

## Cvičení 2

1. **Dokažte**, že pro libovolné množiny  $A, B$  platí:
  - a.  $A = B$ , právě když  $A \subseteq B$  a  $B \subseteq A$
  - b.  $A \subseteq (A \cup B)$
  - c.  $(A \cap B) \subseteq A$
  - d. Když  $A = \Phi$  a  $B = \Phi$ , pak  $(A \cup B) = \Phi$ .
  - e. Jestliže  $A = \Phi$ , pak  $(A \cap B) = \Phi$  pro libovolnou množinu  $B$
  - f.  $((A \cup B) \setminus C) \subseteq (A \cup (B \setminus C))$
  - g.  $(A \setminus (B \cap C)) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$  de Morganovy zákony
  - h.  $(A \setminus (B \cup C)) = ((A \setminus B) \cap (A \setminus C))$  de Morganovy zákony
  
2. **Rozhodněte**, zda platí:
  - a.  $a \in \{\{a\}, \{a, \{a\}\}\}$
  - b.  $\{a, \{a\}\} \cap P(\{a, \{a\}\}) = \Phi$
  - c.  $\{\Phi\} \in \{\{\Phi\}\}$
  - d.  $\bigcap A_i = \Phi$ , kde  $A_i$  je prvkem  $P(A)$ , neboli  $A_i \in 2^A$ .
  
3. **Rozhodněte**, zda platí:
  - a. Množina lidí žijících v Evropě nebo Asii a ne na Urale je podmnožinou lidí žijících v Evropě nebo v Asii.
  - b. Všichni obyvatelé České republiky žijí na Moravě nebo v Čechách nebo ve Slezsku.
  - c. Někteří obyvatelé Moravy žijí ve Slezsku.
  - d. Všichni lidé žijící v Evropě a Asii patří do množiny lidí žijících v Asii nebo v Evropě.
  
4. **Převeďte** následující věty do PL1 a ověřte jejich ekvivalenci pomocí de Morganových zákonů (V případě, že se mluví o číslech, tak uvažujeme univerzum čísla):
  - a. Všechna prvočísla větší než 2 jsou lichá.  
Je-li prvočíslo větší než 2, pak je liché.  
Neexistuje prvočíslo větší než 2, které by nebylo liché.  
Není-li číslo liché, pak to není prvočíslo větší než 2.
  
  - b. Marie má ráda pouze vítěze.  
Pokud má Marie někoho ráda, pak je to vítěz.  
Neexistuje nikdo takový, že by ho Marie měla ráda a nebyl to vítěz.  
Kdo není vítěz, toho Marie nemá ráda.
  
  - c. Některá prvočísla nejsou lichá.  
Není pravda, že všechna prvočísla jsou lichá.  
  
Někteří studenti nejsou líní.  
Ne všichni studenti jsou líní.

- d. Žádné prvočíslo není sudé.  
Je-li číslo sudé, pak to není prvočíslo.  
Neexistuje sudé prvočíslo.

Žádný učený z nebe nespádl.  
Kdo spádl z nebe, není učený.  
Neexistuje učený spádlý z nebe.

- e. Některá čísla jsou menší než jejich druhá mocnina.  
Není pravda, že žádné číslo není menší než jeho druhá mocnina.

Někteří mají rádi svou matku.  
Není pravda, že nikdo nemá rád svou matku.

- f. Neexistuje největší přirozené číslo.  
Neexistuje  $x$  takové, že je větší nebo rovno než všechna  $y$ .  
Ke každému číslu  $x$  existuje číslo  $y$  takové, že je-li  $x$  přirozené, pak není větší nebo rovno  $y$ .

5. Najděte **modely** formulí:

a.  $\forall x[(P(x) \wedge Q(x, a)) \supset R(x)]$

b.  $\forall x[P(a, x) \supset Q(x)]$

c.  $\exists x[P(x) \wedge \neg Q(x)]$

d.  $\forall x[P(x) \supset \neg Q(x)]$

e.  $\exists x[P(x) \wedge Q(x)]$

f.  $\exists x[P(x, f(x))]$

g.  $\forall x \exists y[P(x) \supset \neg R(x, y)]$