Přednáška 2: Formalizace v jazyce logiky.

Marie Duží

marie.duzi@vsb.cz

Dva základní logické systémy: Výroková logika a predikátová logika 1. řádu

1. ***Výroková logika*** analyzuje způsoby skládání jednoduchých výroků do výroků složených pomocí logických spojek:

   „Petr se učí (p) **a** Karel šel do kina (*q*).*“* → ***(p*** $\wedge$ ***q)***

   „Petr se učí (*p*) **nebo** Karel šel do kina (*q*).“→ ***(p*** $\vee$ ***q)***

   „**Jestliže** se Petr učí (*p*), **pak** šel Karel do kina (*q*).“→ ***(p*** $\supset$ ***q)***

- Co je to výrok? *Výrok je tvrzení, o němž má smysl prohlásit, zda je pravdivé či nepravdivé*
- Princip dvouhodnotovosti *– tercium non datur – dvouhodnotová logika* (existují však vícehodnotové logiky, logiky parciálních funkcí, fuzzy logiky, ...)
- Triviální definice? Jsou všechna (oznamovací) tvrzení výroky? Ne, není pravda, že všechna tvrzení jsou výroky:
  - *Francouzský král je holohlavý*
  - *Přestal jste bít svou ženu?*

    (zkuste odpovědět ano nebo ne, pokud jste nikdy nebyl ženatý nebo nikdy svou ženu nebil)

Dva základní logické systémy: Výroková logika a predikátová logika 1. řádu

2. ***Predikátová logika 1. řádu*** navíc umožňuje analyzovat strukturu elementárních výroků, a to až do úrovně ***vlastností a vztahů*** mezi individui

"Všechny opice mají rády banány" →

$\forall \boldsymbol{x}\ [\mathbf{O}(\boldsymbol{x}) \supset \mathbf{B}(\boldsymbol{x})]$

Pro **všechna** individua *x* *(∀x)* platí, že **jestliže** *x* je O(pice - O*(x)*)*,* **pak** *x* má rádo B(anány - B*(x)*)

"Někteří studenti jsou pilní"

$\exists \boldsymbol{x}\ [\mathbf{S}(\boldsymbol{x}) \wedge \mathbf{P}(\boldsymbol{x})]$

Existují individua *x* *(∃x)* taková, že *x* je S(tudent - S*(x)*) **a** *x* je P(ilný - P*(x)*)

Výroková logika: jazyk

- ***Formální jazyk*** je zadán *abecedou* (množina výchozích symbolů) a *gramatikou* (množina pravidel, která udávají, jak vytvářet „Dobře utvořené formule“ - DUF)
- ***Jazyk výrokové logiky***
  - ***abeceda***:
  - – Výrokové symboly: p, q, r, ... (případně s indexy)
  - – Symboly logických spojek (funktorů): $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\supset$, $\equiv$
  - – Pomocné symboly (závorky): (,), [,], {, }
    - Výrokové symboly zastupují elementární výroky
    - Symboly $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\supset$, $\equiv$ nazýváme po řadě ***negace ($\neg$)***, ***disjunkce ($\vee$)***, ***konjunkce ($\wedge$)***, ***implikace ($\supset$)***, ***ekvivalence ($\equiv$)***.

Výroková logika: jazyk

- ***Gramatika***
  (definuje rekurzivně dobře utvořené formule DUF)
  Induktivní definice nekonečné množiny DUF
  1. Výrokové symboly ***p, q, r, ...*** jsou *(dobře utvořené) formule* (báze definice).
  2. Jsou-li výrazy A, B formule, pak jsou (DU) *formulemi* i výrazy
     $$(\neg A), (A \wedge B), (A \vee B), (A \supset B), (A \equiv B)$$
     (indukční krok definice).
  3. Jiných formulí výrokové logiky, než podle bodů (1), (2) není.
     (uzávěr definice).
- *Jazyk výrokové logiky* je množina všech dobře utvořených formulí výrokové logiky.

Pozn.: Formule dle bodu (1) jsou ***atomické formule***
Formule dle bodu (2) jsou ***složené formule***

Výroková logika: Dobře utvořené formule

Poznámky:

Symboly A, B jsou *metasymboly.* Můžeme za ně dosadit kteroukoli DUF již vytvořenou dle definice.

Vnější závorky můžeme vynechávat.

Pro spojky se někdy užívají jiné symboly:

Symbol	alternativně
$\supset$	$\Rightarrow$, $\rightarrow$
$\equiv$	$\Leftrightarrow$, $\leftrightarrow$
$\wedge$	**&**
$\neg$	**~**

Příklad:

$(p \supset q) \wedge p$ je DUF (vnější závorky vynechány)

$(p \vee) \neg \equiv q$ není DUF

Sémantika (význam) formulí

Pravdivostní ***ohodnocení (valuace)*** ***výrokových symbolů*** je zobrazení v, které ke každému výrokovému symbolu p přiřazuje pravdivostní hodnotu, tj. hodnotu z množiny {1,0}, která kóduje množinu {Pravda, Nepravda}: $\{p_i\} \to \{1,0\}$

Pravdivostní funkce formule výrokové logiky je funkce w, která pro každé pravdivostní ohodnocení v výrokových symbolů p přiřazuje formuli její pravdivostní hodnotu. Tato hodnota je určena induktivně takto:

- Pravdivostní hodnota elementární formule: $w(p)_v = v(p)$ pro všechny výrokové proměnné p.
- Jsou-li dány pravdivostní funkce formulí A, B, pak pravdivostní funkce formulí
  $\neg\mathbf{A}, \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}, \mathbf{A} \vee \mathbf{B}, \mathbf{A} \supset \mathbf{B}, \mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$ jsou dány následující tabulkou 2.1:

Tabulka 2.1. pravdivostní funkce

A	B	$\neg A$	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \supset B$	$A \equiv B$
1	1	0	1	1	**1**	1
1	0	0	1	0	**0**	0
0	1	1	1	0	**1**	0
0	0	1	0	0	**1**	1

Převod z přirozeného jazyka do jazyka výrokové logiky, spojky

- Elementární výroky: překládáme symboly p, q, r, ...
- Spojky přirozeného jazyka: překládáme pomocí symbolů pro spojky:
- ***Negace:***
  - „není pravda, že“: $\neg$ (unární spojka)
- ***Konjunkce:***
  - „*a*“: $\wedge$ (binární, komutativní) spojka;
  - *Praha je velkoměsto **a** 2+2=4:* $p \wedge q$
    ne vždy, ne každé „a“ je logická konjunkce.
    Např. *„Jablka a hrušky se pomíchaly“.*
- ***Disjunkce*:**
  - *„nebo“:* $\vee$ (binární, komutativní) spojka;
    *Praha **nebo** Brno je velkoměsto. („nevylučující se“)*: $p \vee q$
  - V přirozeném jazyce často ve smyslu *vylučujícím se* „buď, anebo“ (*Půjdu do školy (a)nebo zůstanu doma.)*
    - Vylučující se „nebo“ je non-ekvivalence

Spojka implikace

- ***Implikace***
- „*jestliže, pak*“, „*když, tak*“, „*je-li, pak*“: $\supset$ (binární, ***ne***komutativní) spojka; První člen implikace **antecedent**, druhý **konsekvent.**
- Implikace (ani žádná jiná spojka) nepředpokládá *žádnou obsahovou souvislost* mezi antecendentem a konsekventem, proto bývá někdy nazývána *materiálová implikace* (středověk ”*suppositio materialis”*).
- Implikace tedy (na rozdíl od častých případů v přirozeném jazyce) ***nezachycuje ani příčinnou ani časovou vazbu.***
  ”Jestliže 1+1=2, pak železo je kov” (pravdivý výrok): $p \supset q$
  ”Jestliže existují ufoni, tak jsem papež”: $p \supset r$
  (co tím chce dotyčný říct? Nejsem papež, tedy neexistují ufoni)
- Pozn.: **Spojce “protože” neodpovídá logická spojka implikace!**
  - “Hokejisté prohráli semifinálový zápas, ***proto*** se vrátili z olympiády předčasně”.
    „***Protože*** jsem nemocen, zůstal jsem doma“. „nemocen“ $\supset$ „doma“?
    Ale to by muselo být pravda, i když nejsem nemocen (slide 24)
  - Mohli bychom to analyzovat pomocí *modus ponens:* $[p \wedge (p \supset q)] \supset q$

Spojka ekvivalence

- ***Ekvivalence***:
  - ”právě tehdy, když”, ”tehdy a jen tehdy, když”, apod. , ale ne ”tehdy, když” – to je implikace!
  - ”Řecká vojska vyhrávala boje ***tehdy (a jen tehdy), když*** o jejich výsledku rozhodovala fyzická zdatnost”: $p \equiv q$
  - Používá se nejčastěji v matematice (v definicích), v přirozeném jazyce řidčeji
- *Příklad*:

a) ”Dám ti facku, když mě oklameš” okl ⊃ facka

b) ”Dám ti facku tehdy a jen tehdy, když mě oklameš okl ≡ facka

Situace: Neoklamal jsem. Kdy mohu dostat facku?

Ad a) – můžu dostat facku, ad b) – nemůžu dostat facku.

Jazyk predikátové logiky

- *Atomické výroky* tvoříme aplikací ***predikátů*** *(P, Q, R, …)* na ***termy*** (označují prvky universa, tj. individua).
  Např.: $P(x)$, $Q(a,b)$, $R(a,f(x))$, …
- *Složené výroky* tvoříme aplikací výrokových spojek, např. $P(x) \vee Q(a,b)$, a navíc pomocí ***kvantifikátorů*** ($\forall$, $\exists$).
  Např.: $\forall x\, [P(x) \vee Q(a,b)]$

Převod z přirozeného jazyka do jazyka PL1

- „všichni“, „žádný“, „nikdo“, ...
  - překládáme pomocí všeobecného kvantifikátoru $\forall$
- „někdo“, „něco“, „někteří“, „existuje“, ...
  - překládáme pomocí existenčního kvantifikátoru $\exists$

Větu musíme často ekvivalentně přeformulovat

- Pozor: v češtině dvojí zápor !
- Žádný student není důchodce:

  $\forall \boldsymbol{x}\ [\mathbf{S}(\boldsymbol{x}) \supset \neg \mathbf{D}(\boldsymbol{x})]$
- Ale, „Všichni studenti nejsou důchodci“ čteme jako „Ne všichni studenti jsou důchodci“:

  $\neg \forall \boldsymbol{x}\ [\mathbf{S}(\boldsymbol{x}) \supset \mathbf{D}(\boldsymbol{x})] \Leftrightarrow \exists \boldsymbol{x}\ [\mathbf{S}(\boldsymbol{x}) \wedge \neg \mathbf{D}(\boldsymbol{x})]$

Převod z přirozeného jazyka do jazyka PL1

- Pomocné pravidlo: $\forall$ + $\supset$, $\exists$ + $\wedge$ (většinou)
- $\neg\forall \boldsymbol{x}\, [P(\boldsymbol{x}) \supset Q(\boldsymbol{x})] \Leftrightarrow \exists \boldsymbol{x}\, [P(\boldsymbol{x}) \wedge \neg Q(\boldsymbol{x})]$

Není pravda, že všechna P jsou Q $\Leftrightarrow$
Některá P nejsou Q

- $\neg\exists \boldsymbol{x}\, [P(\boldsymbol{x}) \wedge Q(\boldsymbol{x})] \Leftrightarrow \forall \boldsymbol{x}\, [P(\boldsymbol{x}) \supset \neg Q(\boldsymbol{x})]$

Není pravda, že některá P jsou Q $\Leftrightarrow$
Žádné P není Q

de Morganovy zákony v PL1

Převod z přirozeného jazyka do jazyka PL1

- „Pouze zaměstnanci (Z) používají výtah (V)“

  $\forall x\, [V(x) \supset Z(x)]$
- „Všichni zaměstnanci používají výtah“

  $\forall x\, [Z(x) \supset V(x)]$

- „Marie (m) má ráda (R) pouze vítěze (V)“:
- Tedy pro všechny platí: „Pokud má Marie někoho ráda, pak je to vítěz“:

  $\forall x\, [R(m, x) \supset V(x)]$,

„mít rád“ je binární vztah, ne vlastnost !!!

- „Každý má někoho někdy rád“: $\forall x\, \exists y\, \exists t\, R(x, y, t)$

Význam (sémantika) formulí PL1

$P(x) \supset \forall y\, Q(x, y)$

– je tato formule pravdivá?

Nesmyslná otázka, vždyť nevíme, co znamenají symboly P, Q. Jsou to jen symboly, za které můžeme dosadit jakýkoli predikát.

$P(x) \supset P(x)$

– je tato formule pravdivá?

ANO, je, a to vždy, za všech okolností.

(Je to ***tautologie, logicky pravdivá formule.)***

Význam (sémantika) formulí PL1

Je dán ***interpretací*** (predikátových a funkčních) symbolů:

- Příklad. Formule: P(*a*)

  Interpretace: P → podmnožinu universa, *a* → prvek universa (individuum)

Interpretace1: universum N(aturals. tj. čísla 0,1,2,3, …); P → sudá čísla, *a* → číslo 5 (individuum); vyhodnocení pravdivosti: Je 5 $\in$ množiny sudých čísel? ***Ne,*** formule je v této interpretaci ***nepravdivá***

Interpretace2: P → lichá čísla, *a* → číslo 5; vyhodnocení pravdivosti: Je 5 $\in$ množiny lichých čísel? ***Ano,*** formule je v této interpretaci ***pravdivá.*** Říkáme také, že tato interpretace <N, lichá, 5> je ***modelem formule***

Význam (sémantika) formulí PL1

- Formule

$\forall x\, P(x, f(x))$ musíme se dohodnout, jak

$\exists x\, P(x, f(x))$ budeme tyto formule chápat

1) O čem mluví, přes co „rangují" proměnné: zvolíme universum diskursu, jakákoli ***neprázdná*** množina $U \neq \Phi$
2) Co označuje symbol P; je binární, má dva argumenty, tedy musí označovat nějakou binární relaci $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{U} \times \mathbf{U}$
3) Co označuje symbol *f* ; je unární, má jeden argument, tedy musí označovat nějakou funkci $F \subseteq \mathbf{U} \times \mathbf{U}$, značíme $\mathbf{F}: \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{U}$

Význam (sémantika) formulí PL1

A: $\forall x\, P(x, f(x))$ musíme se dohodnout, jak

B: $\exists x\, P(x, f(x))$ budeme tyto formule chápat

1) Nechť U = N (množina přirozených čísel)
2) Nechť P označuje relaci <
   (tj. množinu dvojic takových, že první člen je ostře menší než druhý: $\{\langle 0,1\rangle, \langle 0,2\rangle, \ldots, \langle 1,2\rangle, \ldots\}$)
3) Nechť *f* označuje funkci druhá mocnina x^2, tedy množinu dvojic, kde druhý člen je druhá množina prvního: $\{\langle 0,0\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 2,4\rangle, \ldots, \langle 5,25\rangle, \ldots\}$

Nyní můžeme teprve vyhodnotit pravdivostní hodnotu formulí A, B

Význam (sémantika) formulí PL1

A: $\forall x\, P(x, f(x))$

B: $\exists x\, P(x, f(x))$ Vyhodnocujeme „zevnitř“:

Nejprve vyhodnotíme term $f(x)$. Každý term označuje prvek universa. Který? Záleží na *valuaci e proměnné x.* Nechť $e(x) = 0$, pak $f(x) = x^2 = 0$.

$e(x) = 1$, pak $f(x) = x^2 = 1$,
$e(x) = 2$, pak $f(x) = x^2 = 4$, atd.

Nyní vyhodnocením $P(x , f(x))$ musíme dostat pravdivostní hodnotu: $e(x) = 0$, 0 není < 0 **Nepravda** $e(x) = 1$, 1 není < 1 **Nepravda**, $e(x) = 2$, 2 je < 4 **Pravda**

Význam (sémantika) formulí PL1

A: $\forall x\, P(x, f(x))$

B: $\exists x\, P(x, f(x))$

Formule $P(x, f(x))$ je pro některé valuace e proměnné *x* *v dané interpretaci* Pravdivá, pro jiné nepravdivá

Význam $\forall x$ ($\exists x$): formule musí být pravdivá pro ***všechny (některé)*** valuace *x*

Formule A: Nepravdivá v naší interpretaci I: $|\neq_I A$ (interpretace I není jejím modelem)

Formule B: Pravdivá v naší interpretaci I: $|=_I B$

(interpretace I je jejím ***modelem***)

Model formule

- PL1: Interpretace, ve které je formule pravdivá
  $\exists x\, P(x, f(x))$,
  - Modely: <*N*, P:$\leq$, f:x^2>, <*N*, P:<, f:x+1>, <*Individua,* P:*být-mladší, f:matka*(x)>
- VL: ohodnocení *e* výrokových proměnných, pro které je formule pravdivá. Např.:
  - Formule $p \wedge q$
    má model (jediný): *e(p)=1, e(q)=1*
  - Formule $p \supset q$
    má modely:
    e(p)=0, e(q)=1; e(p)=0, e(q)=0; e(p)=1, e(q)=1
- *Formule:* $\forall x\, P(x, f(x)) \wedge \neg P(a,b)$
  - Má např. tyto modely:
    <*N;* P:$\leq$; f:x^2,*a*:*5*,*b*:*3*>, <*N;* P:<; f:x+1,*a*:*5*,*b*:*3*>

Splnitelnost formulí, tautologie, kontradikce, model

- ***Formule je splnitelná***, má-li alespoň jeden model
- ***Formule je nesplnitelná (kontradikce)***, nemá-li žádný model
- ***Formule je tautologie (logicky pravdivá)***, je-li každá interpretace / každé ohodnocení jejím modelem.
- ***Množina formulí*** $\{A_1,\ldots,A_n\}$ ***je splnitelná***, existuje-li ohodnocení *v*, které je modelem každé formule A_i, $i = 1,\ldots,n$.

Splnitelnost formulí, tautologie, kontradikce, model

- *Příklad.* A: **$\neg(p \supset q) \equiv (p \wedge \neg q)$**
- *Formule A je tautologie,* $\neg A$ kontradikce, formule $(p \supset q)$, $(p \wedge \neg q)$ jsou splnitelné.

p	q	$p \supset q$	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \supset q)$	$\neg(p \supset q) \equiv (p \wedge \neg q)$	$\neg A$
1	1	1	0	0	**1**	**0**
1	0	0	1	1	**1**	**0**
0	1	1	0	0	**1**	**0**
0	0	1	0	0	**1**	**0**

Ekvivalentní vyjádření, negace a de Morganovy zákony

- „Prší“ ⇔ „Není pravda, že neprší“
  - $p \Leftrightarrow \neg\neg p$
- „Prší nebo sněží“ ⇔ „Není pravda, že ani neprší ani nesněží“
  - $(p \vee q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$
- „Prší a sněží“ ⇔ „Není pravda, že neprší nebo nesněží“
  - $(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$
- „Není pravda, že prší a sněží“ ⇔ „Neprší nebo nesněží“
  - $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
- „Není pravda, že prší nebo sněží“ ⇔ „Neprší a nesněží“
  - $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
- **„Není pravda, že jestliže prší pak sněží“ ⇔ „Prší a nesněží“**
  - $\boldsymbol{\neg(p \supset q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)}$
- **„Jestliže prší, pak sněží“ ⇔ „Neprší nebo sněží“**
  - $\boldsymbol{(p \supset q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)}$

Pozor na implikaci!

Ekvivalentní vyjádření a de Morganovy zákony

- **„Není pravda, že všechna A jsou B“ $\Leftrightarrow$ „Některá A nejsou B“**
  - $\neg\forall x\,[A(x) \supset B(x)] \Leftrightarrow \exists x\,\neg[A(x) \supset B(x)] \Leftrightarrow \exists x\,[A(x) \wedge \neg B(x)]$
- **„Není pravda, že některá A jsou B“ $\Leftrightarrow$ „Žádné A není B“**
  - $\neg\exists x\,[A(x) \wedge B(x)] \Leftrightarrow \forall x\,\neg[A(x) \wedge B(x)] \Leftrightarrow \forall x\,[\neg A(x) \vee \neg B(x)] \Leftrightarrow \forall x\,[A(x) \supset \neg B(x)]$
- **„Není pravda, že žádné A není B“ $\Leftrightarrow$ „Některá A jsou B“**
  - $\neg\forall x\,[A(x) \supset \neg B(x)] \Leftrightarrow \exists x\,\neg[A(x) \supset \neg B(x)] \Leftrightarrow \exists x\,[A(x) \wedge B(x)]$
- **„Není pravda, že některá A nejsou B“ $\Leftrightarrow$ „Všechna A jsou B“**
  - $\neg\exists x\,[A(x) \wedge \neg B(x)] \Leftrightarrow \forall x\,[\neg A(x) \vee B(x)] \Leftrightarrow \forall x\,[A(x) \supset B(x)]$
- **Zákony obecně:**
  - $\neg\forall x\, A(x) \Leftrightarrow \exists x\,\neg A(x)$; $\neg\exists x\, A(x) \Leftrightarrow \forall x\,\neg A(x)$
  - $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$; $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$;
  - $\neg(A \supset B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$;

Ekvivalentní vyjádření a de Morganovy zákony – množinově

- **„Není pravda, že všechna A jsou B“** $\Leftrightarrow$ **„Některá A nejsou B“**
  - $\neg\forall x\, [A(x) \supset B(x)] \Leftrightarrow \exists x\, \neg[A(x) \supset B(x)] \Leftrightarrow \exists x\, [A(x) \wedge \neg B(x)]$
  - Není pravda, že *A* je podmnožinou *B* $\Leftrightarrow$ Průnik A a komplementu B je neprázdný (Nakreslete si to!)
- **„Není pravda, že některá A jsou B“** $\Leftrightarrow$ **„Žádné A není B“**
  - $\neg\exists x\, [A(x) \wedge B(x)] \Leftrightarrow \forall x\, \neg[A(x) \wedge B(x)] \Leftrightarrow \forall x\, [\neg A(x) \vee \neg B(x)] \Leftrightarrow \forall x\, [A(x) \supset \neg B(x)] \Leftrightarrow \forall x\, [B(x) \supset \neg A(x)]$
  - Průnik A a B je prázdný (čili A, B jsou disjunktní) $\Leftrightarrow$ A je podmnožinou komplementu B $\Leftrightarrow$ B je podmnožinou komplementu A (Nakreslete si to!)
- **„Není pravda, že žádné A není B“** $\Leftrightarrow$ **„Některá A jsou B“**
  - $\neg\forall x\, [A(x) \supset \neg B(x)] \Leftrightarrow \exists x\, \neg[A(x) \supset \neg B(x)] \Leftrightarrow \exists x\, [A(x) \wedge B(x)]$
  - A není podmnožinou komplementu B $\Leftrightarrow$ Průnik A a B je neprázdný (Nakreslete si to!)
- **„Není pravda, že některá A nejsou B“** $\Leftrightarrow$ **„Všechna A jsou B“**
  - $\neg\exists x\, [A(x) \wedge \neg B(x)] \Leftrightarrow \forall x\, [\neg A(x) \vee B(x)] \Leftrightarrow \forall x\, [A(x) \supset B(x)]$
  - Průnik A a komplementu B je prázdný $\Leftrightarrow$ A je podmnožinou B (Nakreslete si to!)

Děkuji Vám za pozornost

Nashledanou za týden