Cvičení 0

Příklad 1: Pro každý z následujících formálních zápisů množin uveďte (svými slovy), jaké prvky daná množina obsahuje:

a) $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$

b) $\{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$

c) $\{n \mid n = 2m$ pro nějaké $m \in \mathbb{N}\}$

d) $\{n \mid n = 2m$ pro nějaké $m \in \mathbb{N}$ a $n = 3k$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}\}$

e) $\{n \in \mathbb{Z} \mid n = n + 1\}$

Příklad 2: Popište vhodným formálním zápisem následující množiny:

a) Množina obsahující čísla 1, 10 a 100.

b) Množina obsahující všechna celá čísla větší než 5.

c) Množina obsahující všechna přirozená čísla menší než 5.

d) Množina neobsahující žádné prvky.

e) Množina všech podmnožin dané množiny X.

Příklad 3: Uvažujme množiny $A = \{\mathtt{x}, \mathtt{y}, \mathtt{z}\}$ a $B = \{\mathtt{x}, \mathtt{y}\}$.

a) Je A podmnožinou B?

b) Je B podmnožinou A?

c) Co je $A \cup B$?

d) Co je $A \cap B$?

e) Co je $A \times B$?

f) Co je $\mathcal{P}(B)$?

Příklad 4: Jestliže množina A má a prvků a množina B má b prvků, kolik prvků má množina $A \times B$?

Příklad 5: Jestliže množina C má c prvků, kolik prvků má množina $\mathcal{P}(C)$?

Příklad 6: Nechť $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a $Y = \{6, 7, 8, 9, 10\}$. Unární funkce $f : X \to Y$ a binární funkce $g : X \times Y \to Y$ jsou popsány následujícími tabulkami:

n	$f(n)$
1	6
2	7
3	6
4	7
5	6

g	6	7	8	9	10
1	10	10	10	10	10
2	7	8	9	10	6
3	7	7	8	8	9
4	9	8	7	6	10
5	6	6	6	6	6

a) Jaká je hodnota $f(2)$?

b) Co definičním oborem a oborem hodnot funkce f?

c) Jaká je hodnota $g(2, 10)$?

d) Co definičním oborem a oborem hodnot funkce g?

e) Jaká je hodnota $g(4, f(4))$?

Příklad 7: Uveďte příklad relace, která je:

a) Reflexivní a symetrická, ale není tranzitivní.

b) Reflexivní a tranzitivní, ale není symetrická.

c) Symetrická a tranzitivní, ale není reflexivní.

Příklad 8: Kde je chyba v následujícím důkaze toho, že všichni koně mají stejnou barvu?

TVRZENÍ: Pro libovolnou množinu n koňů platí, že všichni koně v této množině mají stejnou barvu.

Důkaz: Indukcí podle n.

- **Báze:** Pro $n = 1$ tvrzení zjevně platí, protože v množině obsahující právě jednoho koně mají všichni koně stejnou barvu.

- **Indukční krok:** Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n = k$ pro nějaké $k \geq 1$. Ukážeme, že pak platí i pro $n = k + 1$. Vezměme nějakou množinu K obsahující $k + 1$ koňů. Z této množiny odebereme jednoho koně, čímž dostaneme nějakou množinu K_1 obsahující k koňů. Podle indukčního předpokladu mají všichni koně v K_1 stejnou barvu. Nyní vrátíme koně, kterého jsme předtím odebrali, a odebereme nějakého jiného koně, čímž dostaneme množinu K_2 obsahující k koňů. Stejně jako v předchozím případě mají podle indukčního předpokladu všichni koně v K_2 stejnou barvu. Z toho plyne, že všichni koně v množině K mají stejnou barvu.

Příklad 9: Mějme neprázdnou konečnou množinu X, kde $|X| = n$. Uvažujme posloupnost ekvivalencí na této množině $\equiv_0, \equiv_1, \equiv_2, \ldots$, kde každá následující ekvivalence je zjemněním předchozí ekvivalence, tj. pro libovolné $i \geq 0$ platí, že z $x \equiv_{i+1} y$ plyne $x \equiv_i y$.

Označme $[x]_i$ třídu ekvivalence $\equiv_i$, do které patří prvek x, tj. $[x]_i = \{y \in X \mid y \equiv_i x\}$. Definuje množinu C jako množinu všech tříd všech těchto ekvivalencí, tj.

$$C = \bigcup_{i \geq 0} \{[x]_i \mid x \in X\}$$

a) Dokažte, že $|C| \leq 2n - 1$.

b) Ukažte, že pro libovolné $n \geq 1$ může nastat rovnost $|C| = 2n - 1$.

Příklad 10: Co nejvíce zjednodušte dva následující výrazy:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k - 1) \qquad\qquad \prod_{k=1}^{n} 2 \cdot 4^k$$

Příklad 11: n-té harmonické číslo je definováno předpisem

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Ukažte, že pro všechna $n \geq 1$ platí

$$\ln(n + 1) \leq H_n \leq \ln n + 1$$

Příklad 12:

a) Ukažte, že množina všech racionálních čísel $\mathbb{Q}$ je spočetná. (Ukažte, že existuje bijekce z množiny přirozených čísel $\mathbb{N}$ do množiny $\mathbb{Q}$.)

b) Předpokládejme, že množina X je spočetná. Ukažte, že množina všech konečných posloupností prvků z X je spočetná.

c) Ukažte, že množina všech reálných čísel $\mathbb{R}$ nespočetná.

d) Ukažte, že pro libovolnou nekonečnou spočetnou množinu X platí, že množina $\mathcal{P}(X)$ je nespočetná.

Příklad 13: Uveďte příklad uspořádání na množině přirozených čísel, které není úplným uspořádáním.

Příklad 14: Předpokládejme, že $n \geq 1$ je nějaké dané přirozené číslo. Ukažte, že relace

$$a \equiv b \pmod{n}$$

je ekvivalence.
Poznámka: Zápis $a \equiv b \pmod{n}$ znamená, že a i b dávají po dělení n stejný zbytek, tj. $(a \bmod n) = (b \bmod n)$.

Příklad 15: Nechť S je konečná množina a $R \subseteq S \times S$ ekvivalence. Ukažte, že pokud relace R je současně také antisymetrická, pak její třídy ekvivalence jsou jednoprvkové množiny.

Příklad 16: Je následující tvrzení pravdivé? Vyskytuje se v jeho důkaze nějaká chyba?

TVRZENÍ: Jestliže je relace R symetrická a tranzitivní, pak je i reflexivní.

Důkaz: Díky symetrii platí pro libovolné dva prvky a a b, že z aRb plyne bRa. Díky tranzitivitě z toho plyne aRa, čímž je důkaz hotov.

Příklad 17: Předpokládejme, že A a B jsou konečné množiny a $f : A \to B$ je funkce. Ukažte, že:

- Jestliže f je injektivní, pak $|A| \leq |B|$.
- Jestliže f je surjektivní, pak $|A| \geq |B|$.

Příklad 18: Je funkce $f(x) = x + 1$ bijekcí na množině přirozených čísel $\mathbb{N}$? A na množině celých čísel $\mathbb{Z}$?

Příklad 19: Navrhněte a podrobně popište algoritmus, který řeší následující problém:

VSTUP: Orientovaný graf $G = (V, E)$, vrchol $s \in V$.

VÝSTUP: Množina všech vrcholů dosažitelných z s.

Kolik operací váš algoritmus zhruba provede, jestliže dostane na vstupu graf, který má n vrcholů a m hran?

Příklad 20: Uvažujme nějaký binární strom T, kde každý vrchol, který není listem, má dva potomky. Jakou minimální a maximální výšku může mít strom T, jestliže má celkem n vrcholů? (Výškou stromu myslíme vzdálenost od kořene k nejvzdálenějšímu vrcholu.)

Příklad 21: Ukažte, že binární strom, který má n listů, má $n-1$ vrcholů stupně 2 (tj. vrcholů, které mají 2 potomky).