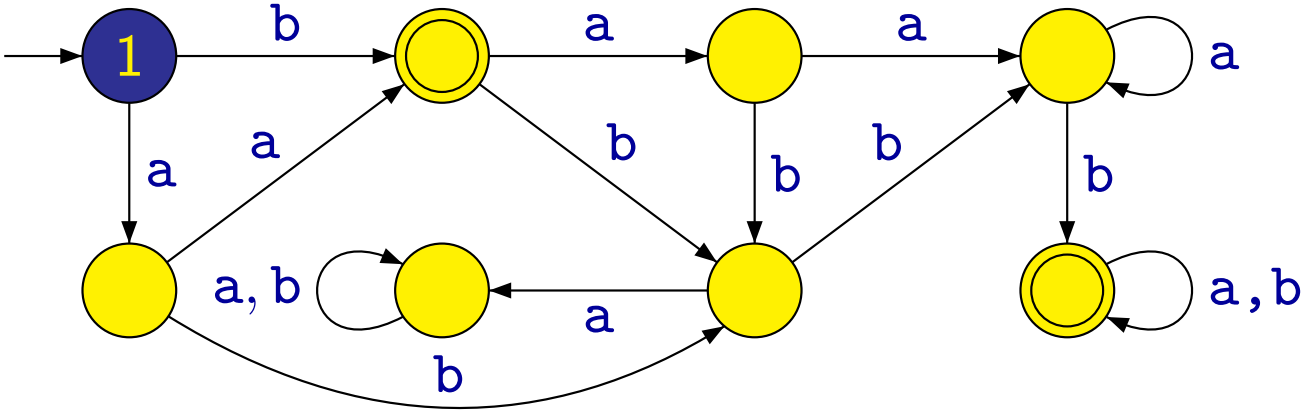
Normovaný tvar automatu



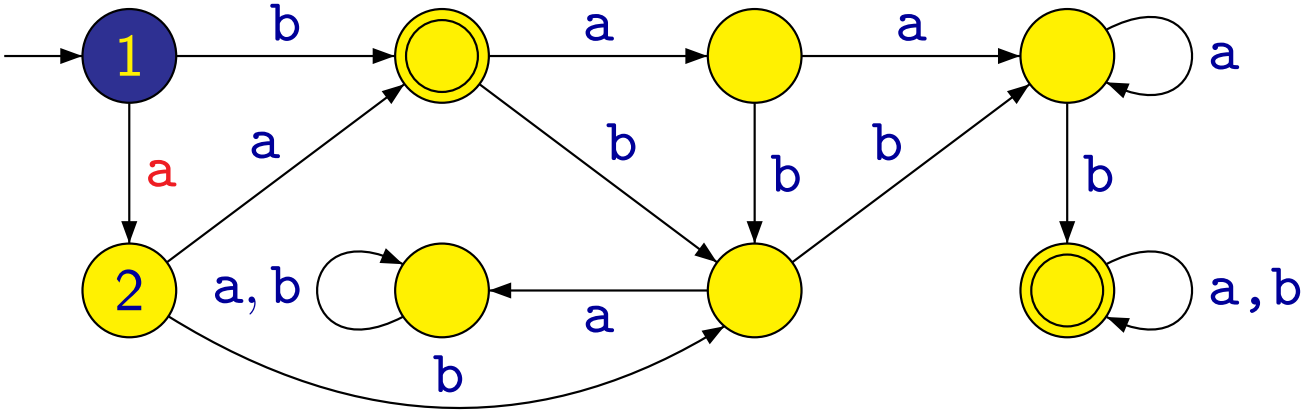
Normovaný tvar automatu



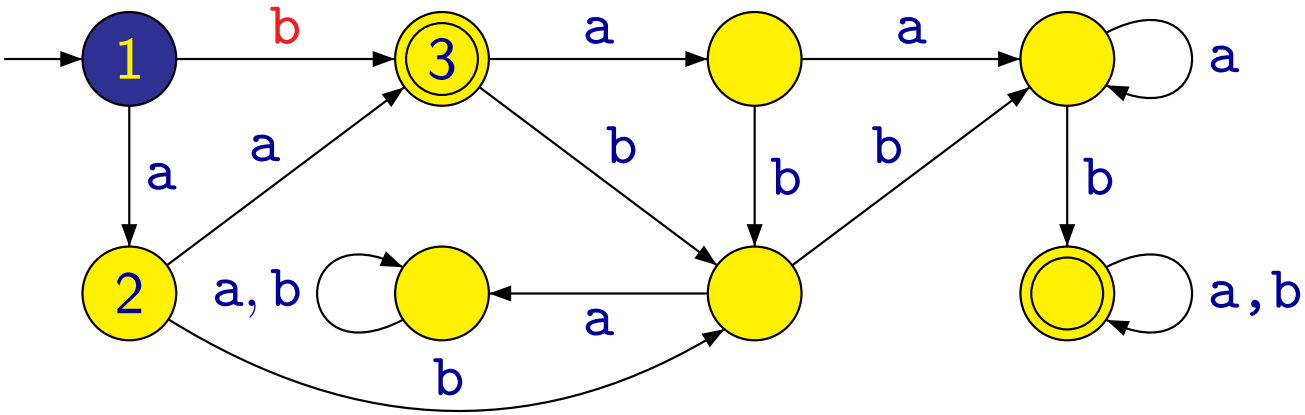
Normovaný tvar automatu



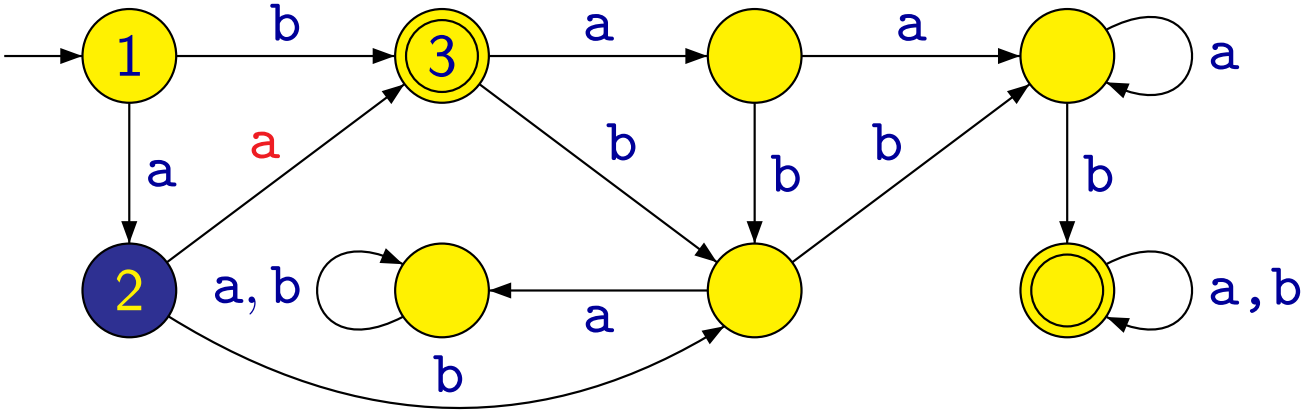
Normovaný tvar automatu



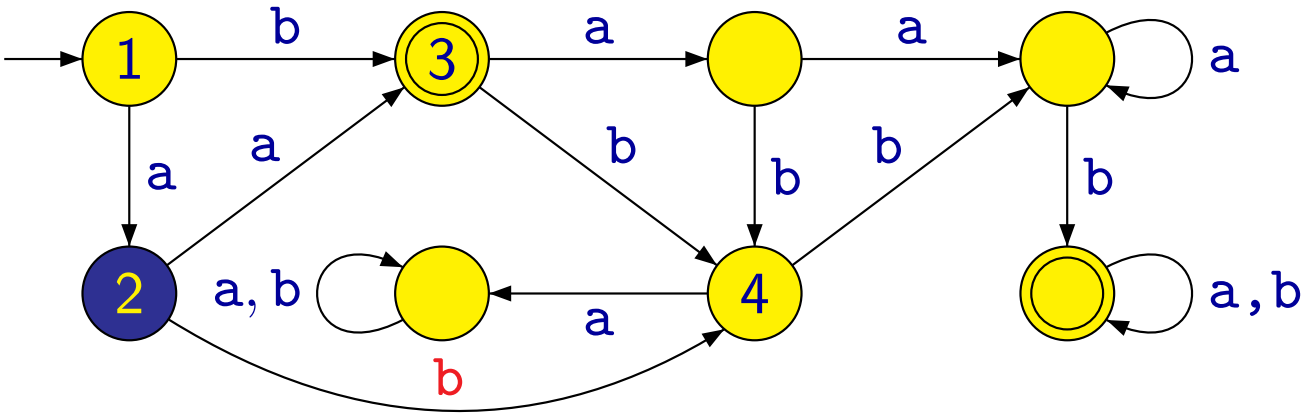
Normovaný tvar automatu



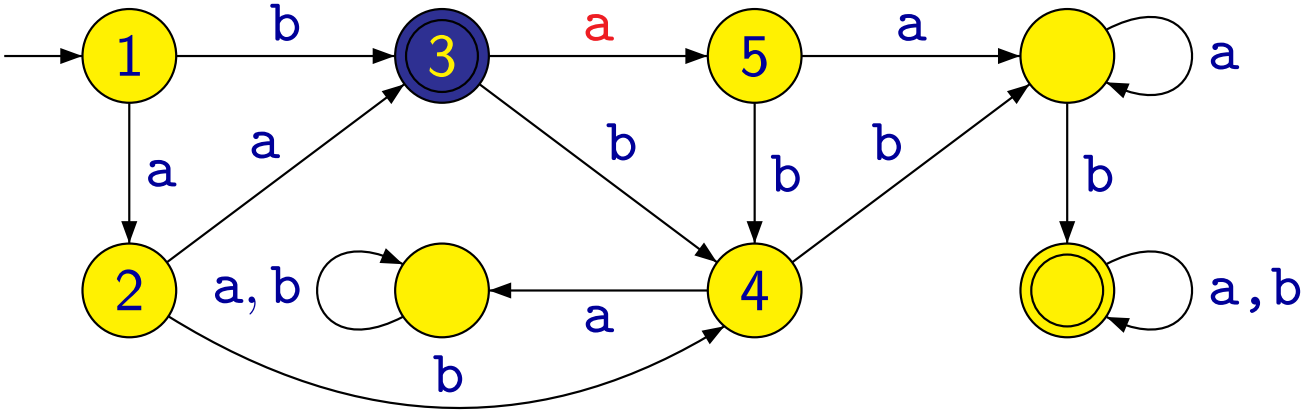
Normovaný tvar automatu



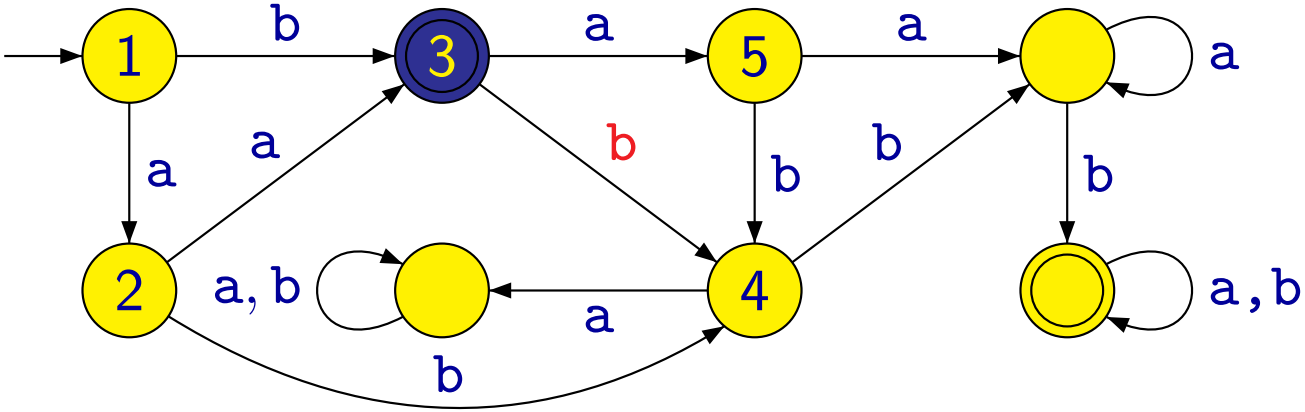
Normovaný tvar automatu



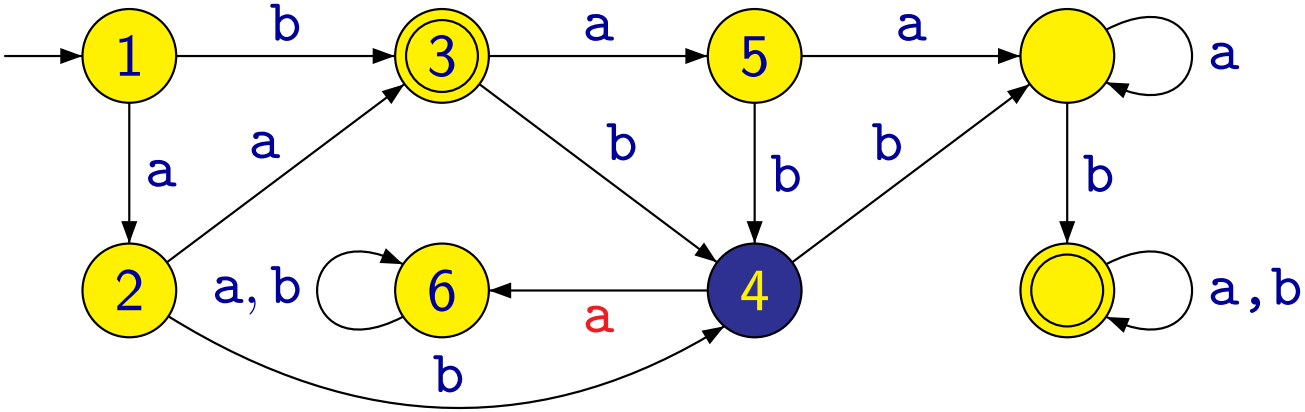
Normovaný tvar automatu



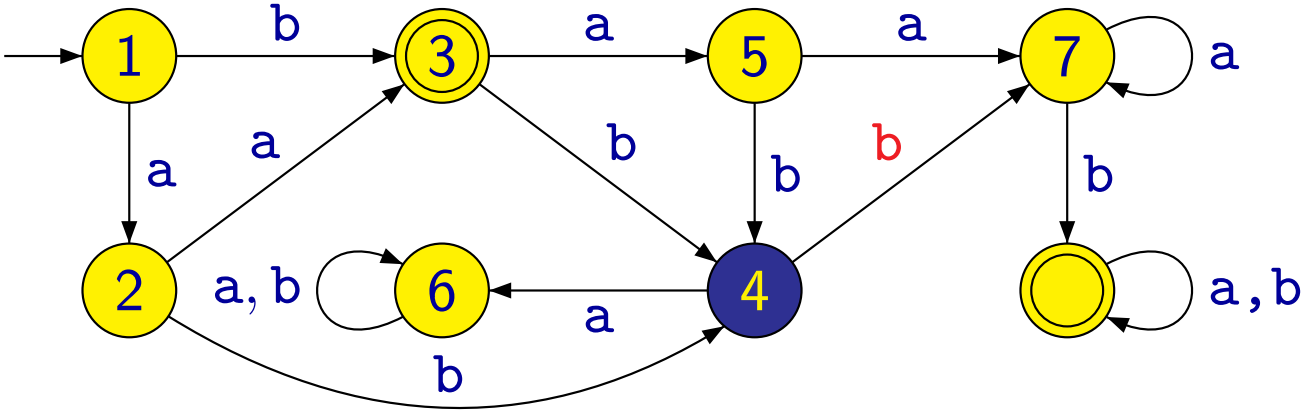
Normovaný tvar automatu



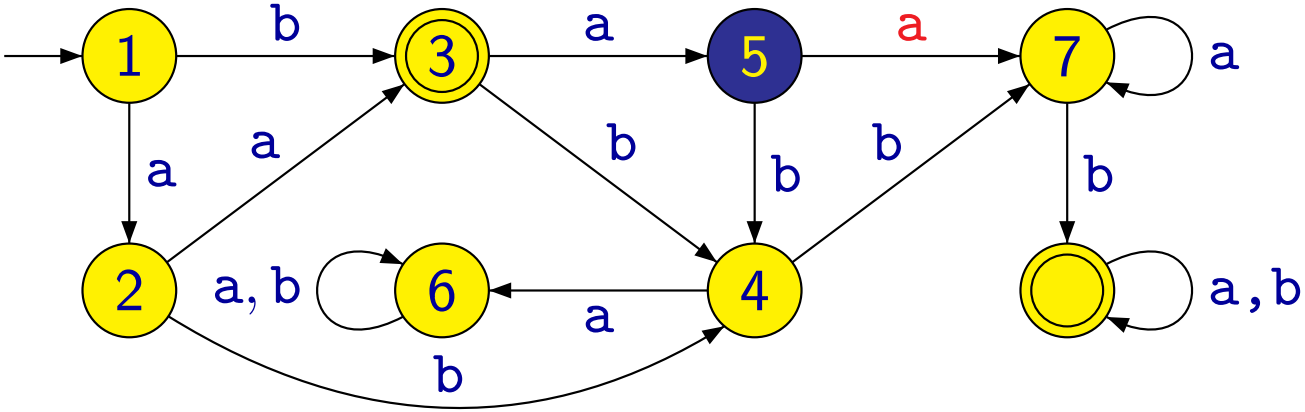
Normovaný tvar automatu



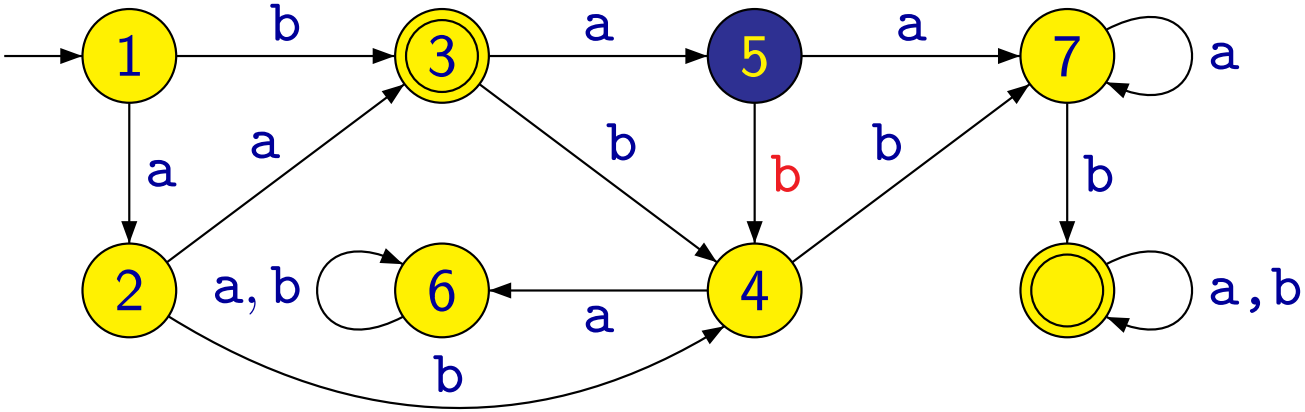
Normovaný tvar automatu



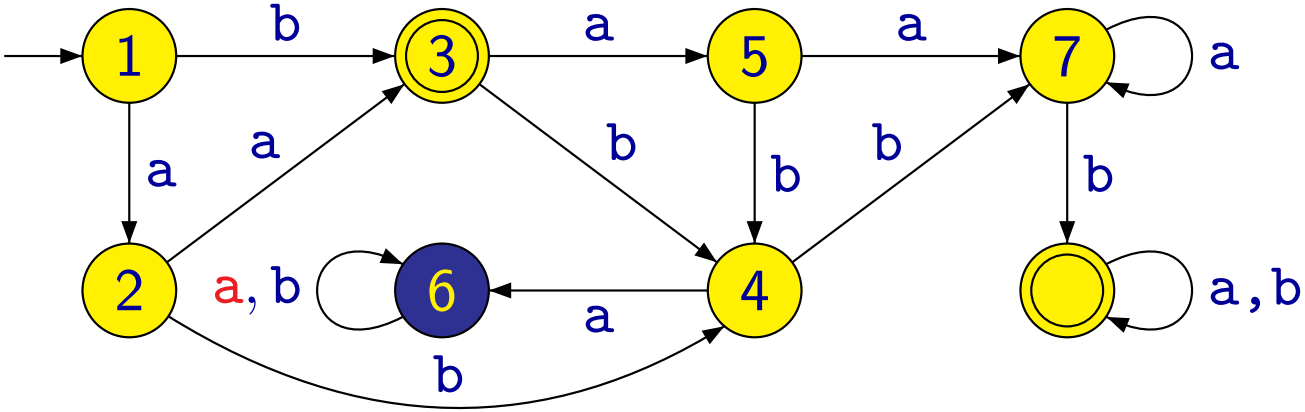
Normovaný tvar automatu



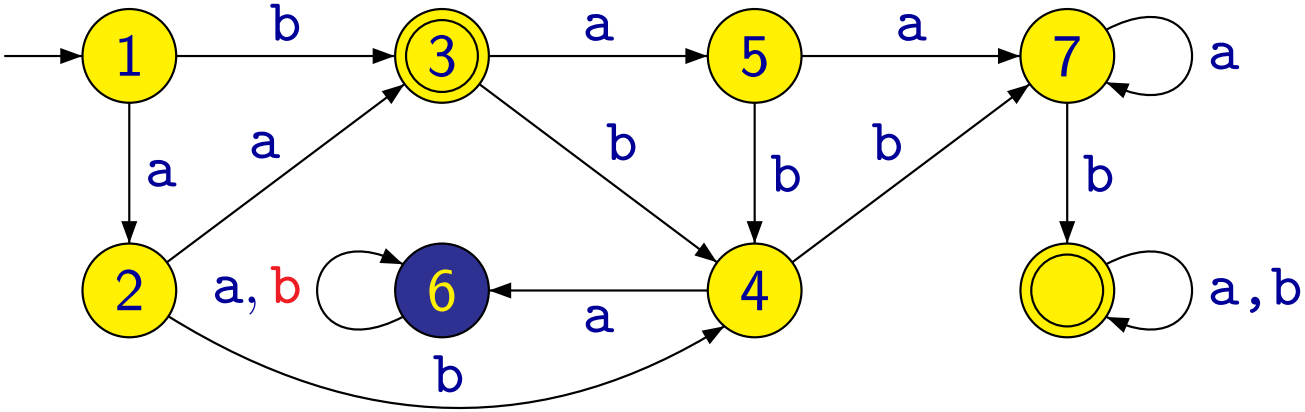
Normovaný tvar automatu



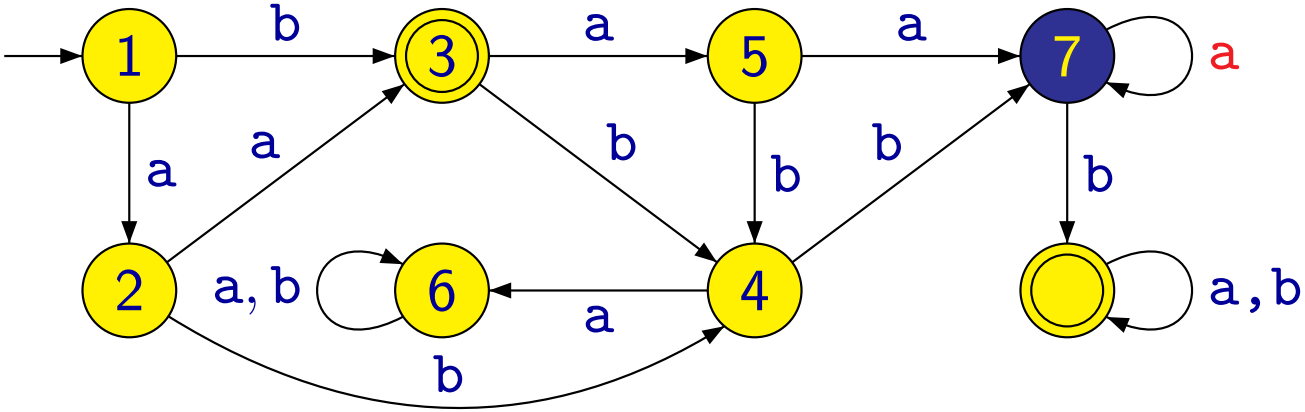
Normovaný tvar automatu



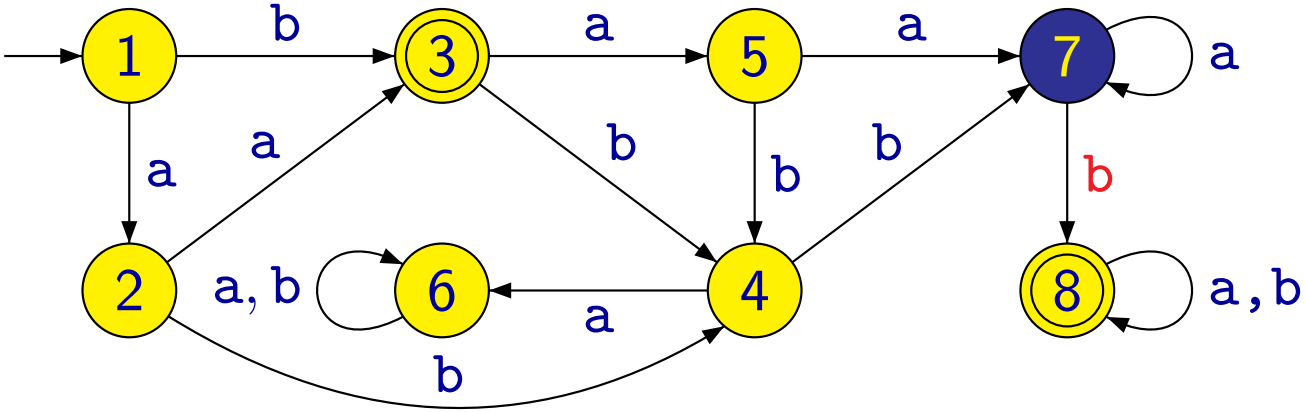
Normovaný tvar automatu



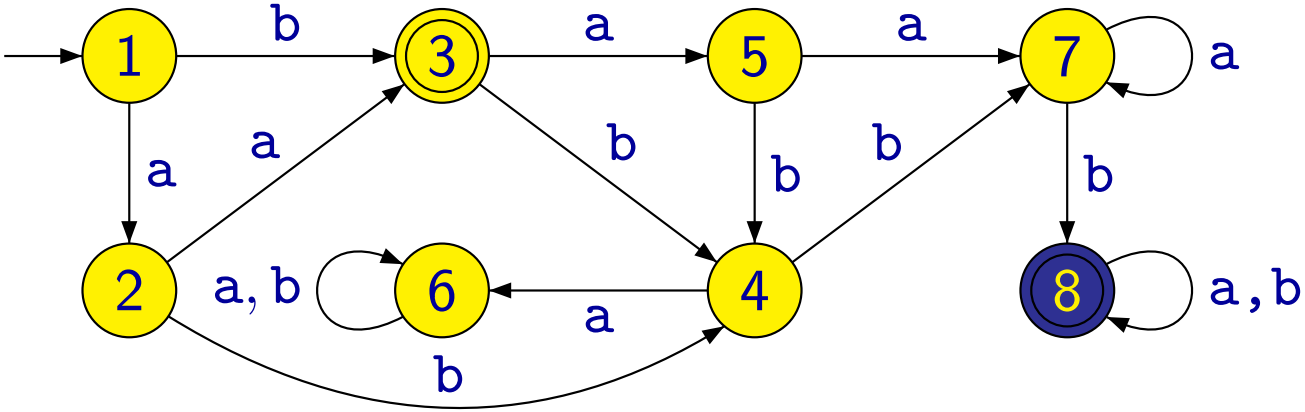
Normovaný tvar automatu



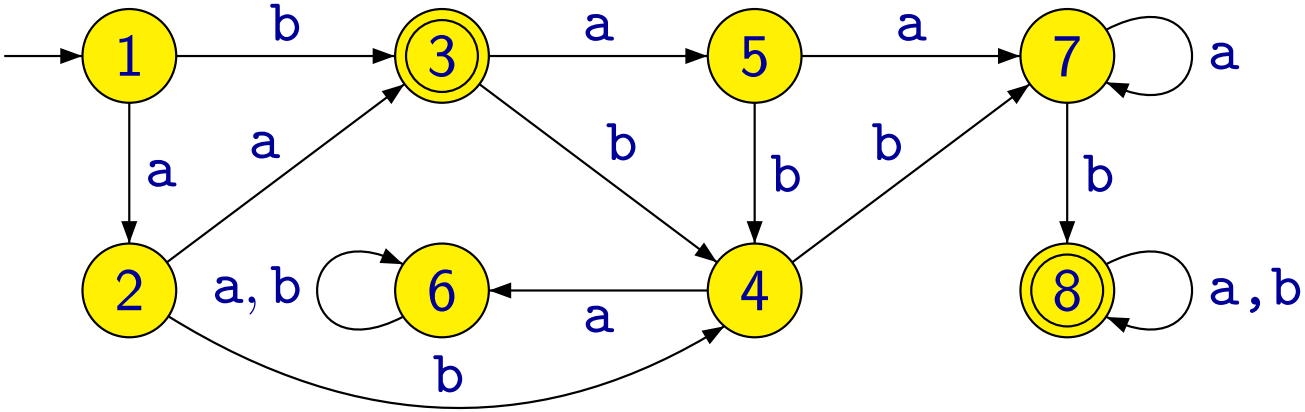
Normovaný tvar automatu



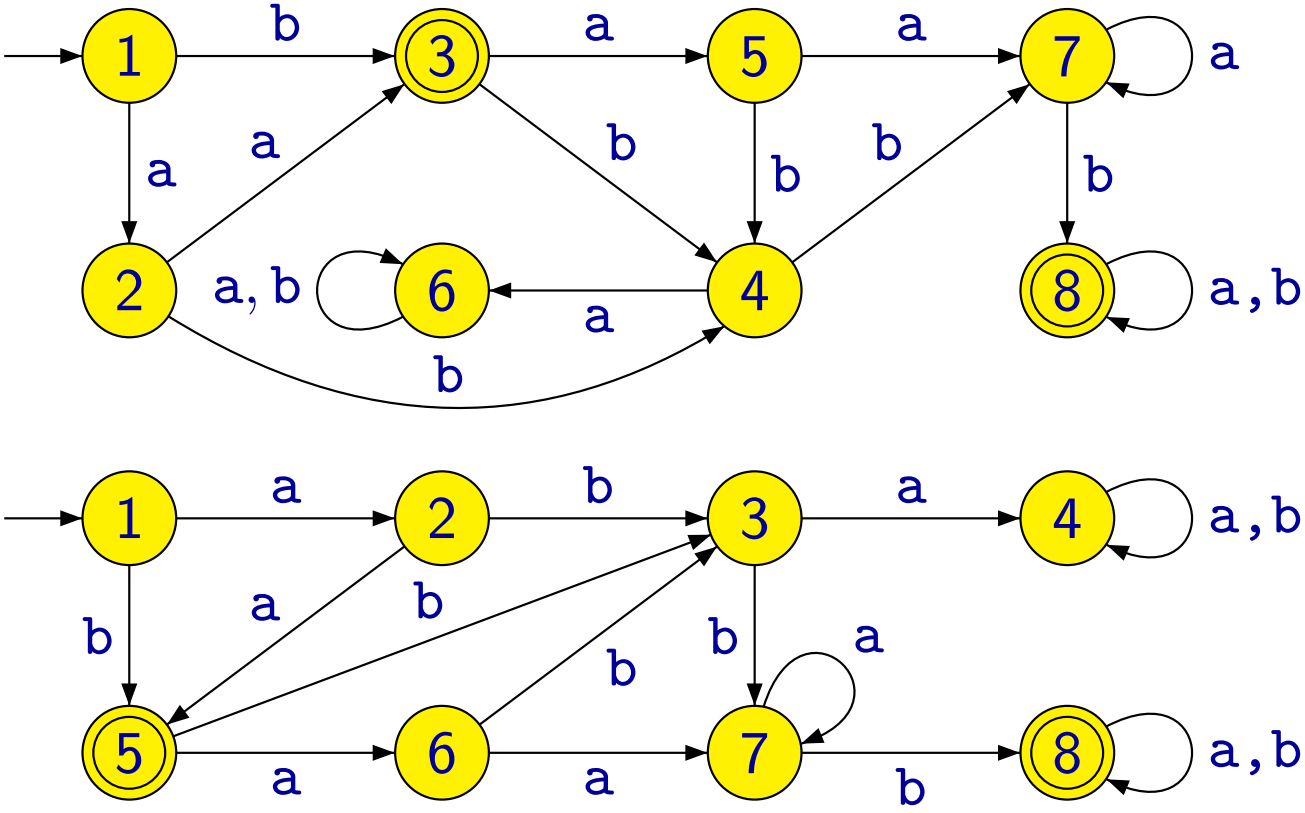
Normovaný tvar automatu



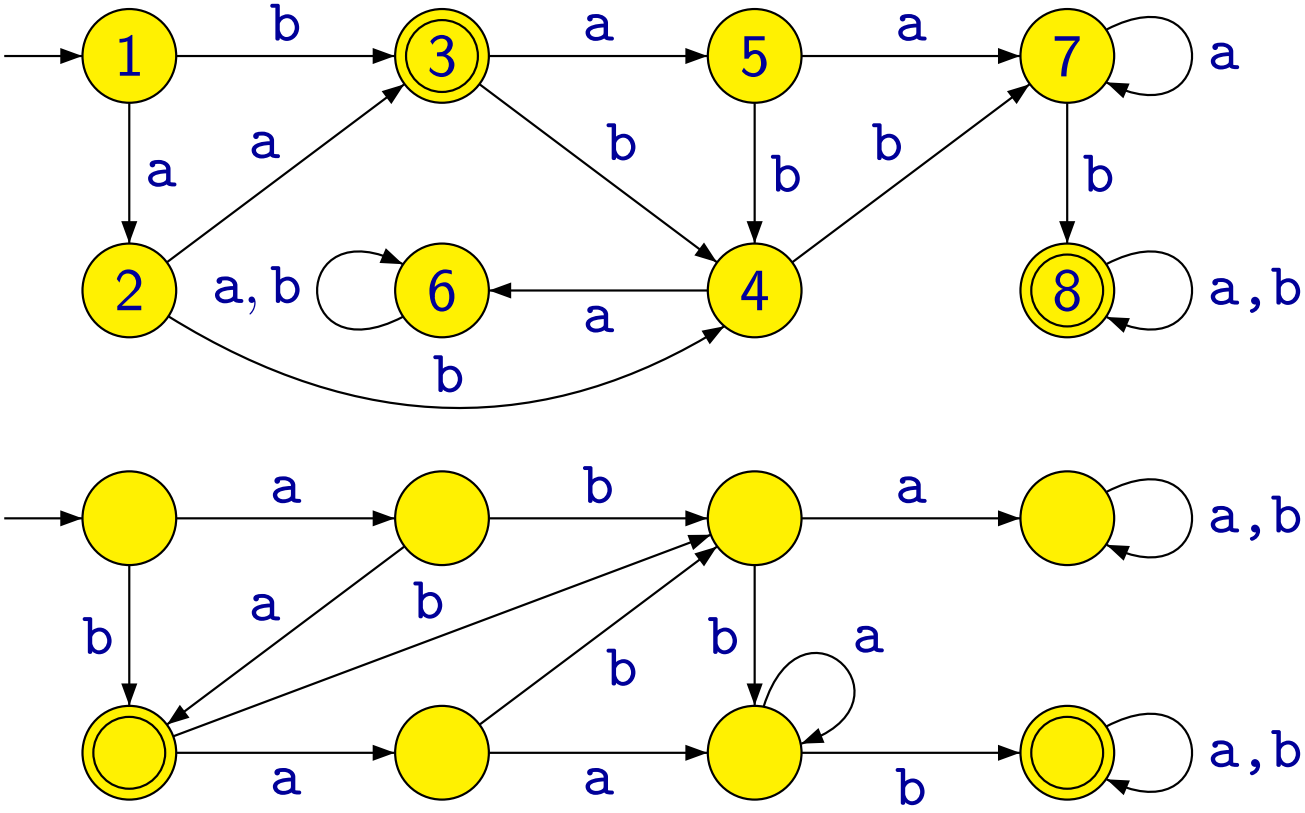
Normovaný tvar automatu



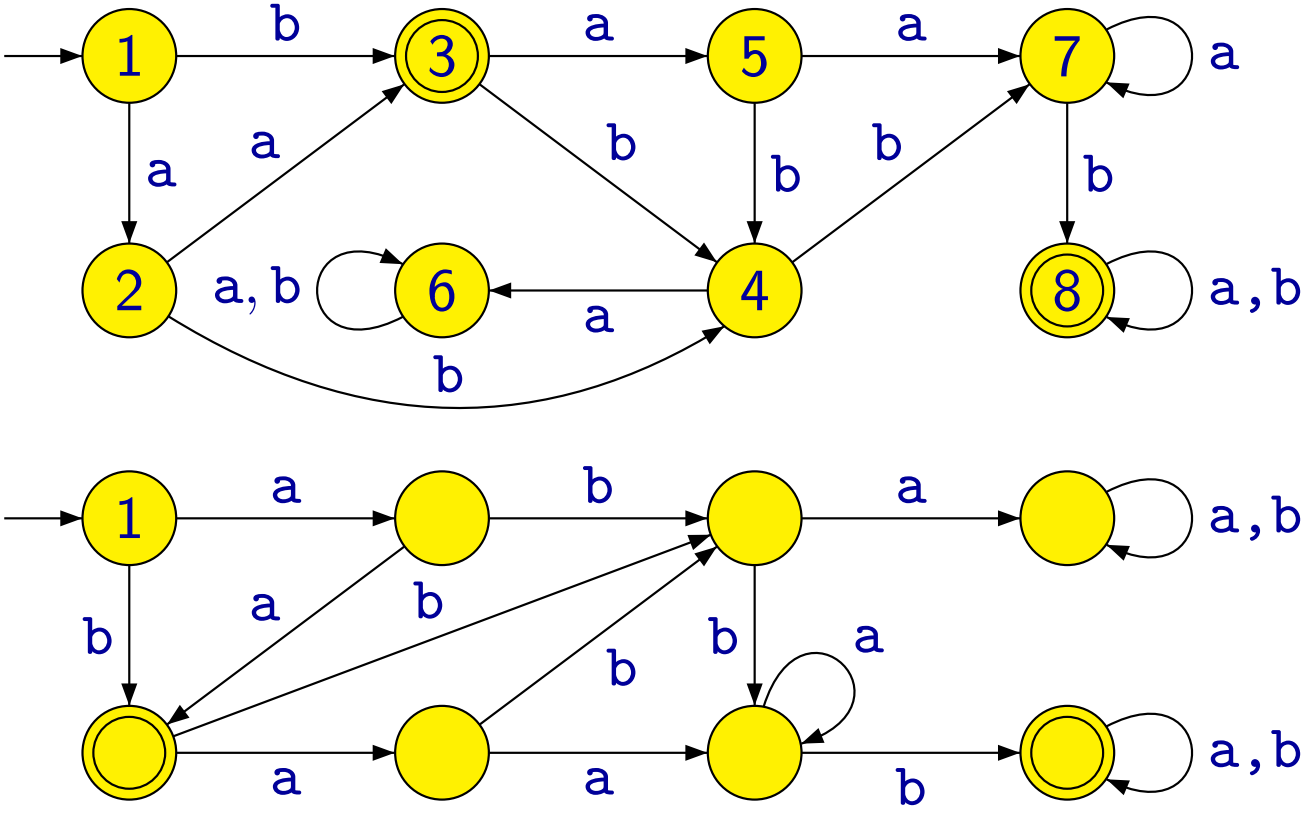
Normovaný tvar automatu



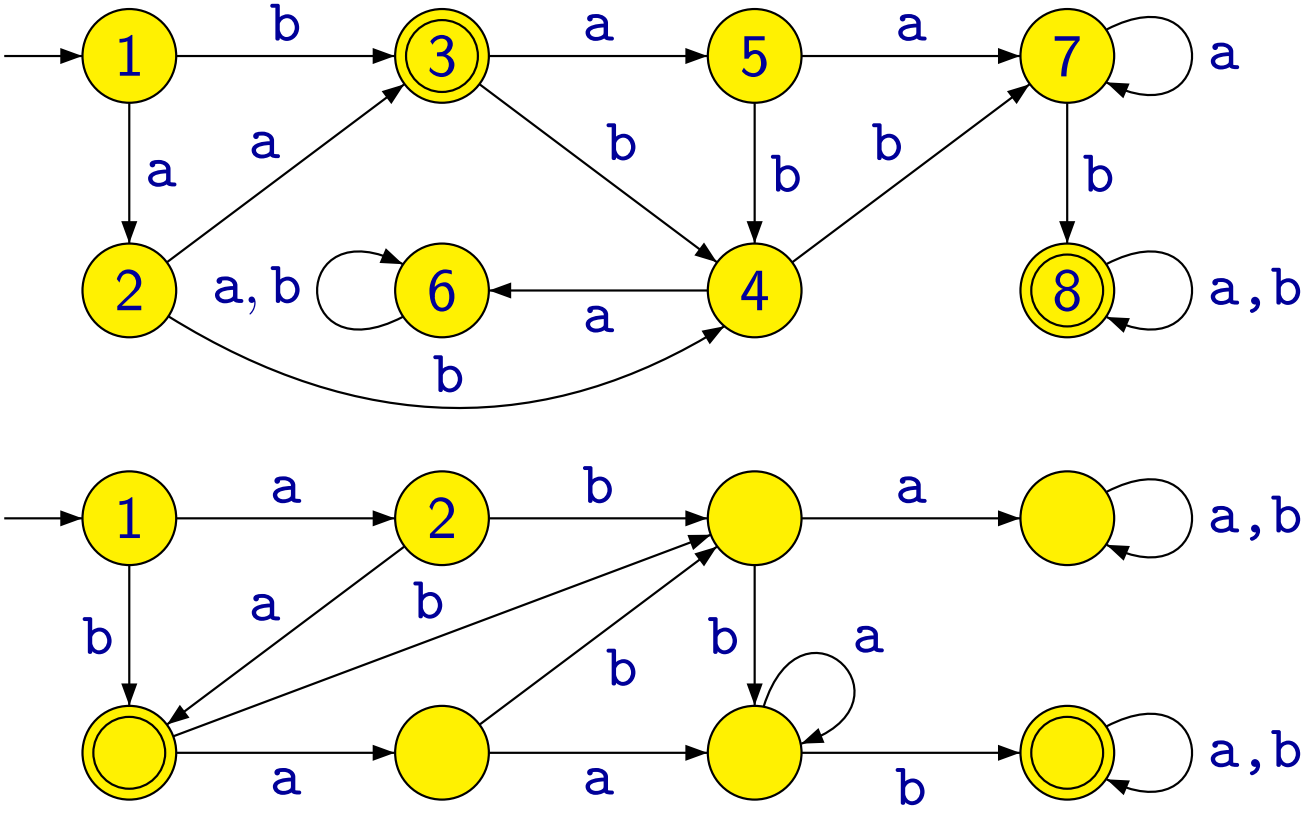
Normovaný tvar automatu



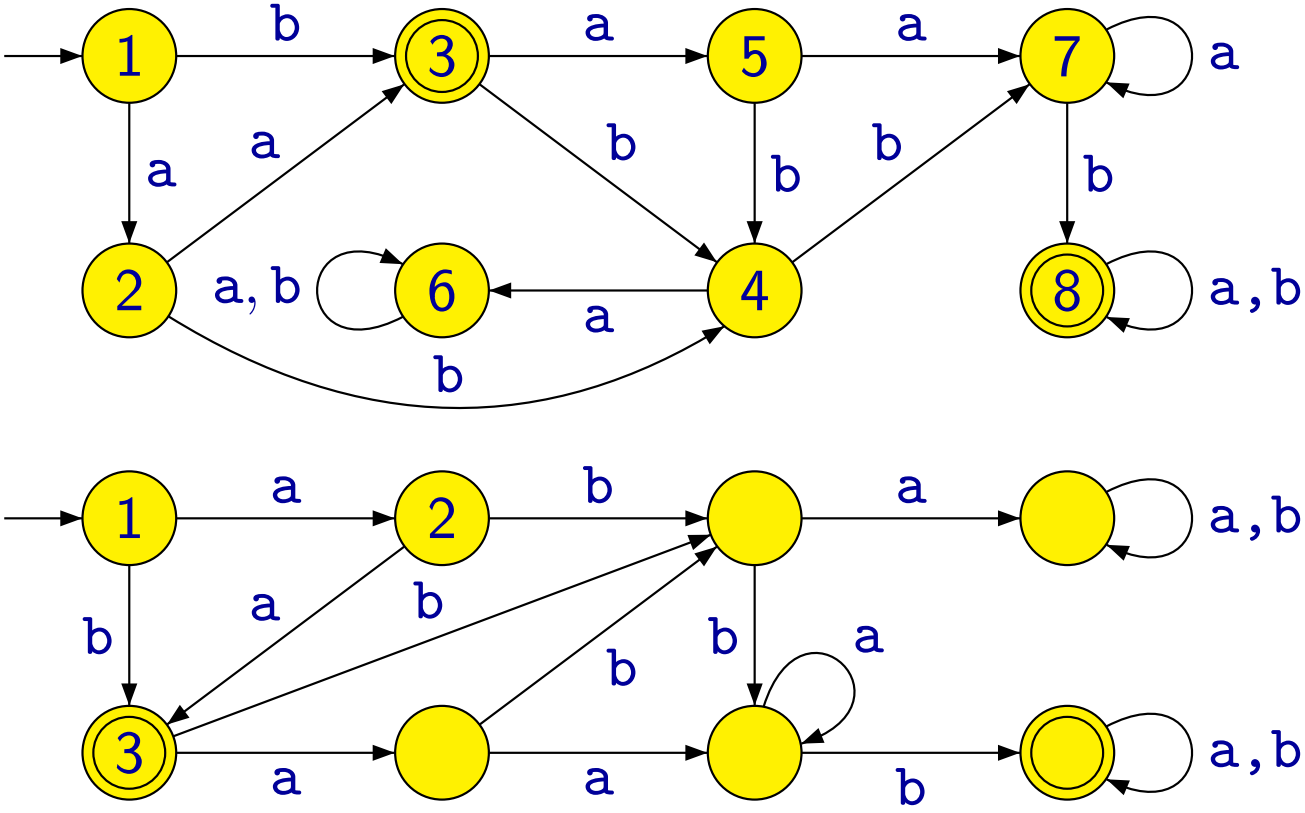
Normovaný tvar automatu



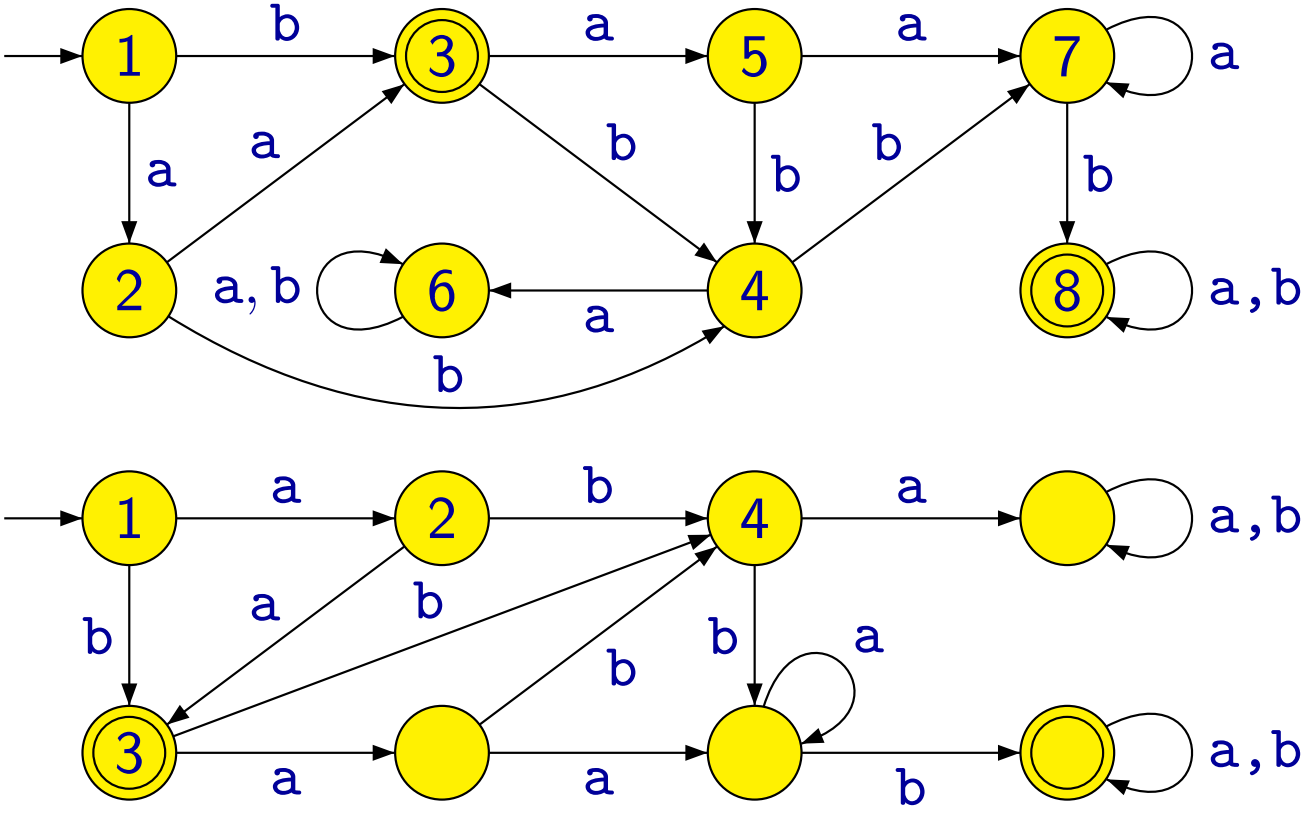
Normovaný tvar automatu



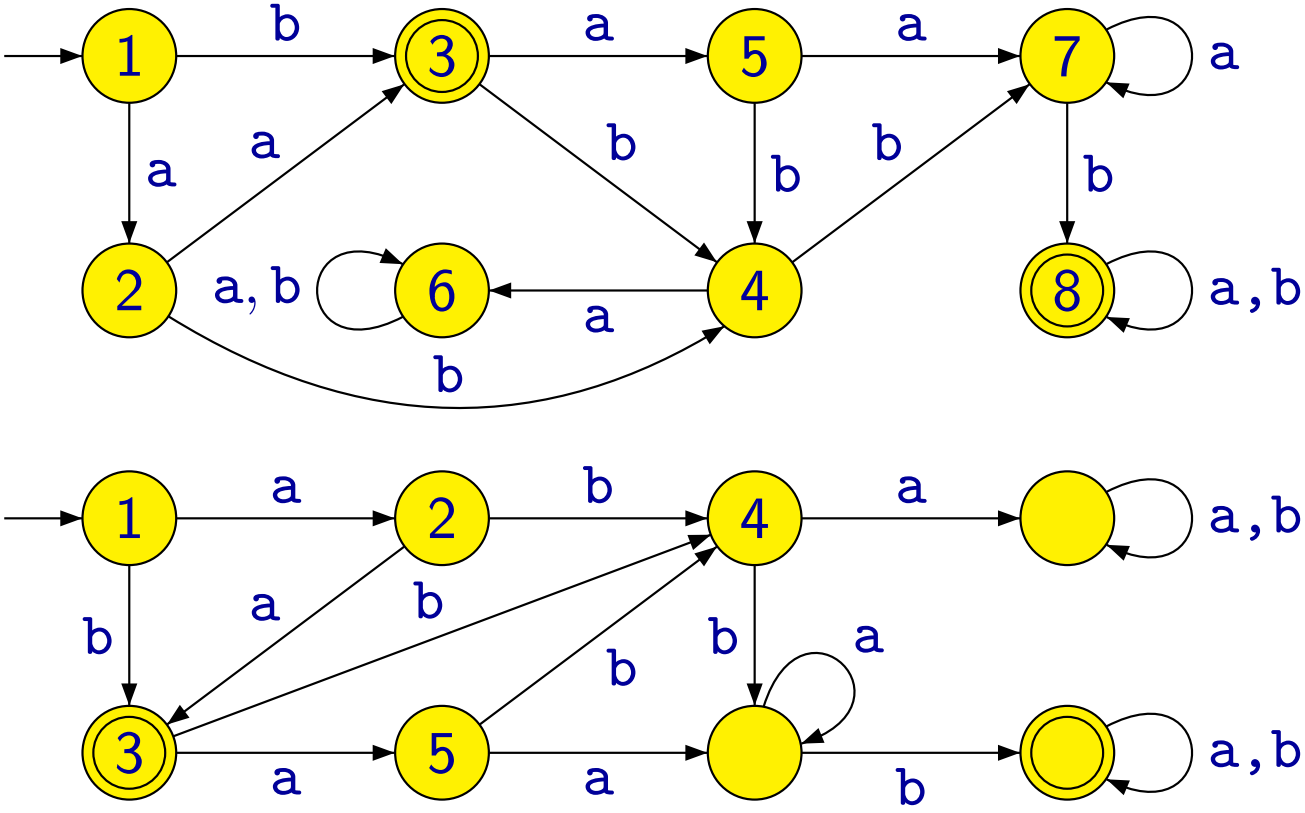
Normovaný tvar automatu



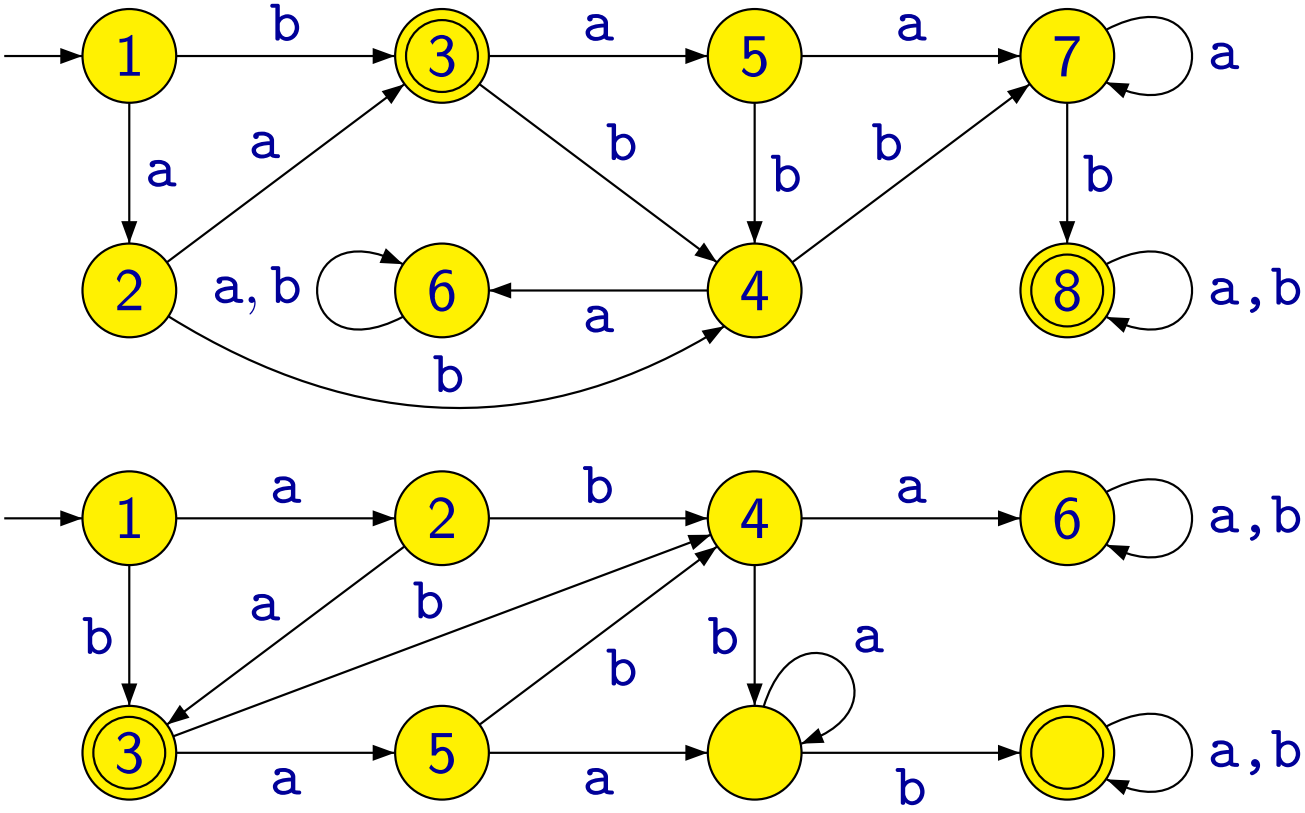
Normovaný tvar automatu



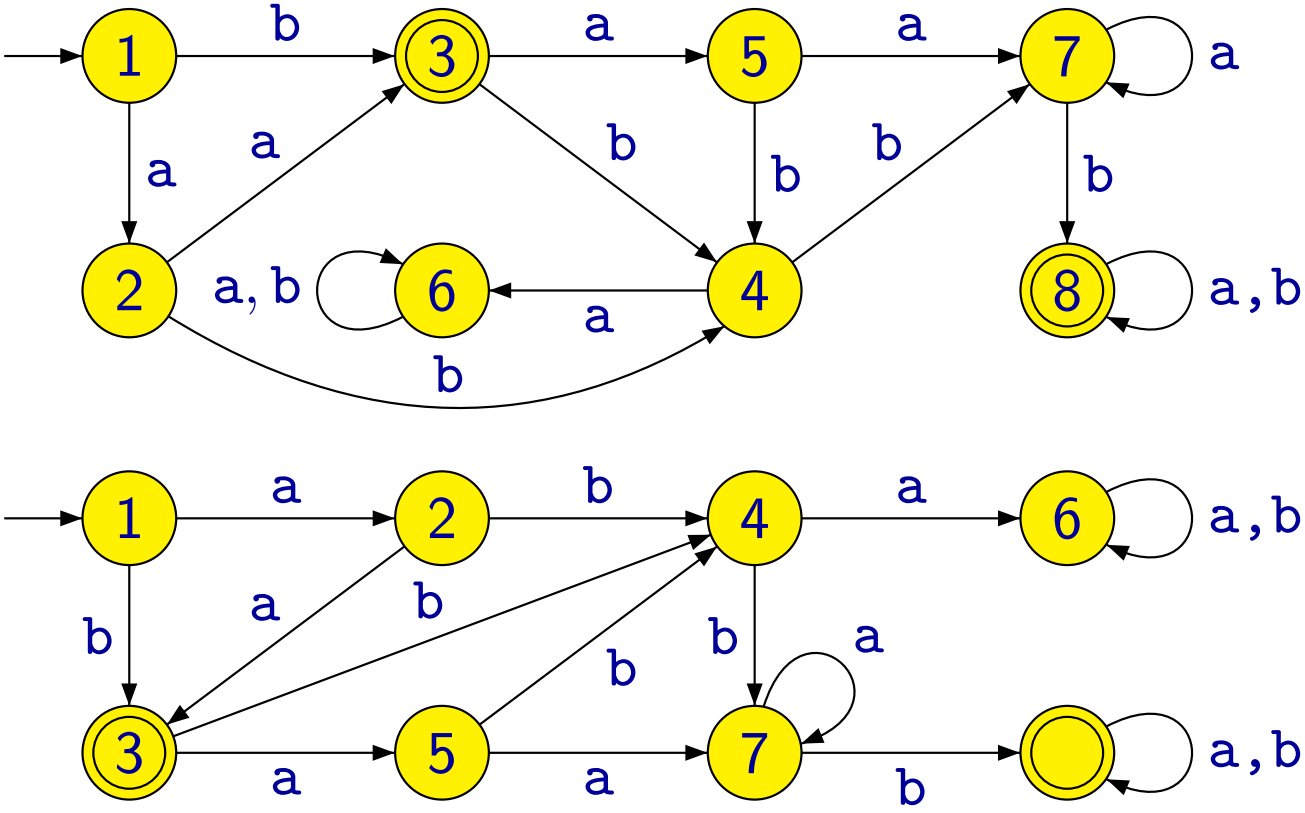
Normovaný tvar automatu



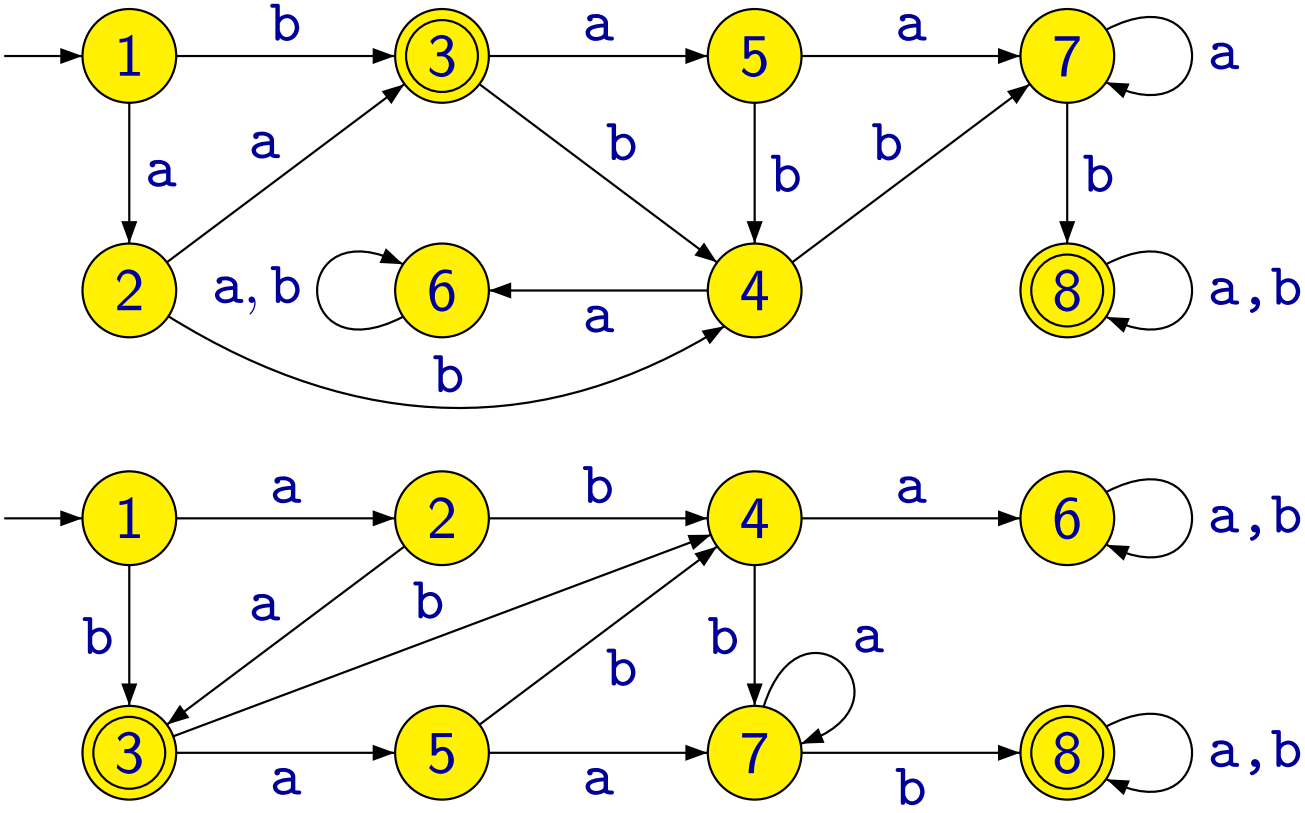
Normovaný tvar automatu



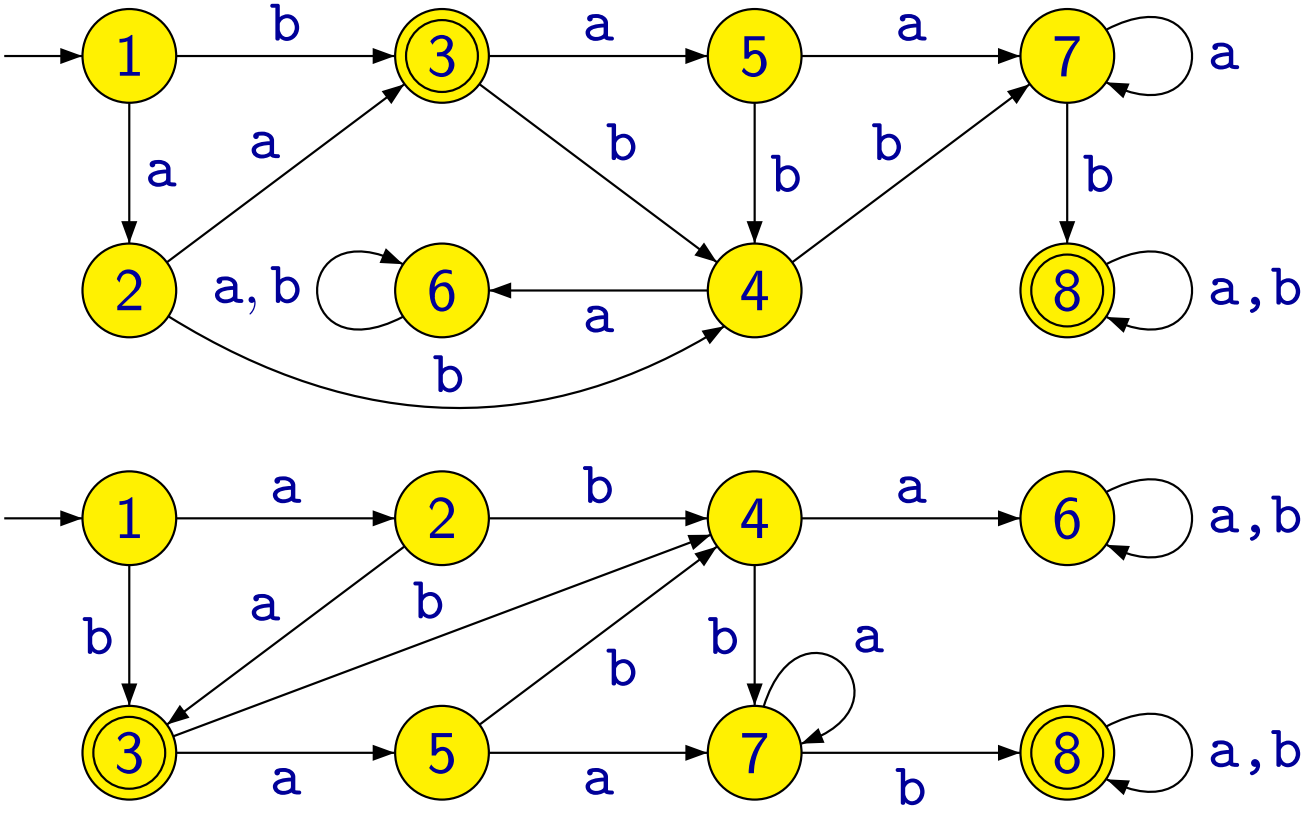
Normovaný tvar automatu



Normovaný tvar automatu

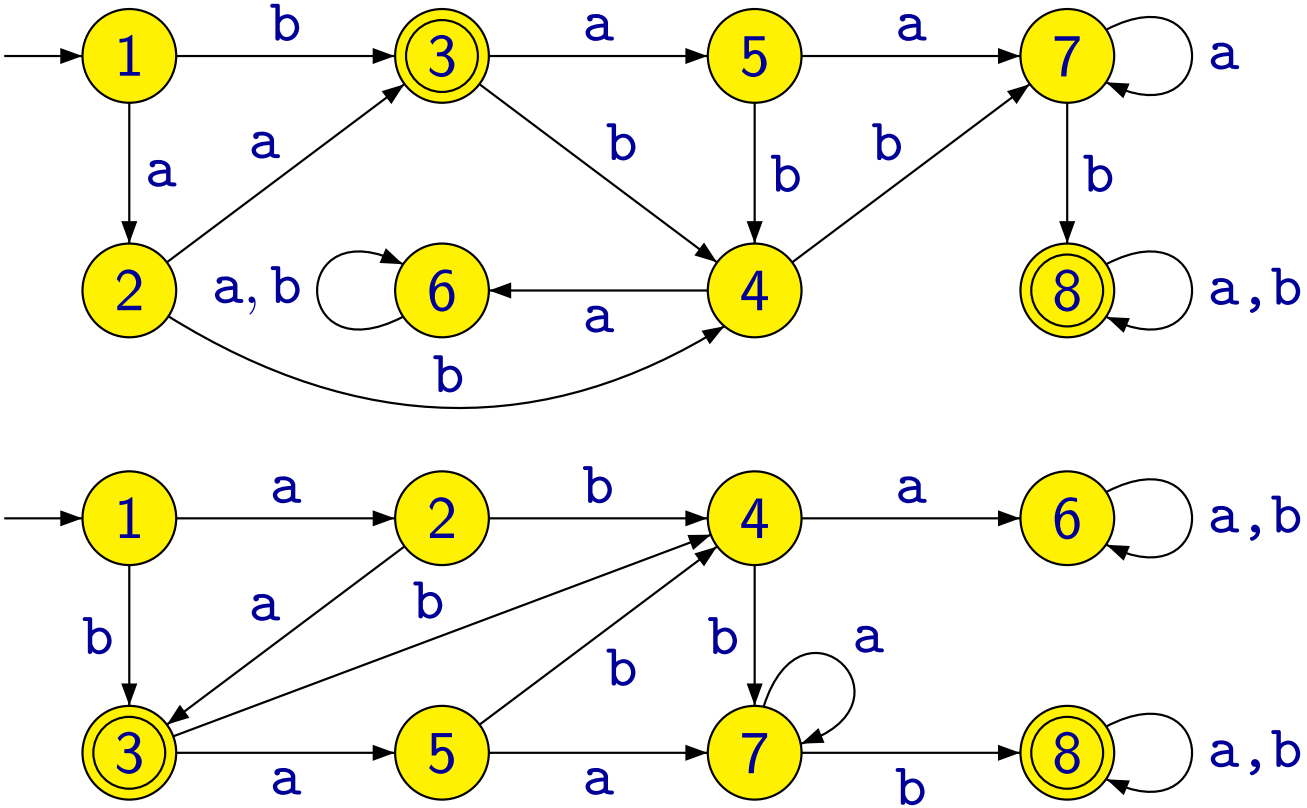


Normovaný tvar automatu



	a	b
$\longrightarrow$ 1	2	3
2	3	4
$\longleftarrow$ 3	5	4
4	6	7
5	7	4
6	6	6
7	7	8
$\longleftarrow$ 8	8	8

Normovaný tvar automatu



	a	b
$\rightarrow 1$	2	3
2	3	4
$\leftarrow 3$	5	4
4	6	7
5	7	4
6	6	6
7	7	8
$\leftarrow 8$	8	8

- Nyní už je přechodová funkce stejná pro oba automaty, stejné jsou i koncové a počáteční stav
- Automaty jsou tedy nejen ekvivalentní, ale dokonce stejné
- Říkáme, že automaty jsou v normovaném tvaru

Normovaný tvar automatu

Definice

Mějme abecedu Σ spolu s úplný ostrým uspořádáním $<$ nad znaky abecedy. Pro slova nad abecedou Σ definujeme úplné ostré uspořádání $<_L$ následovně (pro všechna možná slova $u, v \in \Sigma^*$):

- Pokud $|u| < |v|$, potom $u <_L v$
- Pokud $|u| = |v|$ a u je lexikograficky menší než v, potom $u <_L v$

Normovaný tvar automatu

Definice

Mějme abecedu Σ spolu s úplný ostrým uspořádáním $<$ nad znaky abecedy. Pro slova nad abecedou Σ definujeme úplné ostré uspořádání $<_L$ následovně (pro všechna možná slova $u, v \in \Sigma^*$):

- Pokud $|u| < |v|$, potom $u <_L v$
- Pokud $|u| = |v|$ a u je lexikograficky menší než v, potom $u <_L v$

Příklad: Nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$ uvažujeme běžné uspořádání $a < b$. Potom platí $\varepsilon <_L a <_L b <_L aa <_L bb <_L aba <_L baa <_L aaaa <_L bbbbb$.

Normovaný tvar automatu

Definice

Mějme abecedu Σ spolu s úplný ostrým uspořádáním $<$ nad znaky abecedy. Pro slova nad abecedou Σ definujeme úplné ostré uspořádání $<_L$ následovně (pro všechna možná slova $u, v \in \Sigma^*$):

- Pokud $|u| < |v|$, potom $u <_L v$
- Pokud $|u| = |v|$ a u je lexikograficky menší než v, potom $u <_L v$

Příklad: Nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$ uvažujeme běžné uspořádání $a < b$. Potom platí $\varepsilon <_L a <_L b <_L aa <_L bb <_L aba <_L baa <_L aaaa <_L bbbbb$.

Příklad: Nad abecedou $\Sigma = \{1, 2, 3\}$ uvažujeme běžné uspořádání $1 < 2 < 3$. Potom platí $\varepsilon <_L 1 <_L 3 <_L 31 <_L 33 <_L 111 <_L 321$.

Normovaný tvar automatu

Definice

Mějme abecedu Σ spolu s úplný ostrým uspořádáním $<$ nad znaky abecedy. Pro slova nad abecedou Σ definujeme úplné ostré uspořádání $<_L$ následovně (pro všechna možná slova $u, v \in \Sigma^*$):

- Pokud $|u| < |v|$, potom $u <_L v$
- Pokud $|u| = |v|$ a u je lexikograficky menší než v, potom $u <_L v$

Příklad: Nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$ uvažujeme běžné uspořádání $a < b$. Potom platí $\varepsilon <_L a <_L b <_L aa <_L bb <_L aba <_L baa <_L aaaa <_L bbbbb$.

Příklad: Nad abecedou $\Sigma = \{1, 2, 3\}$ uvažujeme běžné uspořádání $1 < 2 < 3$. Potom platí $\varepsilon <_L 1 <_L 3 <_L 31 <_L 33 <_L 111 <_L 321$.

Příklad: Nad abecedou $\Sigma = \{0, 1, 2\}$ uvažujeme běžné uspořádání $0 < 1 < 2$. Potom platí $\varepsilon <_L 1 <_L 2 <_L 01 <_L 03 <_L 111 <_L 0021$.

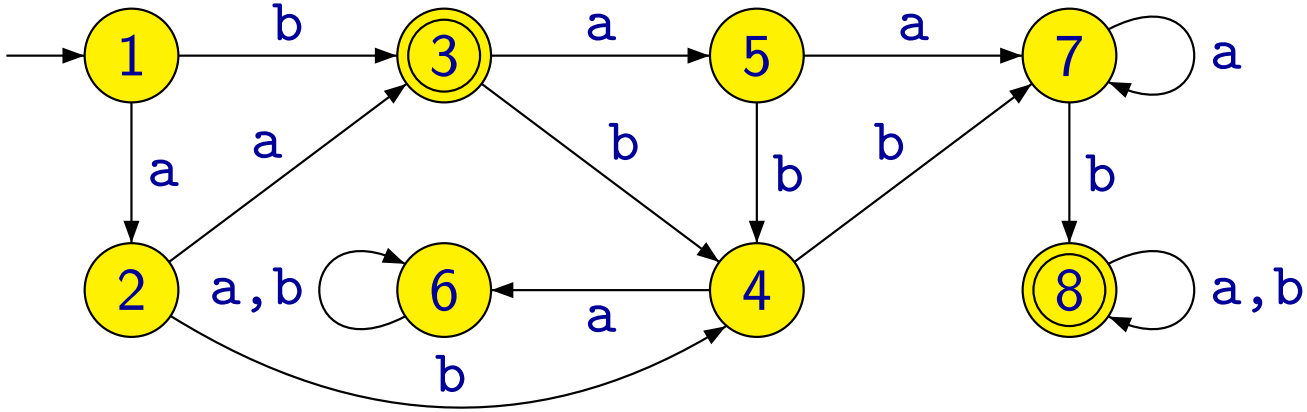
Normovaný tvar automatu

Definice

Mějme deterministický konečný automat $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ bez nedosažitelných stavů a uspořádání prvků abecedy Σ (které indukuje uspořádání $<_L$ na Σ^*).
Označme pro každý stav $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ symbolem u_i nejmenší slovo podle uspořádání $<_L$ takové, že pro něj platí $\delta(1, u_i) = i$.
Potom řekneme, že $\mathcal{A}$ je v normovaném tvaru, pokud

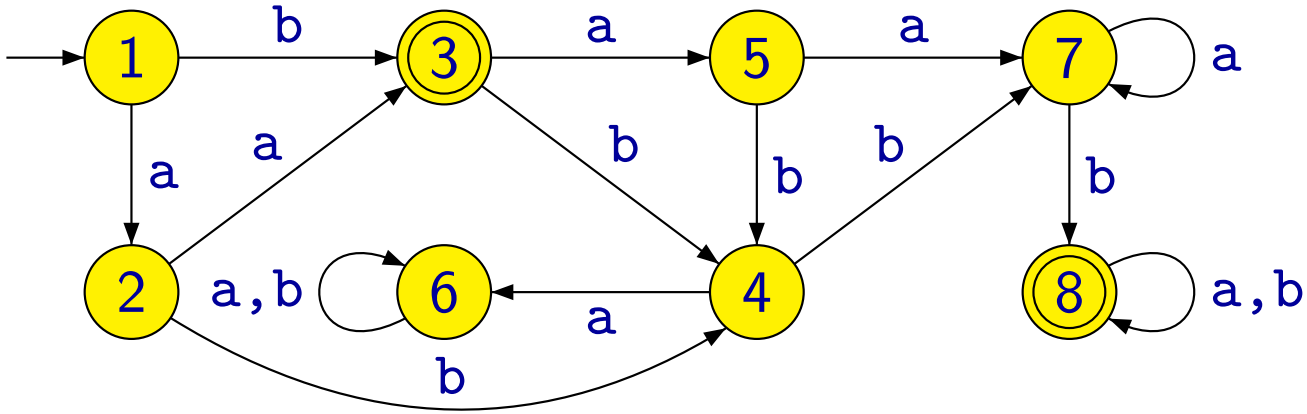
- $Q = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ pro nějaké $n \geq 1$
- 1 je počáteční stav
- Pro každou dvojici stavů $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takovou, že $i < j$, platí $u_i <_L u_j$.

Normovaný tvar automatu



- Do stavu 4 se dostaneme slovy ab, bb, aab, bab tedy $u_4 = ab$
- Do stavu 5 se dostaneme slovy ba, aaa tedy $u_5 = ba$
- $ab <_L ba$ proto jsou stavy $4, 5$ označeny v tomto pořadí

Normovaný tvar automatu



- Do stavu 4 se dostaneme slovy ab, bb, aab, bab tedy $u_4 = ab$
- Do stavu 5 se dostaneme slovy ba, aaa tedy $u_5 = ba$
- $ab <_L ba$ proto jsou stavy $4, 5$ označeny v tomto pořadí
- Pro ostatní stavy jsou nejmenší slova následující:

$$\begin{aligned} u_1 &= \varepsilon & u_5 &= ba \\ u_2 &= a & u_6 &= aba \\ u_3 &= b & u_7 &= abb \\ u_4 &= ab & u_8 &= abbb \end{aligned}$$