# Přednáška 3: rozhodování o platnosti úsudku

Marie Duží
marie.duzi@vsb.cz

# Úsudky

- Úsudek je platný, jestliže ***nutně, za všech okolností, tj. při všech interpretacích,*** ve kterých jsou pravdivé předpoklady, je pravdivý i závěr: $P_1,\ldots,P_n \models Z$

  $\mathbf{P_1,\ldots,P_n \models Z}$ právě tehdy, když

- Tvrzení tvaru (formule tvaru) $P_1$ a ... a $P_n$ implikuje $Z$ je vždy pravdivé (tautologie):

  $$\models (P_1 \wedge \ldots \wedge P_n) \supset Z$$

# Úsudky

$P_1,\ldots,P_n \models Z$ právě tehdy, když

$\models (P_1 \wedge \ldots \wedge P_n) \supset Z$

- POZOR!!!
- To neznamená, že je či musí být závěr či některá premisa pravdivá. Jde o ***platné úsudkové schéma***, ***nutný vztah*** mezi předpoklady a závěrem.

# Úsudky

Žádné prvočíslo není dělitelné 3
9 je dělitelné 3
-----------------------------------------
$\Rightarrow$ 9 není prvočíslo

- Je platný úsudek, i když první premisa je nepravdivá. Jiná interpretace:

Všichni lidé jsou rozumní
Kámen není rozumný
----------------------------------
$\Rightarrow$ Kámen není člověk

# Úsudky

- Nebo, dosazením:
  Je-li 12 prvočíslo, pak není dělitelné 3
  12 je dělitelné 3
  $\Rightarrow$ 12 není prvočíslo
- Nebo:
  12 není prvočíslo nebo není dělitelné 3
  12 je dělitelné 3
  $\Rightarrow$ 12 není prvočíslo

***Platná úsudková schémata (logické formy), např.***:

- $A \supset B, A \models B$ *modus ponens*
- $A \supset \neg B, B \models \neg A$, *modus ponens + transpozice*
- $A \supset B, \neg B \models \neg A$ *modus ponens + transpozice*
- $\neg A \vee \neg B, B \models \neg A$ *eliminace disjunkce*

# Úsudky

- Tedy, dokážeme-li, že závěr logicky vyplývá z předpokladů, ***nedokážeme tím, že závěr je pravdivý***
- Je pravdivý ***za předpokladu pravdivosti premis***
- Úsudek, jehož premisy jsou pravdivé se anglicky nazývá ***sound.*** (Těžko přeložit, snad spolehlivý, přesvědčivý).
- ***Ale:*** pravdivost či nepravdivost premis může být náhodná záležitost, kdežto vztah vyplývání mezi premisami a závěrem je ***nutný vztah („za všech okolností ...“).***
- Stejně jako je ***tautologie logicky, tedy nutně pravdivá formule.***
- Má-li tvar implikace, zůstává (dle definice implikace) pravdivá, i když antecedent implikace je nepravdivý.

# *Logické vyplývání*

- Formule A ***logicky vyplývá*** *z množiny formulí M,* značíme *M* |= A, jestliže A je pravdivá v každém modelu množiny *M.*
- Poznámka: ***Okolnosti*** *(definice 1) jsou zde mapovány jako* ***modely,*** *tj. interpretace jednotlivých (mimologických) symbolů*
- ***Co je to model?***

***A) Výroková logika: ohodnocení*** *(Pravda - 1, Nepravda - 0)* ***elementárních výroků p, q, …,*** *při kterém nabývá* ***celá formule hodnoty Pravda*** *(1).*

***B) Predikátová logika: interpretace*** *predikátových (P, Q, …) a funkčních symbolů (f, g, …), ve které nabývá* ***celá formule hodnoty Pravda****;*
*P → relaci R nad universem U (tj.* $R \subseteq U \times \ldots \times U$*),*
*f → funkci F nad universem U (tj.* $F: U \times \ldots \times U \rightarrow U$*).*

# *Logické vyplývání*

- *Jak tedy ověříme, zda úsudek je platný?*

1. *Sémantické metody*
2. *Syntaktické metody*

*Ad 1: Snažíme se ověřit, že pravdivost premis zaručuje pravdivost závěru*

*Ad 2: Pomocí pravidel manipulujeme s formulemi jakožto s posloupnostmi symbolů (abstrahujeme přitom od jejich významu). Pravidla však musí být korektní, tj. zachovávat pravdivost.*

*V obou případech můžeme použít přímý důkaz, nebo nepřímý důkaz sporem.*

*Nyní se budeme věnovat sémantickým metodám.*

# *Logické vyplývání ve výrokové logice*

- Je doma (d) nebo šel na pivo (p)
- Je-li doma (d), pak nás očekává (o)
- $\Rightarrow$ Jestliže nás neočekává, pak šel na pivo p.

$d, p, o \mid d \vee p,\ d \supset o \models \neg o \supset p$

| | d | p | o | $d \vee p$ | $d \supset o$ | $\neg o \supset p$ | *přímý Dk.:* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\rightarrow$ | **1** | **1** | **1** | **1** | **1** | **1** | **závěr je** |
| | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | |
| $\rightarrow$ | **1** | **0** | **1** | **1** | **1** | **1** | **pravdivý** |
| | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | |
| $\rightarrow$ | **0** | **1** | **1** | **1** | **1** | **1** | **ve všech čtyřech** |
| $\rightarrow$ | **0** | **1** | **0** | **1** | **1** | **1** | **modelech** |
| | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | předpokladů |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | |

**Úsudek je platný.**

# Příklady: *Logické vyplývání* ve VL

- Je doma (d) nebo šel na pivo (p)
- Je-li doma (d), pak nás očekává (o)
- $\Rightarrow$ Jestliže nás neočekává, pak šel na pivo p.

**$d \vee p,\ d \supset o \models \neg o \supset p$**

**Tabulka má *2ⁿ* řádků!** Proto ***důkaz sporem:***

- Předpokládejme, že úsudek ***není správný.*** Pak tedy mohou být všechny předpoklady pravdivé a závěr nepravdivý: $d \vee p,\ d \supset o \models \neg o \supset p$

```
                1       1               0
                                     1 0    0
              1    0   1    0
                        0
spor
```

# *(Výrokově) logické vyplývání*

- Všechny úsudky se ***stejnou logickou formou*** jako platný úsudek jsou platné:

  $d \lor p,\ d \supset o \models \neg o \supset p$

Za proměnné d, p, o můžeme dosadit kterýkoli elementární výrok:

Hraje na housle nebo se učí.

Jestliže hraje na housle, pak hraje jako Kubelík.

Tedy $\Rightarrow$ Jestliže nehraje jako Kubelík, pak se učí.

*Platný úsudek – stejná logická forma*

# *(Výrokově) logické vyplývání*

- Jestliže platí, že je správný úsudek:

  $P_1,\dots,P_n \models Z$,

  pak platí, že je tautologie formule tvaru implikace:
- $\models (P_1 \wedge \dots \wedge P_n) \supset Z$.
- ***Důkaz, že formule je tautologie, nebo že závěr Z logicky vyplývá z předpokladů :***
  - Přímý důkaz – např. pravdivostní tabulkou
  - Nepřímý důkaz, sporem: k důkazu $P_1,\dots,P_n \models Z$ pak stačí ukázat, že nemůže nastat případ, kdy všechny $P_1,\dots,P_n$ jsou pravdivé a $Z$ je nepravdivý: tedy že $P_1 \wedge \dots \wedge P_n \wedge \neg Z$ je kontradikce, čili množina $\{P_1, \dots, P_n, \neg Z\}$ je sporná (nekonzistentní, *nemá model*).

# Důkaz tautologie ve VL

**$\models ((p \supset q) \land \neg q) \supset \neg p$**

*Sporem*:

$((p \supset q) \land \neg q) \land p$ negovaná f. musí být kontradikce

1 1 pokus, zda může být 1

1 1

1 1 0

spor

Při žádném ohodnocení není negovaná formule pravdivá, tedy původní formule je tautologie

# Nejdůležitější tautologie VL

Tautologie s 1 výrokovým symbolem:

$\models\ p \equiv p$

$\models\ p \vee \neg p$ zákon vyloučeného třetího

$\models\ \neg(p \wedge \neg p)$ zákon sporu

$\models\ p \equiv \neg\neg p$ zákon dvojí negace

# Algebraické zákony pro konjunkci, disjunkci a ekvivalenci

- $\models (p \vee q) \equiv (q \vee p)$ komutativní zákon pro $\vee$
- $\models (p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$ komutativní zákon pro $\wedge$
- $\models (p \equiv q) \equiv (q \equiv p)$ komutativní zákon pro $\equiv$

- $\models [(p \vee q) \vee r] \equiv [p \vee (q \vee r)]$ asociativní zákon pro $\vee$
- $\models [(p \wedge q) \wedge r] \equiv [p \wedge (q \wedge r)]$ asociativní zákon pro $\wedge$
- $\models [(p \equiv q) \equiv r] \equiv [p \equiv (q \equiv r)]$ asociativní zákon pro $\equiv$

- $\models [(p \vee q) \wedge r] \equiv [(p \wedge r) \vee (q \wedge r)]$ distributivní zákon pro $\wedge$, $\vee$
- $\models [(p \wedge q) \vee r] \equiv [(p \vee r) \wedge (q \vee r)]$ distributivní zákon pro $\vee$, $\wedge$

# Zákony pro implikaci

| | |
|---|---|
| $\models\ p \supset (q \supset p)$ | zákon simplifikace |
| $\models\ (p \wedge \neg p) \supset q$ | zákon Dunse Scota |
| $\boldsymbol{\models\ (p \supset q) \equiv (\neg q \supset \neg p)}$ | **zákon kontrapozice** |
| $\boldsymbol{\models\ (p \supset (q \supset r)) \equiv ((p \wedge q) \supset r)}$ | **spojování předpokladů** |
| $\models\ (p \supset (q \supset r)) \equiv (q \supset (p \supset r))$ | na pořadí předpokladů nezáleží |
| $\models\ (p \supset q) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset r))$ | hypotetický sylogismus |
| $\models\ ((p \supset q) \wedge (q \supset r)) \supset (p \supset r)$ | tranzitivita implikace |
| $\models\ (p \supset (q \supset r)) \equiv ((p \supset q) \supset (p \supset r))$ | Fregův zákon |
| $\models\ (\neg p \supset p) \supset p$ | reductio ad absurdum |
| $\models\ ((p \supset q) \wedge (p \supset \neg q)) \supset \neg p$ | reductio ad absurdum |

$\models\ (p \wedge q) \supset p\ ,\ \ \models (p \wedge q) \supset q$

$\models\ p \supset (p \vee q)\ ,\ \ \models q \supset (p \vee q)$

# Zákony pro převody

$\models\ (p \equiv q) \equiv (p \supset q) \wedge (q \supset p)$

$\models\ (p \equiv q) \equiv (p \wedge q) \vee (\neg q \wedge \neg p)$

$\models\ (p \equiv q) \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$

$\models\ \mathbf{(p \supset q) \equiv (\neg p \vee q)}$

$\models\ \mathbf{\neg(p \supset q) \equiv (p \wedge \neg q)}$ **Negace implikace**

$\models\ \mathbf{\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)}$ De Morgan zákony

$\models\ \mathbf{\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)}$ De Morgan zákony

Tyto zákony jsou také návodem jak ***negovat***

# *Negace implikace*

Není pravda, že budu-li hodný, dostanu lyže.

$\neg(p \supset q)$

Byl jsem hodný a (stejně) jsem lyže nedostal.

*(nesplněný slib)* $p \wedge \neg q$

*Státní zástupce:*

Pokud je obžalovaný vinen, pak měl společníka

*Obhájce:*

To není pravda !

Pomohl obhájce obžalovanému, co vlastně řekl?

*(Je vinen a udělal to sám!)*

# Negace implikace

Věty v budoucnosti:

Jestliže to ukradneš, tak tě zabiju! **$(p \supset q)$**

*To není pravda*: Ukradnu to a (stejně) mě nezabiješ. **$p \land \neg q$**

Ale:

Bude-li zítra 3. světová válka, pak zahyne více jak 5 miliard lidí.

*To není pravda*: Bude zítra 3.sv. válka a zahyne méně než 5 miliard lidí ???

To jsme asi nechtěli říct, že určitě bude válka:

Zamlčená modalita: ***Nutně,*** Bude-li zítra 3. světová válka, pak zahyne více jak 5 miliard lidí.

*To není pravda*: ***Možná, že*** Bude zítra 3.sv. válka, ale zahynulo by méně než 5 miliard lidí

*Modální logiky – nejsou náplní tohoto kursu.*

# Ještě úsudky

- Převod z přirozeného jazyka nemusí být jednoznačný:

*Jestliže má člověk vysoký tlak a špatně se mu dýchá nebo má zvýšenou teplotu, pak je nemocen.*

p – ”X má vysoký tlak”

q – ”X se špatně dýchá”

r – ”X má zvýšenou teplotu”

s – ”X je nemocen”

1. možná analýza: $[(p \wedge q) \vee r] \supset s$
2. možná analýza: $[p \wedge (q \vee r)] \supset s$

# *Ještě úsudky*

*Jestliže má Karel vysoký tlak a špatně se mu dýchá nebo má zvýšenou teplotu, pak je nemocen.*

*Karel není nemocen, ale špatně se mu dýchá*

$\Rightarrow$ **Co z toho plyne?**

Musíme rozlišit 1. čtení a 2. čtení, protože nejsou ekvivalentní, závěry budou různé.

# *Analýza 1. čtení*

1. analýza: $[(p \wedge q) \vee r] \supset s, \neg s, q \Rightarrow$ ???

   a) Úvahou a úpravami:

   $[(p \wedge q) \vee r] \supset s, \neg s \Rightarrow \neg [(p \wedge q) \vee r] \Leftrightarrow$ (de
   transpozice Morgan)

   $(\neg p \vee \neg q) \wedge \neg r \Rightarrow (\neg p \vee \neg q), \neg r$, ale platí $q \Rightarrow$
   $\neg p, \neg r$ (důsledky)

   Tedy $\Rightarrow$ *Karel nemá vysoký tlak a nemá vysokou teplotu.*

# *Analýza 2. čtení*

2. analýza: $[p \wedge (q \vee r)] \supset s, \neg s, q \Rightarrow$ ???

   a) Úvahou a ekvivalentními úpravami:

   $[p \wedge (q \vee r)] \supset s, \neg s \Rightarrow \neg [p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow$

   transpozice de Morgan:

   $\neg p \vee (\neg q \wedge \neg r) \Rightarrow$ ale platí $q \Rightarrow$ druhý disjunkt nemůže být pravdivý $\Rightarrow$ je pravdivý první:

   $\neg p$ (důsledek)

   Tedy $\Rightarrow$ *Karel nemá vysoký tlak*

   (o jeho teplotě r nemůžeme nic usoudit)

# Důkaz obou případů

1. analýza: $[(p \wedge q) \vee r] \supset s, \neg s, q \models \neg p, \neg r$
2. analýza: $[p \wedge (q \vee r)] \supset s, \neg s, q \models \neg p$ D.ú.

a) 1. případ - tabulkou D.ú.

b) Sporem: k předpokladům přidáme negovaný závěr $\neg(\neg p \wedge \neg r) \Leftrightarrow (p \vee r)$ a předpokládáme, že vše 1

- $[(p \wedge q) \vee r] \supset s$, $\neg s$, $q$, $\mathbf{p \vee r}$
- 1 1 0 1 1
- 0 0
- 0 0
- 0 1

$\mathbf{p \vee r = 0} \longrightarrow$ **spor**

# *Shrnutí*

- Typické úlohy:
  - Ověření *platnosti úsudku*
  - *Co vyplývá* z daných předpokladů?
  - Doplňte chybějící předpoklady
  - Je daná formule *tautologie, kontradikce, splnitelná?*
  - Najděte *modely* formule, najděte *model množiny* formulí
- Umíme zatím řešit:
  - Tabulkovou metodou
  - Úvahou a ekvivalentními úpravami
  - Sporem, nepřímým důkazem

# Sémantické ověření platnosti úsudku v predikátové logice 1. řádu

- Úsudek je platný, pokud je závěr pravdivý ve všech modelech předpokladů.
- Ale, formule PL1 má *nekonečně mnoho* modelů!
- Přesto můžeme na základě „logického tvaru“ modelů předpokladů (tedy množinových úvah) ověřit, zda zaručují pravdivost závěru.

# Splnitelnost a pravdivost v interpretaci

Formule A($x$) s volnou proměnnou $x$

- Je-li A($x$) v I pravdivá, pak je $|=_I \forall x\, A(x)$
- Je-li A($x$) v I splněna, pak je $|=_I \exists x\, A(x)$.

Formule $P(x) \wedge Q(x)$, $P(x) \vee Q(x)$
s volnou proměnnou $x$ definují průnik a sjednocení oborů pravdivosti $P^U$, $Q^U$. Pro libovolné P, Q, $P^U$, $Q^U$ a interpretaci I tedy platí:

$|=_I \forall x\, [P(x) \supset Q(x)]$ **iff** $P^U \subseteq Q^U$

$|=_I \exists x\, [P(x) \wedge Q(x)]$ **iff** $P^U \cap Q^U \neq \Phi$

$|=_I \forall x\, [P(x) \vee Q(x)]$ **iff** $P^U \cup Q^U = U$

$|=_I \exists x\, [P(x) \vee Q(x)]$ **iff** $P^U \cup Q^U \neq \Phi$

# Sémantické ověření platnosti úsudku

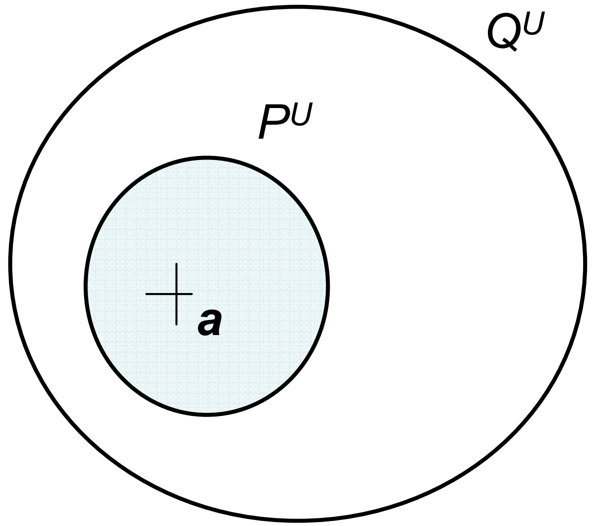
- Příklad:
  - Všechny opice (P) mají rády banány (Q)
  - Judy ($a$) je opice
  - $\Rightarrow$ Judy má ráda banány

$\forall x\, [P(x) \supset Q(x)]$

$P(a)$

--------------------

$Q(a)$



# Relace a vztahy

- Výroky s jedno-argumentovým predikátem (charakterizujícím nějakou vlastnost) zkoumal již ve starověku Aristoteles.
- Teprve **Gottlob Frege** (zakladatel moderní logiky) však zavedl formální predikátovou logiku (s poněkud jiným jazykem, než používáme dnes) s více-argumentovými predikáty (charakterizujícími vztahy) a kvantifikátory.

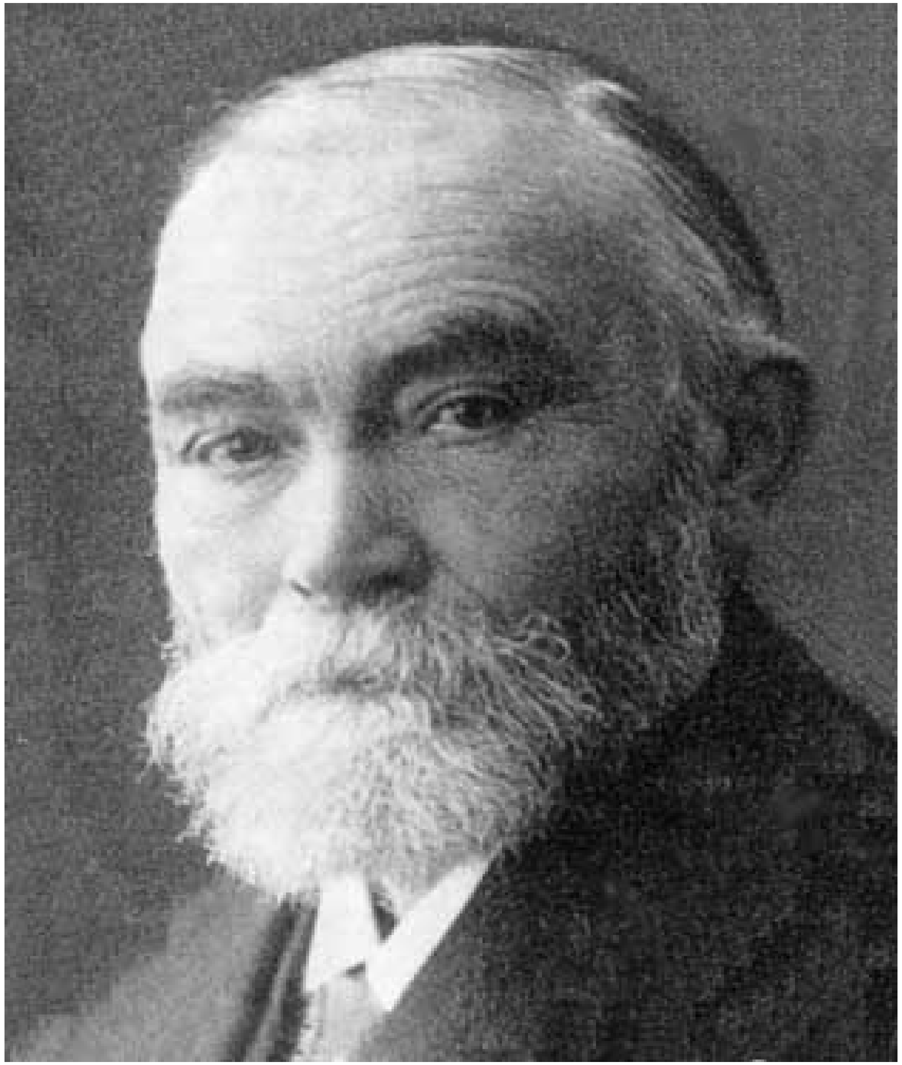
# Gottlob Frege

1848 – 1925

Německý matematik, logik a filosof, působil na

universitě v Jeně.

Zakladatel moderní logiky



# Sémantické ověření platnosti úsudku

- *Marie má ráda pouze vítěze*
- *Karel je vítěz*
- **------------------------------------------** ***neplatný***
- $\Rightarrow$ *Marie má ráda Karla*

  $\forall x\, [R(m,x) \supset V(x)],\ V(k) \Rightarrow R(m,k)$ ?

- $R^U \subset U \times U$: {… <Marie, $i_1$>, <Marie, $i_2$>, …, <Marie, $i_n$> …}
- $V^U \subset U$: {…$i_1$, $i_2$, …, Karel,…, $i_n$…}

Dvojice <Marie, Karel> *nemusí* být prvkem $R^U$, pravdivost předpokladů to nezaručuje.

Být vítězem je zde pouze *nutná podmínka* pro to, aby (vybíravá) Marie měla někoho ráda, ale *není dostatečná.*

# Sémantické ověření platnosti úsudku

- *Marie má ráda pouze vítěze*
- *Karel není vítěz*
- ***--------------------------------------*** ***platný***
- $\Rightarrow$ *Marie nemá ráda Karla*

$\forall x\, [R(m,x) \supset V(x)], \neg V(k) \Rightarrow \neg R(m,k)$ ?

- $R^U \subset U \times U$:
  {…<Marie, $i_1$>, <Marie, $i_2$>, <Marie, Karel>, …, <Marie, $i_n$> …}
- $V^U \subset U$: {…$i_1$, $i_2$, …, ~~Karel,~~ Karel,…, $i_n$…}

Kdyby byla dvojice <Marie, Karel> prvkem $R^U$, pak by musel být (dle první premisy) Karel prvkem $V^U$,

ale to není možné dle druhé premisy.

Pravdivost předpokladů *zaručuje* pravdivost závěru.

# Sémantické ověření správnosti úsudku

Kdo zná Marii a Karla, ten Marii lituje. $\forall x\, [(Z(x,m) \wedge Z(x,k)) \supset L(x,m)]$

Někteří nelitují Marii, ačkoliv ji znají. $\exists x\, [\neg L(x,m) \wedge Z(x,m)]$

---

|= Někdo zná Marii, ale ne Karla. $\exists x\, [Z(x,m) \wedge \neg Z(x,k)]$

- Znázorníme, jaké budou obory pravdivosti predikátů Z a L, tj. relace $Z^U$ a $L^U$, aby byly pravdivé premisy:
- $Z^U = \{\ldots, \underbrace{\langle i_1,m\rangle, \langle i_1,k\rangle}, \underbrace{\langle i_2,m\rangle, \langle i_2,k\rangle}, \ldots, \langle \alpha,m\rangle, \ldots \}$

  1. premisa 2. premisa
- $L^U = \{\ldots, \langle i_1,m\rangle, \ldots., \langle i_2,m\rangle, \ldots\ldots\ldots\ldots, \cancel{\langle \alpha,m\rangle}, \ldots \}$

# Sémantické ověření správnosti úsudku

- Kdo zná Marii a Karla, ten Marii lituje.

  $\forall x\,[(Z(x,m) \land Z(x,k)) \supset L(x,m)]$
- Někteří nelitují Marii, ačkoliv ji znají.

  $\exists x\,[\neg L(x,m) \land Z(x,m)]$
- |= Někdo zná Marii, ale ne Karla. $\exists x\,[Z(x,m) \land \neg Z(x,k)]$
- Nyní dokážeme platnost sporem: předpokládejme, že všichni, kdo jsou ve vztahu Z k *m* (tedy i prvek $\alpha$), jsou také v Z ke *k* (negace závěru).
- $Z^U = \{\ldots, \underbrace{\langle i_1,m\rangle, \langle i_1,k\rangle}, \underbrace{\langle i_2,m\rangle, \langle i_2,k\rangle}, \ldots, \underbrace{\langle \alpha,m\rangle, \langle \alpha,k\rangle}, \ldots \}$

  1. p. 2. p. 1.p.
- $L^U = \{\ldots, \langle i_1,m\rangle, \ldots, \langle i_2,m\rangle, \ldots\ldots\ldots, \cancel{\langle \alpha,m\rangle}, \langle \alpha,m\rangle, \ldots \}$

***spor***

# Některé důležité tautologie PL1

$\models \forall x A(x) \supset A(x/t)$ term t je substituovatelný za *x* v A

$\models A(x/t) \supset \exists x A(x)$

- **De Morgan**

$\models \neg\forall x\, A(x) \equiv \exists x\, \neg A(x)$

$\models \neg\exists x\, A(x) \equiv \forall x\, \neg A(x)$

- ***Zákony distribuce kvantifikátorů***:

$\models \forall x\, [A(x) \supset B(x)] \supset [\forall x\, A(x) \supset \forall x\, B(x)]$

$\models \forall x\, [A(x) \supset B(x)] \supset [\exists x\, A(x) \supset \exists x\, B(x)]$

$\models \forall x\, [A(x) \wedge B(x)] \equiv [\forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x)]$

$\models \exists x\, [A(x) \wedge B(x)] \supset [\exists x\, A(x) \wedge \exists x\, B(x)]$

$\models [\forall x A(x) \vee \forall x B(x)] \supset \forall x\, [A(x) \vee B(x)]$

$\models \exists x\, [A(x) \vee B(x)] \equiv [\exists x\, A(x) \vee \exists x\, B(x)]$

## *Sémantické zdůvodnění:*

### *Nechť $A^U$, $B^U$ jsou obory pravdivosti A, B*

**$\forall x[A(x) \wedge B(x)] \Leftrightarrow [\forall x A(x) \wedge \forall x B(x)]$**

Je-li průnik $(A^U \cap B^U) = U$, pak musí být jak $A^U$, tak $B^U$ rovny celému universu U *a naopak*

**$\exists x[A(x) \vee B(x)] \Leftrightarrow [\exists x A(x) \vee \exists x B(x)]$**

Je-li sjednocení $(A^U \cup B^U) \neq \Phi$, pak musí být $A^U$ nebo $B^U$ neprázdné ($A^U \neq \Phi$ nebo $B^U \neq \Phi$) *a naopak*.

**$\models \forall x[A(x) \supset B(x)] \supset [\forall x A(x) \supset \forall x B(x)]$**

Je-li $A^U \subseteq B^U$, pak je-li $A^U = U$, je také $B^U = U$.

**$\models \forall x[A(x) \supset B(x)] \supset [\exists x A(x) \supset \exists x B(x)]$**

Je-li $A^U \subseteq B^U$, pak je-li $A^U \neq \Phi$, je také $B^U \neq \Phi$.

**$\models \exists x[A(x) \wedge B(x)] \supset [\exists x A(x) \wedge \exists x B(x)]$**

Je-li průnik $(A^U \cap B^U) \neq \Phi$, pak musí být jak $A^U$, tak $B^U$ neprázdné ($A^U \neq \Phi$ a $B^U \neq \Phi$).

**$\models [\forall x A(x) \vee \forall x B(x)] \supset \forall x[A(x) \vee B(x)]$**

Je-li $A^U = U$ nebo $B^U = U$, pak je také sjednocení $(A^U \cup B^U) = U$

# Některé důležité tautologie PL1

- Formule A neobsahuje volně proměnnou *x:*
  $\models \forall x[A \supset B(x)] \equiv [A \supset \forall x B(x)]$
  $\models \exists x[A \supset B(x)] \equiv [A \supset \exists x B(x)]$
  $\models \forall x[B(x) \supset A] \equiv [\exists x B(x) \supset A]$
  $\models \exists x[B(x) \supset A] \equiv [\forall x B(x) \supset A]$
  $\models \forall x[A \wedge B(x)] \equiv [A \wedge \forall x B(x)]$
  $\models \exists x[A \wedge B(x)] \equiv [A \wedge \exists x B(x)]$
  $\models \forall x[A \vee B(x)] \equiv [A \vee \forall x B(x)]$
  $\models \exists x[A \vee B(x)] \equiv [A \vee \exists x B(x)]$
- ***Zákony komutace kvantifikátorů***:
  $\models \forall x \forall y A(x,y) \equiv \forall y \forall x A(x,y)$
  $\models \exists x \exists y A(x,y) \equiv \exists y \exists x A(x,y)$
  $\models \exists x \forall y \mathbf{A}(x,y) \supset \forall y \exists x \mathbf{A}(x,y)$ ale ne naopak!

## ***Sémantické zdůvodnění:*** *Nechť $A^U$, $B^U$ jsou obory pravdivosti A, B, x není volná v A*

$\forall x[A \supset B(x)] \Leftrightarrow [A \supset \forall x B(x)]$ – zřejmé

$\exists x[A \supset B(x)] \Leftrightarrow [A \supset \exists x B(x)]$ – zřejmé

$\boldsymbol{\forall x\, [B(x) \supset A] \Leftrightarrow [\exists x\, B(x) \supset A]}$

$\forall x\, [B(x) \supset A] \Leftrightarrow \forall x\, [\neg B(x) \vee A]$: doplněk $B^U$ je celé universum nebo A: $\forall x\, \neg B(x) \vee A \Leftrightarrow \neg\exists x\, B(x) \vee A \Leftrightarrow \exists x\, B(x) \supset A$

$\boldsymbol{\exists x[B(x) \supset A] \Leftrightarrow [\forall x B(x) \supset A]}$

$\exists x\, [B(x) \supset A] \Leftrightarrow \exists x\, [\neg B(x) \vee A]$: doplněk $B^U$ je neprázdný nebo A: $\exists x\, \neg B(x) \vee A \Leftrightarrow \neg\forall x\, B(x) \vee A \Leftrightarrow \forall x\, B(x) \supset A$

# Sémantická tabla v predikátové logice

Důkazy logické pravdivosti a platnosti úsudku v predikátové logice 1. řádu

# Typické úlohy

- Dokázat logickou pravdivost formule PL1:
  - formule F je pravdivá ve ***všech interpretacích,*** tj. každá interpretace je jejím modelem
  - **|= F**
- Dokázat platnost úsudku v PL1:
  - $\mathbf{P_1, \ldots, P_{\mathit{n}} \models Q}$
  - pro **uzavřené** formule **iff** $\mathbf{\models (P_1 \wedge \ldots \wedge P_{\mathit{n}} \supset Q)}$
  - formule Q je pravdivá ve ***všech modelech*** množiny předpokladů $P_1, \ldots, P_n$
- Co vyplývá z daných předpokladů?
  - $\mathbf{P_1, \ldots, P_{\mathit{n}} \models ?}$

# Typické úlohy

- Jejich řešení rozborem (nekonečné) množiny modelů je obtížné, sémantické důkazy jsou pracné
- Proto hledáme jiné metody
- Jednou z nich je metoda sémantických tabel
- Obdoba, zobecnění stejné metody ve výrokové logice
- Tedy převod na disjunktivní / konjunktivní normální formy

# Sémantická tabla v PL1

- VL – důkaz logické pravdivosti.
- ***Přímý důkaz*** – použijeme konjunktivní normální formu
- ***Nepřímý důkaz*** – disjunktivní normální formu
- Aplikaci metod VL brání to, že formule může být uzavřená kvantifikátory. Jak se jich zbavit?
- Použijeme pravidla:
- $\forall x$ A($x$) |– A($x$ / $t$), kde $t$ je term substituovatelný za $x$ ve formuli A, nejčastěji $t = x$
- $\exists(x)$A($x$) |– A($a$), kde $a$ je *vhodná konstanta (dosud v důkazovém postupu nepoužita)*

# *Pravidla pro odstranění kvantifikátorů*

- **$\forall x\, A(x) \mid\!- A(x / t)$,** term *t* substituovatelný za *x*
  - Je-li obor pravdivosti $\mathbf{A}^{\mathbf{U}}$ = U, pak prvek *e**(*t*) leží v $\mathbf{A}^{\mathbf{U}}$
  - Zachovává pravdivost, OK
- **$\exists(x)A(x) \mid\!- A(a)$,** kde *a* je *vhodná konstanta*
  - Je-li obor pravdivosti $\mathbf{A}^{\mathbf{U}} \neq \Phi$,
    pak prvek *e**(*a*) nemusí ležet v $\mathbf{A}^{\mathbf{U}}$
  - *Nezachovává pravdivost !!*
- **$\forall x\, \exists(y)\, B(x,y) \mid\!- B(a, b)$,** kde *a, b* jsou vhodné konstanty
  - *Jestliže ke každému x* existuje *y takové, že dvojice* <*x,y*> *leží v* $\mathbf{B}^{\mathbf{U}}$*, nemusí tam ležet právě dvojice* <*a, b*>
  - *Nezachovává pravdivost !!*
- *Odstranění existenčního kvantifikátoru však zachovává **splnitelnost:** je **možno** interpretovat konstanty a, b tak, aby byla formule na pravé straně pravdivá, pokud je pravdivá formule vlevo, proto musíme použít důkaz sporem, tj. **disjunktivní tabla***

# *Sémantická tabla v PL1 – disjunktivní*

- Příklad. Důkaz logické pravdivosti formule:

  $\models \forall x\, [P(x) \supset Q(x)] \supset [\forall x\, P(x) \supset \forall x\, Q(x)]$

- Důkaz sporem (***nesplnitelnosti formule***):
- $\forall x\, [P(x) \supset Q(x)] \land \forall x\, P(x) \land \exists x\, \neg Q(x)$ (pořadí!)

2. 3. 1.

$\forall x\, [P(x) \supset Q(x)],\ \neg P(a) \lor Q(a),\ P(a),\ \neg Q(a)$

$\forall x\, [P(x) \supset Q(x)],\ \neg P(a),\ P(a),\ \neg Q(a)$ $\qquad$ $\forall x\, [P(x) \supset Q(x)],\ Q(a),\ P(a),\ \neg Q(a)$

+ $\qquad$ +

Obě větve se uzavřely, jsou nesplnitelné, původní f. je Tautologie

# Metoda disjunktivního tabla

- $|=?\ \forall x\, [P(x) \lor Q(x)] \supset [\forall x\, P(x) \lor \forall x\, Q(x)]$
- Znegujeme:

  $\forall x\, [P(x) \lor Q(x)] \land \exists x\, \neg P(x) \land \exists x\, \neg Q(x)$

  $\forall x\, [P(x) \lor Q(x)],\ \neg P(\boldsymbol{a}),\ \neg Q(\boldsymbol{b})$ 1.odstranění $\exists$ **- různé** konst. !

  $P(a) \lor Q(a),\ P(b) \lor Q(b),\ \neg P(\boldsymbol{a}),\ \neg Q(\boldsymbol{b})$ 2. odstranění $\forall$

$P(a),\ P(b) \lor Q(b),\ \neg P(\boldsymbol{a}),\ \neg Q(\boldsymbol{b})$ $Q(a),\ P(b) \lor Q(b),\ \neg P(\boldsymbol{a}),\ \neg Q(\boldsymbol{b})$

$P(a),\ P(b),\ \neg P(\boldsymbol{a}),\ \neg Q(\boldsymbol{b})$ $P(a),\ Q(b),\ \neg P(\boldsymbol{a}),\ \neg Q(\boldsymbol{b})$

$Q(a),\ P(b),\ \neg P(\boldsymbol{a}),\ \neg Q(\boldsymbol{b})$ $Q(a),\ Q(b),\ \neg P(\boldsymbol{a}),\ \neg Q(\boldsymbol{b})$

**Formule není logicky pravdivá, 3. větev není uzavřená**

# Tablo může být nekonečné

- **F:** $\forall \boldsymbol{x}\, \exists \boldsymbol{y}\, \mathbf{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \wedge \forall \boldsymbol{x}\, \neg \mathbf{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) \wedge$
  $\forall \boldsymbol{x}\, \forall \mathbf{y}\, \forall \mathbf{z}\, ([\mathbf{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \wedge \mathbf{P}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})] \supset \mathbf{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}))$
- Proměnná *x* je kvantifikována všeobecným kvantifikátorem
- Musíme tedy „zkoušet všechna *x*“: $a_1, a_2, a_3, \ldots$
- Pro *y* musíme volit vždy ***jinou*** konstantu:

  $P(a_1, a_2), \neg P(a_1, a_1)$
  $P(a_2, a_3), \neg P(a_2, a_2), \neg P(a_2, a_1)$
  $P(a_3, a_4), \neg P(a_3, a_3), \neg P(a_3, a_2)$
  $P(a_4, a_5), \neg P(a_4, a_4), \neg P(a_4, a_3)$
  …

***Problém logické pravdivosti není v PL1 rozhodnutelný***

# Tablo může být nekonečné

- **F: $\forall x \, \exists y \, P(x,y) \wedge \forall x \, \neg P(x,x) \wedge$**

  **$\forall x \, \forall y \, \forall z \, ([P(x,y) \wedge P(y,z)] \supset P(x,z))$**
- *Jaká je formule F? Je to splnitelná, kontradikce, či logicky pravdivá?*
- *Zkusme najít model:*

1. *U = N*
2. *$P^U$ = relace < (ostře menší)*

*1 2 3 4 5 ...* *Je* ***splnitelná***

*Může mít formule F* ***konečný*** *model?*

*U* = $\{a_1, a_2, a_3, \ldots ?\}$

*K $a_1$ musí existovat prvek $a_2$ takový, že $P(a_1, a_2)$, $a_2 \neq a_1$*

*K $a_2$ musí existovat prvek $a_3$ takový, že $P(a_2, a_3)$, $a_3 \neq a_2$, ale také $a_3 \neq a_1$ jinak by bylo $P(a_1, a_2) \wedge P(a_2, a_1)$, tedy $P(a_1, a_1)$.*

*K $a_3$ musí existovat prvek $a_4$ takový, že $P(a_3, a_4)$, $a_4 \neq a_3$, ale také $a_4 \neq a_2$ jinak by bylo $P(a_2, a_3) \wedge P(a_3, a_2)$, tedy $P(a_2, a_2)$.*
*Atd. do* ***nekonečna***

# Platnost úsudku - sporem

- $\forall x\ [P(x) \supset \neg Q(x)] \wedge \exists x\ Q(x) \models \exists x\ \neg P(x)$
- $\forall x\ [P(x) \supset \neg Q(x)],\ \exists x\ Q(x),\ \forall x\ P(x)$ – sporná?

$\forall x\ [P(x) \supset \neg Q(x)],\ Q(a),\ \forall x\ P(x)$

$\forall x\ [P(x) \supset \neg Q(x)],\ \forall x\ P(x),\ [P(a) \supset \neg Q(a)],\ Q(a),\ P(a)$

$\neg P(a),\ Q(a),\ P(a)$ $\qquad\qquad$ $\neg Q(a),\ Q(a),\ P(a)$

$+$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+$

Obě větve se uzavřely, množina předpokladů a negovaný závěr je sporná, tedy úsudek je ***platný***

# Platnost úsudku (sporem)

- $\forall x\, [P(x) \supset \neg Q(x)] \wedge \exists x\, Q(x) \models \exists x\, \neg P(x)$

Žádná velryba není ryba.

Ryby existují.

------------------------------------------

Některá individua nejsou velryby.

- Množina tvrzení: {Žádná velryba není ryba, ale ryby existují, všechno jsou velryby} je sporná.

# Ověření nesplnitelnosti

- ***Jistý holič holí právě ty, kdo se neholí sami***
- ***Holí tento holič sám sebe?***
- $\exists x\, \forall y\, [\neg H(y,y) \equiv H(x,y)] \models ?$

$H(y,y) \lor H(a,y),\ \neg H(y,y) \lor \neg H(a,y)$ – odstranění $\exists$

$H(a,a) \lor H(a,a),\ \neg H(a,a) \lor \neg H(a,a)$ – odstranění $\forall$

$H(a,a),\ \neg H(a,a) \lor \neg H(a,a),\ H(a,a),\ \neg H(a,a) \lor \neg H(a,a)$

$H(a,a),\ \neg H(a,a)$ $\qquad\qquad$ $H(a,a),\ \neg H(a,a)$ …

+

První věta je sporná, plyne z ní cokoliv. Tedy, takový holič prostě neexistuje.

# Shrnutí – sémantická tabla v PL1

- Sémantická tabla používáme pro ***nepřímý důkaz sporem*** převodem do ***disjunktivní normální formy*** (tj. větvení znamená disjunkci, čárka konjunkci)
- Problémem jsou uzavřené formule s kvantifikátory, musíme se kvantifikátorů nějak zbavit
- Nejprve odstraníme existenční kvantifikátory tak, že proměnnou (která ***není v rozsahu všeobecného kvantifikátoru***) nahradíme novou konstantou, která se ještě v jazyce nevyskytovala
- Pak odstraňujeme všeobecné kvantifikátory tak, že proměnnou nahrazujeme postupně všemi konstantami
- Pokud je existenčně vázaná proměnná $x$ v rozsahu kvantifikátoru všeobecného (přes $y$), musíme za $y$ postupně zkoušet dosazovat všechny konstanty a za proměnnou $x$ dosazovat vždy novou konstantu
- Pokud se tablo uzavře, je formule či množina formulí sporná

# Příklady na sémantická tabla

- $\models \exists x \forall y\, P(x,y) \supset \forall y \exists x\, P(x,y)$
- negace: $\exists x \forall y\, P(x,y) \wedge \exists y \forall x\, \neg P(x,y)$

$$\forall y P(a,y),\ \forall x \neg P(x,b)$$

*x/a, y/b (pro všechna, tedy i pro a, b)*

$$P(a,b),\ \neg P(a,b)$$

$$+$$

# Příklady na sémantická tabla

- $\models\ [\forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x)] \supset \forall x\, [P(x) \vee Q(x)]$
- negace: $[\forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x)] \wedge \exists x\, [\neg P(x) \wedge \neg Q(x)]$

| | |
|---|---|
| $\forall x\, P(x),\ \neg P(a),\ \neg Q(a)$ | $\forall x\, Q(x),\ \neg P(a),\ \neg Q(a)$ |
| $\forall x P(x), P(a), \neg P(a), \neg Q(a)$ | $\forall x Q(x), Q(a), \neg P(a), \neg Q(a)$ |
| + | + |

Děkuji Vám za pozornost

Nashledanou za týden