Cvičení 11

Příklad 1: Problém k-obarvení grafu se ptá, zda daný graf lze obarvit k barvami tak, aby žádná hrana nespojovala dva vrcholy stejné barvy. (Skutečná barevnost našeho grafu může být i menší než k, o to v problému nejde.) Dokažte, že problém k-obarvení je NP-úplný pro každé (i fixní) $k \geq 3$.

Příklad 2: Hamiltonovská cesta v grafu je takový podgraf, který je isomorfní cestě a prochází všemi vrcholy grafu. (Obdoba Hamiltonovské kružnice.) Dokažte, že problém zjištění existence Hamiltonovské cesty v daném grafu G je NP-úplný.

Příklad 3: Pro jaké k je NP-úplný problém zjistit, zda v daném grafu existuje nezávislá množina velikosti k? (Nezávislá množina je taková podmnožina vrcholů grafu, z níž žádné dva její vrcholy nejsou spojené hranou.) Je tento problém NP-úplný pro fixní k nebo pro proměnné hodnoty k?

Příklad 4: Ukažte, že také následující problém tzv. „kubické kostry“ je NP-úplný: Vstupem je jednoduchý souvislý neorientovaný graf G. Otázkou je, zde lze v grafu G najít takovou kostru, jejíž všechny vrcholy jsou stupně nejvýše 3? (Stupně se samozřejmě myslí v té kostře, ne v G.)
Jedná se vlastně o obdobu Hamiltonovské cesty, která je kostrou, jejíž všechny vrcholy jsou stupně nejvýše 2.

Návod: Použijte (třeba) převod z problému Hamiltonovské cesty.

***Příklad 5:** Ukažte, proč je následující problém NP-úplný: Vstupem je jednoduchý neorientovaný graf G. Ptáme se, zda lze v grafu G najít uzavřený tah procházející všemi vrcholy takový, že nejvýše jednou projdeme znovu vrcholem, kterým jsme již prošli dříve?
Pro osvětlení – u Hamiltonovské kružnice jde o uzavřený tah, který žádný vrchol nezopakuje, kdežto v našem případě je dovoleno tahem zopakovat nejvýše jednou jeden vrchol.

Návod: Použijte třeba převod z problému Hamiltonovské kružnice.

Příklad 6: Sice už víme, že jak Hamiltonovská kružnice, tak i Hamiltonovská cesta jsou NP-úplné, ale zkuste cvičně najít polynomiální převod Hamiltonovské cesty na Hamiltonovskou kružnici (naopak než v Příkladu 2).