

Cvičení 11

Příklad 1: Průměr z daných $n > 1$ čísel spočítáme následující funkcí:

```
PRUMER( $X, n$ )
1   $z \leftarrow 0.0$ 
2  for  $i \leftarrow 1$  to  $n$ 
3      do  $z \leftarrow z + X[i]$ 
4  return  $z/n$ 
```

Určete, kolik tato funkce PRUMER vykoná aritmetických operací v závislosti na n .

Příklad 2: Určete, kolik průchodů vnitřním cyklem provede pro vstup n následující jednoduchý program.

```
ALG1( $n$ )
1  for  $i \leftarrow 1$  to  $n * n$ 
2      do for  $j \leftarrow 1$  to  $i$ 
3          do print “jeden průchod”
```

Je to v asymptotické notaci $\Theta(n^2)$ nebo $\Theta(n^3)$ nebo $\Theta(n^4)$?

Příklad 3: Jednoduchá implementace Euklidova algoritmu největšího společného dělitele dvou přirozených čísel a, b počítá výsledek následovně:

```
EUCLID( $a, b$ )
1  if  $b = 0$ 
2      then return  $a$ 
3  else if  $a > b$ 
4      then return EUCLID( $b, a - b$ )
5  else return EUCLID( $a, b - a$ )
```

Nechť k označuje počet bitů v binárním zápise čísel a, b . Jaká je nejhorší možná časová složitost zadaného algoritmu vzhledem ke k ? (Uvažujte jednotkový čas na každou aritmetickou operaci.)

Příklad 4: Kolik kroků (elementárních výpočetních operací) provede následující efektivní implementace Euklidova algoritmu pro největšího společného dělitele na vstupech – číslech a, b , která mají v binárním zápise nejvýše ℓ bitů? (Předpokládejte, že aritmetické operace trvají jednotkový čas.)

```
EUCLID( $a, b$ )
1  while  $b \neq 0$ 
2      do  $c \leftarrow a \bmod b$ 
3           $a \leftarrow b$ 
4           $b \leftarrow c$ 
5  return  $a$ 
```

Příklad 5: Představme si, že z daných n čísel máme vybrat k -té v uspořádání podle velikosti. (Nejpřirozenějším postupem by bylo čísla setřídít a pak k -té z nich vybrat, ale to je spousta zbytečných výpočtů navíc, že?)

Pro rychlý výpočet použijeme následující rekurzivní algoritmus, svým způsobem podobný algoritmu quicksort.

Rekurzivní procedura $VYBER(A, p, r, k)$ vracející k -tý nejmenší prvek z úseku pole $A[p..r]$ (kde $p \leq k \leq r$) pracuje následovně:

- Z úseku $A[p..r]$ zvolíme libovolný prvek x a tento úsek přeuspořádáme tak, že bude rozdělen na tři části:
 - $A[p..q-1]$ – obsahující prvky, které jsou menší než x ,
 - $A[q..q']$ – obsahující prvky, které jsou rovny x ,
 - $A[q'+1..r]$ – obsahující prvky, které jsou větší než x
- Pokud je $q \leq k \leq q'$, je výsledkem x .
- Pokud $k < q$, výsledek spočítáme rekurzivním výpočtem jako $VYBER(A, p, q-1, k)$.
- Pokud $k > q'$, výsledek spočítáme rekurzivním výpočtem jako $VYBER(A, q'+1, r, k)$.

Jaká je časová složitost popsaného algoritmu?

Příklad 6: Určete, kolik průchodů vnitřním cyklem provede pro vstup n následující jednoduchý program.

```
ALG2(n)
1  for i ← 1 to n
2      do for j ← 1 to i * i
3          do print "jeden průchod"
```

Je to v asymptotické notaci $\Theta(n^2)$ nebo $\Theta(n^3)$ nebo $\Theta(n^4)$?

Příklad 7: Určete, kolik průchodů cyklem provede následující program pro vstup n . Zapište výsledek v asymptotické notaci $\Theta(\cdot)$.

```
ALG3(n)
1  i ← 1
2  while i < n
3      do print "jeden průchod"
4      i ← i + i
```

***Příklad 8:** Určete, kolik průchodů cyklem provede následující program pro vstup n . Zapište výsledek v asymptotické notaci $\Theta(\cdot)$.

```
ALG4( $n$ )
1   $i \leftarrow 1; j \leftarrow 1$ 
2  while  $i < n$ 
3      do print “jeden průchod”
4       $i \leftarrow i + j$ 
5       $j \leftarrow j + 1$ 
```

***Příklad 9:** Jak byste upravili algoritmus v Příkladě 5, aby počítal v (nejhorším) lineárním čase?

Návod: Je potřeba najít vhodný způsob výběru prvku x tak, aby bylo zaručeno, že rozdělení nebude velmi nevyvážené.

Příklad 10: Rozhodněte, které z následujících asymptotických vztahů mezi funkcemi proměnné n jsou platné. (Pozor, platné mohou být oba nebo i žádný.)

- a) $\log n \in O(\sqrt{n})$
- b) $\sqrt{n} \in O(n)$

Příklad 11: Rozhodněte, které z následujících asymptotických vztahů mezi funkcemi proměnné n jsou platné. (Pozor, platné mohou být oba nebo i žádný.)

- a) $2^n \in O(n^n)$
- b) $2^n \in O(n^{1024})$

Příklad 12: Rozhodněte, které z následujících asymptotických vztahů mezi funkcemi proměnné n jsou platné. (Pozor, platné mohou být oba nebo i žádný.)

- a) $n! \in O(2^n)$
- b) $n^{\log n} \in O(n^{1024})$