Cvičení 3

Příklad 1: Nakreslete graf, u něhož hrany reprezentují relaci, která je:

- reflexivní,
- symetrická a
- tranzitivní.

Uveďte netriviální příklad na množině $A = \{a, b, c, d, e\}$.

Příklad 2: Nakreslete graf, u něhož hrany reprezentují relaci, která je:

- ireflexivní,
- asymetrická a
- tranzitivní.

Uveďte netriviální příklad na množině $A = \{a, b, c, d, e\}$.

Příklad 3: Pomocí formulí PL1 specifikujte následující množiny. Nalezněte jejich interpretace, které budou modelem.

1. $D = (S \cap P)$
2. $(S \cup L) \subseteq Z$
3. $(N \cap (S \cap P)) \neq \emptyset$
4. $(N - S) \subseteq (L \cup N)$

Příklad 4: Pomocí formulí PL1 specifikujte následující množiny. Nalezněte jejich interpretace, které budou modelem.

1. $N = (Z - K)$
2. $((S \cup L) \cap Z) \subseteq N$
3. $(N \cap (Z \cap P)) \neq \emptyset$
4. $S \subseteq ((Z - L) \cup N)$

Cvičení 4

Příklad 5: Proveďte co nejjemnější analýzu následujících vět, poté znegujte a negovaná tvrzení převeďte opět do přirozeného jazyka:

1. Nutnou podmínkou toho, aby kdokoliv něco viděl, je, aby měl oči, a postačující podmínkou, aby to vidět chtěl.
2. Karel nikdy nikomu nepůjčuje Astora tehdy a jen tehdy, když ho má rád.
3. Postačující podmínkou toho, aby hodnota funkce $x + 2$ pro přirozená čísla bylo sudé číslo, je neliché x.

Nápověda: *vidět* a *chtít vidět* berte jako dva odlišné predikáty.

Příklad 6: Proveďte co nejjemnější analýzu následujících vět, poté znegujte a negovaná tvrzení převeďte opět do přirozeného jazyka:

1. Nutnou podmínkou toho, aby trojúhelník byl pravoúhlý je, že platí $c = \sqrt[2]{a^2 + b^2}$.
2. Pouze ten, kdo má svého potomka, je rodič.
3. Pro každého lezce platí, že není-li v nebezpečí, pak jej někdo jistí.

Příklad 7: Proveďte co nejjemnější analýzu následujících vět, poté znegujte a negovaná tvrzení převeďte opět do přirozeného jazyka:

1. Pouze Adam a Eva jsou lidé, pro něž neplatí, že mají matku.
2. Každé zvíře je býložravec jen tehdy když neloví žádné zvíře.
3. Prvek x není největším prvkem, jestliže existuje prvek, který je větší než x.

Příklad 8: Proveďte co nejjemnější analýzu následujících vět, poté znegujte a negovaná tvrzení převeďte opět do přirozeného jazyka:

1. Každý člověk má matku a pouze když je jedináčkem, tak nemá sourozence.
2. Jestliže je některý prvek menší než všechny prvky, pak je tento prvek nejmenším prvkem.
3. Zvíře je predátor tehdy a jen tehdy když loví všechna zvířata.

Cvičení 5

Příklad 9: Převeďte následující věty do formulí PL1 a ověřte jejich ekvivalenci pomocí de Morganových zákonů:

1. Všechna prvočísla větší než 2 jsou lichá.
2. Je-li prvočíslo větší než 2, pak je liché.
3. Neexistuje prvočíslo větší než 2, které by nebylo liché.
4. Není-li číslo liché, pak to není prvočíslo větší než 2.

Příklad 10: Převeďte následující věty do formulí PL1 a ověřte jejich ekvivalenci pomocí de Morganových zákonů:

1. Marie má ráda pouze vítěze.
2. Pokud má Marie někoho ráda, pak je to vítěz.
3. Neexistuje nikdo takový, že by ho Marie měla ráda a nebyl to vítěz.
4. Kdo není vítěz, toho Marie nemá ráda.

Příklad 11: Převeďte následující věty do formulí PL1 a ověřte jejich ekvivalenci pomocí de Morganových zákonů:

1. Některá prvočísla nejsou lichá.
2. Není pravda, že všechna prvočísla jsou lichá.
3. Někteří studenti nejsou líní.
4. Ne všichni studenti jsou líní.

Příklad 12: Převeďte následující věty do formulí PL1 a ověřte jejich ekvivalenci pomocí de Morganových zákonů:

1. Některá čísla jsou menší než jejich druhá mocnina.
2. Není pravda, že žádné číslo není menší než jeho druhá mocnina.
3. Neexistuje x takové, že je větší nebo rovno než všechna y.
4. Ke každému číslu x existuje číslo y takové, že je-li x přirozené, pak není větší.

Cvičení 6

Příklad 13: Sémanticky (množinově) ověřte platnost následujících úsudků:

1. Všechny skleněné hory jsou hory.
Všechny skleněné hory jsou ze skla.
Některé hory jsou ze skla.
2. Nikdo s červeným nosem nemůže být premiér.
Všichni Valaši mají červené nosy.
Proto žádný Valach nemůže být premiérem.
3. Všechny přírodní zákony jsou zákony.
Všechny zákony jsou vytvářeny právními institucemi.
Všechny přírodní zákony jsou vytvářeny právními institucemi.

Příklad 14: Sémanticky (množinově) ověřte platnost následujících úsudků:

1. Všichni jezevci jsou sběratelé umění.
Někteří sběratelé umění žijí v norách.
Proto někteří jezevci žijí v norách.
2. Všechna auta jsou dopravní prostředky.
Všechna auta mají volant.
Některé dopravní prostředky mají volant.
3. Někteří fotbalisté nejsou inteligentní.
Všichni fotbalisté jsou sportovci.
Někteří sportovci nejsou inteligentní.

Příklad 15: Ověřte platnost následujících úsudků pomocí rezoluční metody:

1. Kdo zná Marii i Jiřího, ten Marii lituje.
Někteří nelitují Marii, ačkoliv ji znají.
Někdo zná Marii, ale ne Jiřího.
2. Všichni členové vedení jsou majiteli obligací nebo akcionáři.
Žádný člen vedení není zároveň majitel obligací i akcionář.
Všichni majitelé obligací jsou členy vedení.
Žádný majitel obligací není akcionář.

Příklad 16: Ověřte platnost následujících úsudků pomocí rezoluční metody:

1. Všechny muchomůrky zelené jsou jedovaté.
Tato tužka je muchomůrka zelená.
Tato tužka je jedovatá.

2. Každý, kdo má rád Jiřího, bude spolupracovat s Milanem.
   Milan nekamarádí s nikým, kdo kamarádí s Láďou.
   Petr bude spolupracovat pouze s kamarády Karla.
   ___
   Jestliže Karel kamarádí s Láďou, nemá Petr rád Jiřího.

Cvičení 7

Příklad 17: Uvažujme jazyky nad abecedou $\{a, b\}$:

- $L_1 = \{\varepsilon, a, b, ab, aa, aab, aaa\}$
- $L_2 = \{b, ba, baa\}$

Vypište všechna slova z jazyků:

a) $L_1 \cup L_2$

b) $L_1 \cap L_2$

c) $L_1 \cdot L_2$

d) $L_2 \cdot L_1$

e) $(L_2)^3$

f) $L_1 - L_2$

Příklad 18: Uvažujme jazyky:

- $L_1 = \{w \in \{a, b\} \mid |w|_a = |w|_b\}$
- $L_2 = \{z \in \{a, b\} \mid |z|_b \leq |z|_a\}$

Vypište prvních 10 slov z jazyků (pokud jich jazyk obsahuje méně, tak všechna):

a) $L_1 \cup L_2$

b) $L_1 \cap L_2$

c) $L_1 \cdot L_2$

d) $L_2 \cdot L_1$

e) $L_2 - L_1$

f) $L_1 - L_2$

Příklad 19: Uvažujme jazyky:

- $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid |w|_0 \bmod 2 = 0\}$
- $L_2 = \{w \in \{0,1,2\}^* \mid |w| > 0\}$

Formální definicí charakterizujte následující jazyky:

a) $L_1 - L_2$

b) $L_2 - L_1$

c) L_1^*

d) L_2^*

e) $L_1 \cap L_2$

f) $L_1 \cdot L_2$

Pozn.: Pro konečné množiny může být formální definicí i výčet prvků. Jinak se tím myslí podobný zápis, jakým jsou definovány jazyky L_1 a L_2.

Příklad 20: Uvažujme jazyky:

- $L_1 = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a \leq |w|_b\}$
- $L_2 = \{w \in \{a,b,c\}^* \mid |w|_b \leq |w|_a\}$

Formální definicí charakterizujte následující jazyky:

a) $L_1 - L_2$

b) $L_2 - L_1$

c) L_1^*

d) $L_1 \cap L_2$

e) $L_1 \cup L_2$

f) $L_1 \cap \{c\}^*$

Pozn.: Pro konečné množiny může být formální definicí i výčet prvků. Jinak se tím myslí podobný zápis, jakým jsou definovány jazyky L_1 a L_2.

Příklad 21:

a) Automat M je formálně definován jako $(\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}, \{\mathtt{u}, \mathtt{d}\}, \delta, q_3, \{q_3\})$, kde funkce δ je dána následující tabulkou. Nakreslete stavový diagram tohoto automatu.

	u	d
q_1	q_1	q_2
q_2	q_1	q_3
q_3	q_2	q_4
q_4	q_3	q_5
q_5	q_4	q_5

b) Uveďte stavové diagramy deterministických konečných automatů, které rozpoznávají následující jazyky. V obou případech je abeceda $\{0, 1\}$:

- $\{w \mid w$ začíná znakem 1 a končí znakem 0$\}$.
- $\{w \mid w$ obsahuje alespoň tři znaky 1$\}$.

Cvičení 8

Příklad 22: Uveďte stavové diagramy deterministických konečných automatů, které rozpoznávají následující jazyky. Ve všech případech je abeceda $\{0, 1\}$.

a) $\{w \mid w$ obsahuje podslovo 0101, tj. $w = x0101y$ pro nějaká x a $y\}$.

b) $\{w \mid w$ má délku alespoň 3 a jeho třetí symbol je 0$\}$.

c) $\{w \mid w$ začíná symbolem 0 a jeho délka je lichá, nebo začíná symbolem 1 a jeho délka je sudá$\}$.

d) $\{w \mid w$ neobsahuje podslovo 110$\}$.

Příklad 23: Uveďte stavové diagramy deterministických konečných automatů, které rozpoznávají následující jazyky. Ve všech případech je abeceda $\{0, 1\}$.

a) $\{w \mid$ délka slova w je nejvýše 5$\}$.

b) $\{w \mid w$ je libovolné slovo, kromě 11 a 111$\}$.

c) $\{w \mid$ na všech lichých pozicích slova w se vyskytuje symbol 1$\}$.

d) $\{w \mid w$ obsahuje nejméně dva symboly 0 a nejvýše jeden symbol 1$\}$.

Příklad 24: Uveďte stavové diagramy deterministických konečných automatů, které rozpoznávají následující jazyky. Ve všech případech je abeceda $\{0, 1\}$.

a) $\{0, \varepsilon\}$.

b) $\{w \mid w$ obsahuje sudý počet symbolů 0 nebo právě dva symboly 1$\}$.

c) Prázdná množina.

d) Všechna slova kromě prázdného slova.

Příklad 25: Pro každý z následujících jazyků navrhněte nedeterministický konečný automat s daným počtem stavů. (Ve všech případech je abeceda $\{0, 1\}$.)

a) Pro jazyk $\{w \mid w$ končí $\texttt{00}\}$ se třemi stavy.

b) Pro jazyk $\{w \mid w$ obsahuje podslovo $\texttt{0101}$, tj. $w = x\texttt{0101}y$ pro nějaká x a $y\}$ s pěti stavy.

c) Pro jazyk $\{w \mid w$ obsahuje sudý počet symbolů $\texttt{0}$ nebo právě dva symboly $\texttt{1}\}$ se šesti stavy.

Příklad 26: Pro každý z následujících jazyků navrhněte nedeterministický konečný automat s daným počtem stavů. (Ve všech případech je abeceda $\{\texttt{0}, \texttt{1}\}$.)

a) Pro jazyk $\{0\}$ se dvěma stavy.

b) Pro jazyk $\{\texttt{0}^i\texttt{1}^j\texttt{0}^k \mid i, j \geq 0,\ k \geq 1\}$ se třemi stavy.

c) Pro jazyk $\{\varepsilon\}$ s jedním stavem.

d) Pro jazyk $\{\texttt{0}^i \mid i \geq 0\}$ s jedním stavem.

Příklad 27: Sestrojte nedeterministické konečné automaty rozpoznávající sjednocení následujících jazyků (abeceda je ve všech případech $\{\texttt{0}, \texttt{1}\}$):

a) Jazyka $L_1 = \{w \mid w$ začíná znakem $\texttt{1}$ a končí znakem $\texttt{0}\}$
a jazyka $L_2 = \{w \mid w$ obsahuje alespoň tři znaky $\texttt{1}\}$.

b) Jazyka $L_3 = \{w \mid w$ obsahuje podslovo $\texttt{0101}$, tj. $w = x\texttt{0101}y$ pro nějaká x a $y\}$
a jazyka $L_4 = \{w \mid w$ neobsahuje podslovo $\texttt{110}\}$.

Cvičení 9

Příklad 28: Pokud u deterministického konečného automatu rozpoznávajícího nějaký jazyk L prohodíme přijímající a nepřijímající stavy, dostaneme deterministický konečný automat přijímající doplněk jazyka L.

Jestliže prohodíme přijímající a nepřijímající stavy u nedeterministického automatu rozpoznávajícího jazyk L, můžeme ale nemusíme dostat nedeterministický automat, který rozpoznává doplněk jazyka L.

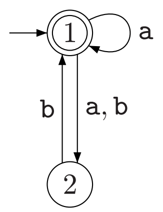
a) Ukažte konkrétní příklad nedeterministického automatu, kde automat, který z něj vznikne prohozením přijímajících a nepřijímajících stavů, rozpoznává doplněk jazyka rozpoznávaného původním automatem.

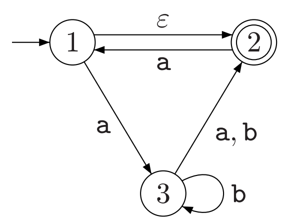
b) Ukažte konkrétní příklad nedeterministického automatu, kde automat, který z něj vznikne prohozením přijímajících a nepřijímajících stavů, rozpoznává jiný jazyk než doplněk jazyka rozpoznávaného původním automatem.

c) Ukažte obecný postup, jak k danému nedeterministickému automatu rozpoznávajícímu nějaký jazyk L sestrojit nedeterministický automat rozpoznávající doplněk jazyka L.

Všechny vaše odpovědi zdůvodněte.

Příklad 29: Zkonstruujte k oběma následujícím nedeterministickým automatům ekvivalentní deterministické konečné automaty.





Příklad 30: Definujme následující jazyk nad abecedou $\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^*$:

$$D = \{w \mid w \text{ obsahuje stejný počet výskytů podslov } \mathtt{01} \text{ a } \mathtt{10}\}\,.$$

Například slovo 101 patří do D, protože 101 obsahuje jednou 01 a jednou 10, ale například slovo 1010 nepatří do D, protože 1010 obsahuje dvakrát 10, ale jen jednou 01.

Ukažte, že D je regulární jazyk.

Příklad 31: Sestrojte zobecněné nedeterministické konečné automaty rozpoznávající zřetězení následujících jazyků (abeceda je ve všech případech $\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$):

a) Jazyka $L_1 = \{w \mid \text{délka slova } w \text{ je nejvýše } 5\}$
a jazyka $L_2 = \{w \mid \text{na všech lichých pozicích slova } w \text{ se vyskytuje symbol } \mathtt{1}\}$.

b) Jazyka $L_3 = \{w \mid w \text{ obsahuje alespoň tři znaky } \mathtt{1}\}$ a jazyka $L_4 = \emptyset$.

Příklad 32: Sestrojte zobecněné nedeterministické konečné automaty rozpoznávající iterace následujících jazyků (abeceda je ve všech případech $\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$):

a) Jazyka $L_1 = \{w \mid w \text{ obsahuje alespoň tři znaky } \mathtt{1}\}$.

b) Jazyka $L_2 = \{w \mid w \text{ obsahuje nejméně dva symboly } \mathtt{0} \text{ a nejvýše jeden symbol } \mathtt{1}\}$.

c) Jazyka $L_3 = \emptyset$.

Příklad 33: Uveďte regulární výrazy generující následující jazyky. Ve všech případech je abeceda $\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$.

a) $\{w \mid w \text{ začíná znakem } \mathtt{1} \text{ a končí znakem } \mathtt{0}\}$.

b) $\{w \mid w$ obsahuje alespoň tři znaky $\mathtt{1}\}$.

c) $\{w \mid w$ obsahuje podslovo $\mathtt{0101}$, tj. $w = x\mathtt{0101}y$ pro nějaká x a $y\}$.

d) $\{w \mid w$ má délku alespoň 3 a jeho třetí symbol je $\mathtt{0}\}$.

e) $\{w \mid w$ začíná symbolem $\mathtt{0}$ a jeho délka je lichá, nebo začíná symbolem $\mathtt{1}$ a jeho délka je sudá$\}$.

f) $\{w \mid w$ neobsahuje podslovo $\mathtt{110}\}$.

g) $\{w \mid$ délka slova w je nejvýše $5\}$.

Příklad 34: Uveďte regulární výrazy generující následující jazyky. Ve všech případech je abeceda $\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$.

a) $\{w \mid w$ je libovolné slovo, kromě $\mathtt{11}$ a $\mathtt{111}\}$.

b) $\{w \mid$ na všech lichých pozicích slova w se vyskytuje symbol $\mathtt{1}\}$.

c) $\{w \mid w$ obsahuje nejméně dva symboly $\mathtt{0}$ a nejvýše jeden symbol $\mathtt{1}\}$.

d) $\{0, \varepsilon\}$.

e) $\{w \mid w$ obsahuje sudý počet symbolů $\mathtt{0}$ nebo právě dva symboly $\mathtt{1}\}$.

f) Prázdná množina.

g) Všechna slova kromě prázdného slova.

Příklad 35: Ke každému z následujících regulárních výrazů sestrojte odpovídající zobecněný nedeterministický konečný automat:

a) $(0+1)^*000(0+1)^*$

b) $((00)^*11+01)^*$

c) $\emptyset^*$

Příklad 36: Pro každý z následujících jazyků uveďte alespoň dvě slova, která do něj patří, a alespoň dvě slova, která do něj nepatří. Ve všech případech předpokládejte, že se jedná o jazyky nad abecedou $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$.

a) $\mathtt{a}^*\mathtt{b}^*$

b) $\mathtt{a}(\mathtt{ba})^*b$

c) $\mathtt{a}^* + \mathtt{b}^*$

d) $(\mathtt{aaa})^*$

e) $\Sigma^*\mathtt{a}\Sigma^*\mathtt{b}\Sigma^*\mathtt{a}\Sigma^*$

f) $\mathtt{aba} + \mathtt{bab}$

g) $(\varepsilon + \mathtt{a})\mathtt{b}$

h) $(\mathtt{a} + \mathtt{ba} + \mathtt{bb})\Sigma^*$

Cvičení 10

Příklad 37: Mějme následující gramatiku:

$$\begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E\mathtt{+}T \mid T \\ T & \longrightarrow & T\mathtt{*}F \mid F \\ F & \longrightarrow & \mathtt{(}E\mathtt{)} \mid \mathtt{a} \end{array}$$

Uveďte derivační strom a derivaci pro každé z následujících slov:

a) `a`

b) `a+a`

c) `a+a+a`

d) `((a))`

Příklad 38: Odpovězte na následující otázky týkající se následující bezkontextové gramatiky G:

$$\begin{array}{rcl} R & \longrightarrow & XRX \mid S \\ S & \longrightarrow & \mathtt{a}T\mathtt{b} \mid \mathtt{b}T\mathtt{a} \\ T & \longrightarrow & XTX \mid X \mid \varepsilon \\ X & \longrightarrow & \mathtt{a} \mid \mathtt{b} \end{array}$$

a) Co jsou množiny terminálů a neterminálů gramatiky G?

b) Uveďte příklad tří slov, která patří do $L(G)$.

c) Uveďte příklad tří slov, která nepatří do $L(G)$.

d) Platí nebo neplatí $T \Rightarrow \mathtt{aba}$?

e) Platí nebo neplatí $T \Rightarrow^* \mathtt{aba}$?

f) Platí nebo neplatí $T \Rightarrow T$?

g) Platí nebo neplatí $T \Rightarrow^* T$?

h) Platí nebo neplatí $XXX \Rightarrow^* \texttt{aba}$?

i) Platí nebo neplatí $X \Rightarrow^* \texttt{aba}$?

j) Platí nebo neplatí $T \Rightarrow^* XX$?

k) Platí nebo neplatí $T \Rightarrow^* XXX$?

l) Platí nebo neplatí $S \Rightarrow^* \varepsilon$?

m) Popište slovně jazyk $L(G)$.

Příklad 39: Uveďte bezkontextovou gramatiku pro každý z následujících jazyků. Ve všech případech je abeceda $\Sigma = \{\texttt{0}, \texttt{1}\}$.

a) $\{w \mid w$ obsahuje alespoň tři symboly $\texttt{1}\}$

b) $\{w \mid w$ začíná i končí stejným symbolem$\}$

c) $\{w \mid$ délka w je lichá$\}$

d) $\{w \mid$ délka w je lichá a prostřední symbol je $\texttt{0}\}$

e) $\{w \mid w = w^R\}$

f) prázdný jazyk

Příklad 40: Uveďte bezkontextovou gramatiku, která generuje následující jazyk:

$$A = \{\texttt{a}^i\texttt{b}^j\texttt{c}^k \mid i, j, k \geq 0 \text{ a } i = j \text{ nebo } j = k\}\,.$$

Je vaše gramatika jednoznačná? Uveďte proč ano nebo proč ne.

Příklad 41: Předpokládejme, že máme dánu nějakou bezkontextovou gramatiku G, jejíž každé pravidlo je jednoho ze dvou následujících typů:

- Na pravé straně jsou dva neterminály (a žádné terminály), například $X \longrightarrow YZ$.
- Na pravé straně je pouze jeden terminál, například $X \longrightarrow \texttt{a}$.

(*Poznámka:* O takové gramatice říkáme, že je v Chomského normální formě.)

Ukažte, že pro libovolné slovo $w \in L(G)$ délky n, kde $n \geq 1$, platí, že jakákoliv derivace tohoto slova v gramatice G má právě $2n - 1$ kroků.

Cvičení 11

Příklad 42: Ukažte, že následující problém je rozhodnutelný:

VSTUP: Deterministický konečný automat A a regulární výraz γ.

OTÁZKA: Jsou A a γ ekvivalentní, tj. platí $L(A) = [\gamma]$?

Příklad 43: Ukažte, že následující problém je rozhodnutelný:

VSTUP: Zobecněný nedeterministický konečný automat A přijímající slova nad abecedou Σ.

OTÁZKA: Platí $L(A) = \Sigma^*$?

Příklad 44: Ukažte, že následující problém je rozhodnutelný:

VSTUP: Regulární výrazy α a β.

OTÁZKA: Platí $[\alpha] \cap [\beta] \neq \emptyset$?

Příklad 45: Popište detailně činnost Turingova stroje, který by rozpoznával následující jazyk:

$$L = \{\mathtt{a}^n \mathtt{b}^{2n} \mathtt{c}^{3n} \mid n \geq 1\}$$

Příklad 46: Popište detailně činnost Turingova stroj řešícího následující problém:

VSTUP: Slovo tvaru x+y, kde $x, y \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^*$.

VÝSTUP: Slovo $z \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^*$ reprezentující v binárním zápise součet hodnot x a y, pokud se na ně díváme jako na binární čísla.

Cvičení 12

Příklad 47: Ukažte, že existuje polynomiální algoritmus řešící následující problém:

VSTUP: Deterministický konečný automat A přijímající slova nad abecedou Σ.

OTÁZKA: Platí $L(A) = \Sigma^*$?

Příklad 48: Ukažte, že existuje polynomiální algoritmus řešící následující problém:

VSTUP: Deterministický konečný automat A.

Otázka: Je jazyk $L(A)$ nekonečný?

Příklad 49: Ukažte, že následující problém je rozhodnutelný v polynomiálním čase:

Vstup: Orientovaný graf G.

Otázka: Je graf G silně souvislý?

Poznámka: Graf G je silně souvislý, jestliže pro libovolné dva jeho vrcholy u a v platí, že existuje (orientovaná) cesta z u do v i z v do u.

Příklad 50: Určete, které z následujících vztahů platí a které ne:

a) $2n \in O(n)$

b) $n^2 \in O(n)$

c) $n^2 \in O(n \log^2 n)$

d) $n \log n \in O(n^2)$

e) $3^n \in 2^{O(n)}$

f) $2^{2^n} \in O(2^{2^n})$

Příklad 51: Nechť $f(n)$ a $g(n)$ jsou funkce z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{R}^+$, kde $\mathbb{R}^+$ označuje množinu nezáporných reálných čísel. Dokažte nebo vyvraťte následující tvrzení:

a) Z $f(n) \in O(g(n))$ plyne $g(n) \in O(f(n))$.

b) $f(n) + g(n) \in \Theta(\min(f(n), g(n)))$.

c) Z $f(n) \in O(g(n))$ plyne $2^{f(n)} \in O(2^{g(n)})$.