Složitost algoritmu

- Stejný problém může řešit více různých algoritmů
- Potřebovali bychom rozhodnout, který algoritmus je lepší
- Nestačí algoritmy naprogramovat a změřit čas výpočtu
- Potřebovali bychom nějakou kvantitativní charakteristiku (složitost), podle které budeme algoritmy srovnávat
- Nejvhodnější je složitost definovat jako funkci velikosti vstupu

Časová složitost

Problém „Vyhledávání“

Vstup: Sekvence prvků $x, a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Výstup: Pokud $a_i = x$ je výstupem i (pokud jich je více, tak nejmenší), jinak vypíše 0.

```
            READ    R3
            LOAD    $0,R1
cyklus:     READ    R2
            JZERO   R2,nenasel
            ADD     $1,R1
            SUB     R3,R2
            JZERO   R2,nasel
            JUMP    cyklus
nenasel:    LOAD    $0,R1
nasel:      WRITE   R1
            END
```

Časová složitost

```
            READ    R3
            LOAD    $0,R1
cyklus:     READ    R2
            JZERO   R2,nenasel
            ADD     $1,R1
            SUB     R3,R2
            JZERO   R2,nasel
            JUMP    cyklus
nenasel:    LOAD    $0,R1
nasel:      WRITE   R1
            END
```

Pro sekvenci
$9, 1, 8, 9, 7, 2, 0$

R1
R2
R3

Výstup:

Instrukcí: 0

Časová složitost

```
            READ    R3
            LOAD    $0,R1
cyklus:     READ    R2
            JZERO   R2,nenasel
            ADD     $1,R1
            SUB     R3,R2
            JZERO   R2,nasel
            JUMP    cyklus
nenasel:    LOAD    $0,R1
nasel:      WRITE   R1
            END
```

Pro sekvenci
$9, 1, 8, 9, 7, 2, 0$

R1	
R2	
R3	9

Výstup:

Instrukcí: 1

Časová složitost

```
            READ    R3
            LOAD    $0,R1
cyklus:     READ    R2
            JZERO   R2,nenasel
            ADD     $1,R1
            SUB     R3,R2
            JZERO   R2,nasel
            JUMP    cyklus
nenasel:    LOAD    $0,R1
nasel:      WRITE   R1
            END
```

Pro sekvenci
$9, 1, 8, 9, 7, 2, 0$

R1	0
R2	
R3	9

Výstup:

Instrukcí: 2

Časová složitost

```
            READ    R3
            LOAD    $0,R1
cyklus:     READ    R2
            JZERO   R2,nenasel
            ADD     $1,R1
            SUB     R3,R2
            JZERO   R2,nasel
            JUMP    cyklus
nenasel:    LOAD    $0,R1
nasel:      WRITE   R1
            END
```

Pro sekvenci
$9, 1, 8, 9, 7, 2, 0$

R1	0
R2	1
R3	9

Výstup:

Instrukcí: 3

Časová složitost

```
            READ    R3
            LOAD    $0,R1
cyklus:     READ    R2
            JZERO   R2,nenasel
            ADD     $1,R1
            SUB     R3,R2
            JZERO   R2,nasel
            JUMP    cyklus
nenasel:    LOAD    $0,R1
nasel:      WRITE   R1
            END
```

Pro sekvenci
$9, 1, 8, 9, 7, 2, 0$

R1	0
R2	1
R3	9

Výstup:

Instrukcí: 4

Časová složitost

```
            READ    R3
            LOAD    $0,R1
cyklus:     READ    R2
            JZERO   R2,nenasel
            ADD     $1,R1
            SUB     R3,R2
            JZERO   R2,nasel
            JUMP    cyklus
nenasel:    LOAD    $0,R1
nasel:      WRITE   R1
            END
```

Pro sekvenci
$9, 1, 8, 9, 7, 2, 0$

R1	1
R2	1
R3	9

Výstup:

Instrukcí: 5

Časová složitost

```
            READ    R3
            LOAD    $0,R1
cyklus:     READ    R2
            JZERO   R2,nenasel
            ADD     $1,R1
            SUB     R3,R2
            JZERO   R2,nasel
            JUMP    cyklus
nenasel:    LOAD    $0,R1
nasel:      WRITE   R1
            END
```

Pro sekvenci
$9, 1, 8, 9, 7, 2, 0$

R1	1
R2	-8
R3	9

Výstup:

Instrukcí: 6

Časová složitost

```
            READ    R3
            LOAD    $0,R1
cyklus:     READ    R2
            JZERO   R2,nenasel
            ADD     $1,R1
            SUB     R3,R2
            JZERO   R2,nasel
            JUMP    cyklus
nenasel:    LOAD    $0,R1
nasel:      WRITE   R1
            END
```

Pro sekvenci
$9, 1, 8, 9, 7, 2, 0$

R1	1
R2	-8
R3	9

Výstup:

Instrukcí: 7

Časová složitost

```
            READ    R3
            LOAD    $0,R1
cyklus:     READ    R2
            JZERO   R2,nenasel
            ADD     $1,R1
            SUB     R3,R2
            JZERO   R2,nasel
            JUMP    cyklus
nenasel:    LOAD    $0,R1
nasel:      WRITE   R1
            END
```

Pro sekvenci
$9, 1, 8, 9, 7, 2, 0$

R1	1
R2	-8
R3	9

Výstup:

Instrukcí: 8

Časová složitost

```
            READ    R3
            LOAD    $0,R1
cyklus:     READ    R2
            JZERO   R2,nenasel
            ADD     $1,R1
            SUB     R3,R2
            JZERO   R2,nasel
            JUMP    cyklus
nenasel:    LOAD    $0,R1
nasel:      WRITE   R1
            END
```

Pro sekvenci
$9, 1, 8, 9, 7, 2, 0$

R1	1
R2	8
R3	9

Výstup:

Instrukcí: 9

Časová složitost

```
            READ    R3
            LOAD    $0,R1
cyklus:     READ    R2
            JZERO   R2,nenasel
            ADD     $1,R1
            SUB     R3,R2
            JZERO   R2,nasel
            JUMP    cyklus
nenasel:    LOAD    $0,R1
nasel:      WRITE   R1
            END
```

Pro sekvenci
$9, 1, 8, 9, 7, 2, 0$

R1	1
R2	8
R3	9

Výstup:

Instrukcí: 10

Časová složitost

```
            READ    R3
            LOAD    $0,R1
cyklus:     READ    R2
            JZERO   R2,nenasel
            ADD     $1,R1
            SUB     R3,R2
            JZERO   R2,nasel
            JUMP    cyklus
nenasel:    LOAD    $0,R1
nasel:      WRITE   R1
            END
```

Pro sekvenci
$9, 1, 8, 9, 7, 2, 0$

R1	2
R2	8
R3	9

Výstup:

Instrukcí: 11

Časová složitost

```
            READ    R3
            LOAD    $0,R1
cyklus:     READ    R2
            JZERO   R2,nenasel
            ADD     $1,R1
            SUB     R3,R2
            JZERO   R2,nasel
            JUMP    cyklus
nenasel:    LOAD    $0,R1
nasel:      WRITE   R1
            END
```

Pro sekvenci
$9, 1, 8, 9, 7, 2, 0$

R1	2
R2	-1
R3	9

Výstup:

Instrukcí: 12

Časová složitost

```
            READ    R3
            LOAD    $0,R1
cyklus:     READ    R2
            JZERO   R2,nenasel
            ADD     $1,R1
            SUB     R3,R2
            JZERO   R2,nasel
            JUMP    cyklus
nenasel:    LOAD    $0,R1
nasel:      WRITE   R1
            END
```

Pro sekvenci
$9, 1, 8, 9, 7, 2, 0$

R1	2
R2	-1
R3	9

Výstup:

Instrukcí: 13

Časová složitost

```
            READ    R3
            LOAD    $0,R1
cyklus:     READ    R2
            JZERO   R2,nenasel
            ADD     $1,R1
            SUB     R3,R2
            JZERO   R2,nasel
            JUMP    cyklus
nenasel:    LOAD    $0,R1
nasel:      WRITE   R1
            END
```

Pro sekvenci
$9, 1, 8, 9, 7, 2, 0$

R1	2
R2	-1
R3	9

Výstup:

Instrukcí: 14

Časová složitost

```
            READ    R3
            LOAD    $0,R1
cyklus:     READ    R2
            JZERO   R2,nenasel
            ADD     $1,R1
            SUB     R3,R2
            JZERO   R2,nasel
            JUMP    cyklus
nenasel:    LOAD    $0,R1
nasel:      WRITE   R1
            END
```

Pro sekvenci
$9, 1, 8, 9, 7, 2, 0$

R1	2
R2	9
R3	9

Výstup:

Instrukcí: 15

Časová složitost

```
            READ    R3
            LOAD    $0,R1
cyklus:     READ    R2
            JZERO   R2,nenasel
            ADD     $1,R1
            SUB     R3,R2
            JZERO   R2,nasel
            JUMP    cyklus
nenasel:    LOAD    $0,R1
nasel:      WRITE   R1
            END
```

Pro sekvenci
$9, 1, 8, 9, 7, 2, 0$

R1	2
R2	9
R3	9

Výstup:

Instrukcí: 16

Časová složitost

```
            READ    R3
            LOAD    $0,R1
cyklus:     READ    R2
            JZERO   R2,nenasel
            ADD     $1,R1
            SUB     R3,R2
            JZERO   R2,nasel
            JUMP    cyklus
nenasel:    LOAD    $0,R1
nasel:      WRITE   R1
            END
```

Pro sekvenci
$9, 1, 8, 9, 7, 2, 0$

R1	3
R2	9
R3	9

Výstup:

Instrukcí: 17

Časová složitost

```
            READ    R3
            LOAD    $0,R1
cyklus:     READ    R2
            JZERO   R2,nenasel
            ADD     $1,R1
            SUB     R3,R2
            JZERO   R2,nasel
            JUMP    cyklus
nenasel:    LOAD    $0,R1
nasel:      WRITE   R1
            END
```

Pro sekvenci
$9, 1, 8, 9, 7, 2, 0$

R1	3
R2	0
R3	9

Výstup:

Instrukcí: 18

Časová složitost

```
            READ    R3
            LOAD    $0,R1
cyklus:     READ    R2
            JZERO   R2,nenasel
            ADD     $1,R1
            SUB     R3,R2
            JZERO   R2,nasel
            JUMP    cyklus
nenasel:    LOAD    $0,R1
nasel:      WRITE   R1
            END
```

Pro sekvenci
$9, 1, 8, 9, 7, 2, 0$

R1	3
R2	0
R3	9

Výstup:

Instrukcí: 19

Časová složitost

```
            READ    R3
            LOAD    $0,R1
cyklus:     READ    R2
            JZERO   R2,nenasel
            ADD     $1,R1
            SUB     R3,R2
            JZERO   R2,nasel
            JUMP    cyklus
nenasel:    LOAD    $0,R1
nasel:      WRITE   R1
            END
```

Pro sekvenci
$9, 1, 8, 9, 7, 2, 0$

R1	3
R2	0
R3	9

Výstup: 3

Instrukcí: 20

Časová složitost

```
            READ    R3
            LOAD    $0,R1
cyklus:     READ    R2
            JZERO   R2,nenasel
            ADD     $1,R1
            SUB     R3,R2
            JZERO   R2,nasel
            JUMP    cyklus
nenasel:    LOAD    $0,R1
nasel:      WRITE   R1
            END
```

Pro sekvenci
$9, 1, 8, 9, 7, 2, 0$

R1	3
R2	0
R3	9

Výstup: 3

Instrukcí: 21

- Počet instrukcí v uvedeném příkladě: $2 + 2 * 6 + 5 + 2 = 21$
- Pokud najde i, tž. $a_i = x$: $2 + (i - 1) * 6 + 5 + 2 = 6i + 3$
- Pokud nenajde takové i: $2 + n * 6 + 2 + 3 = 6n + 7$

Časová složitost

Definice

Délka výpočtu algoritmu $\mathcal{A}$ na vstupu x rozumíme počet kroků stroje RAM implementujícího algoritmus $\mathcal{A}$, které vykoná na vstupu x až do svého zastavení.

Definice

Časová složitost algoritmu $\mathcal{A}$ (v nejhorším případě) je funkce $t_{\mathcal{A}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, kde $t_{\mathcal{A}}(n)$ udává maximální délku výpočtu mezi všemi vstupy x délky n.

Poznámka: Předpokládá se, že výpočet stroje RAM vždy skončí. Jako velikost vstupu uvažujeme počet znaků, kterými je vstup zapsán.
Příklad: V příkladu s vyhledáváním uvažujme, že na vstupu jsou jen jednobytová čísla. Abeceda k zapsání vstupu je $\{0, 1, \ldots, 255\}$. Nejhorší případ nastává, pokud není nenalezeno hledané číslo.
Složitost je $t_{\mathcal{A}}(n) = (n-2) * 6 + 7 = 6n - 5$.

Časová složitost

Definice

Časová složitost algoritmu $\mathcal{A}$ **v nejlepším případě** je funkce $t_{\mathcal{A}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, kde $t_{\mathcal{A}}(n)$ udává minimální délku výpočtu mezi všemi vstupy x délky n.

Příklad: V našem případě je časová složitost v nejlepším případě konstantní funkce $t_{\mathcal{A}}(n) = 9$. Nejrychleji totiž výpočet skončí, jestliže hned první číslo prohledávané posloupnosti je ono hledané.

Poznámka: Časovou složitost v nejlepším případě většinou nemá smysl uvažovat. Jde často o konstantní funkci nebo je dána nějakými triviálními vstupy.

Časová složitost

Definice

Časová složitost algoritmu $\mathcal{A}$ **v průměrném případě** je funkce $t_{\mathcal{A}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, kde $t_{\mathcal{A}}(n)$ udává průměrnou délku výpočtu mezi všemi vstupy x délky n (neboli střední hodnotu délky výpočtu na pravděpodobnostním prostoru všech vstupů).

Příklad: Uvažujme v našem vyhledávání jednobytová čísla. Spočítáme průměrnou složitost pro $n = 5$ (uvažujeme jen správné vstupy délky 5).

- x,x,y,z,0: možností: 255^3, délka výpočtu: $6 \cdot 1 + 3 = 9$
- x,y,x,z,0: možností: $255^2 \cdot 254$, délka výpočtu: $6 \cdot 2 + 3 = 15$
- x,y,z,x,0: možností: $255 \cdot 254^2$, délka výpočtu: $6 \cdot 3 + 3 = 21$
- x,y,z,u,0: možností: $255^4 - (255^3 + 255^2 \cdot 254 + 255 \cdot 254^2)$, délka výpočtu: $6 \cdot 3 + 7 = 25$
- Průměr tedy je $t_{\mathcal{A}}(5) = (255^3 \cdot 9 + 255^2 \cdot 254 \cdot 15 + 255 \cdot 254^2 \cdot 21 + (255^4 - (255^3 + 255^2 \cdot 254 + 255 \cdot 254^2)) \cdot 25)/255^4 = 24.88$

Časová složitost

Obecně by se dala složitost vyjádřit:

$$t_{\mathcal{A}}(n) = \frac{(255^{n-1} - \sum_{i=1}^{n-2} 255^i 254^{n-2-i})(6n-5)}{255^{n-1}} +$$

$$+ \frac{\sum_{i=1}^{n-2}(255^i 254^{n-2-i}(6n-6i-3))}{255^{n-1}}$$

Poznámka:

- Časová složitost v průměrném případě většinou nejvíce vypovídá o reálné složitosti algoritmu v praxi.
- Je obvykle nejtěžší ji vyjádřit.
- Často není podstatný rozdíl mezi složitostí v průměrném a nejhorším případě. Někdy je ale rozdíl významný.

Rychlost růstu funkcí

Program zpracovává vstup velikosti n.
Předpokládejme, že pro vstup velikosti n provede $f(n)$ operací, a že provedení jedné operace trvá $1\,\mu\mathrm{s}$ ($10^{-6}\,\mathrm{s}$).

	n							
$f(n)$	20	40	60	80	100	200	500	1000
n	$20\,\mu$s	$40\,\mu$s	$60\,\mu$s	$80\,\mu$s	0.1 ms	0.2 ms	0.5 ms	1 ms
$n \log n$	$86\,\mu$s	0.213 ms	0.354 ms	0.506 ms	0.664 ms	1.528 ms	4.48 ms	9.96 ms
n^2	0.4 ms	1.6 ms	3.6 ms	6.4 ms	10 ms	40 ms	0.25 s	1 s
n^3	8 ms	64 ms	0.216 s	0.512 s	1 s	8 s	125 s	16.7 min.
n^4	0.16 s	2.56 s	12.96 s	42 s	100 s	26.6 min.	17.36 hod.	11.57 dní
2^n	1.05 s	12.75 dní	36560 let	$38.3 \cdot 10^9$ let	$40.1 \cdot 10^{15}$ let	$50 \cdot 10^{45}$ let	$10.4 \cdot 10^{136}$ let	–
$n!$	77147 let	$2.59 \cdot 10^{34}$ let	$2.64 \cdot 10^{68}$ let	$2.27 \cdot 10^{105}$ let	$2.96 \cdot 10^{144}$ let	–	–	–

Rychlost růstu funkcí

Uvažujme 3 algoritmy se složitostmi $t_1(n) = n, t_2(n) = n^3, t_3(n) = 2^n$. Náš počítač zvládne v reálném čase (kolik jsme ochotni počkat) 10^{12} kroků.

Složitost	Velikost vstupu
$t_1(n) = n$	10^{12}
$t_2(n) = n^3$	10^4
$t_3(n) = 2^n$	40

Rychlost růstu funkcí

Uvažujme 3 algoritmy se složitostmi $t_1(n) = n, t_2(n) = n^3, t_3(n) = 2^n$. Náš počítač zvládne v reálném čase (kolik jsme ochotni počkat) 10^{12} kroků.

Složitost	Velikost vstupu
$t_1(n) = n$	10^{12}
$t_2(n) = n^3$	10^4
$t_3(n) = 2^n$	40

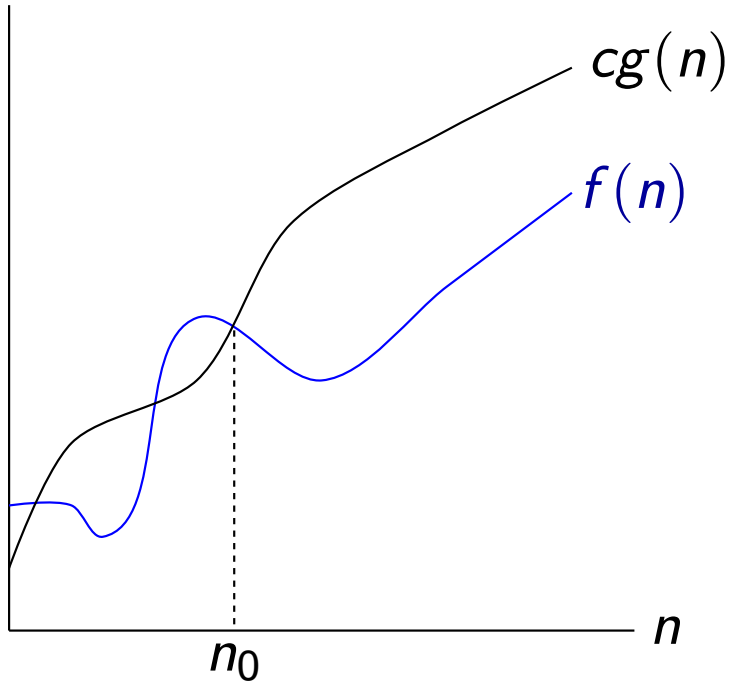
Nyní počítač 1000 násobně zrychlíme. Zvládne tedy 10^{15} kroků.

Složitost	Velikost vstupu	Nárust
$t_1(n) = n$	10^{15}	$1000\times$
$t_2(n) = n^3$	10^5	$10\times$
$t_3(n) = 2^n$	50	$+10$

Asymptotická notace

- Přesnou složitost bývá problém vyjádřit
- Přesná složitost je silně závislá na konkrétním zvoleném modelu a konkrétní implementaci
- Složitost nás většinou zajímá hlavně pro velké vstupy. Pro malé vstupy obvykle i neefektivní algoritmus proběhne rychle
- Ve většině případů pro představu o složitosti stačí nejvýznamnější člen složitostní funkce
- Proto zavádíme tzv. asymptotickou notaci, která nám umožní zanedbat konstanty a méně významné členy funkcí

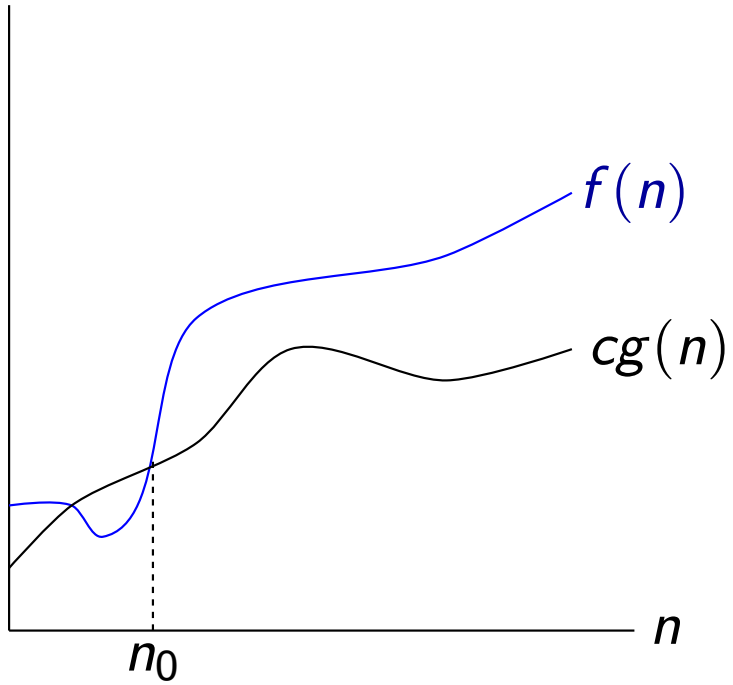
Asymptotická notace



Definice

Pro libovolné dvě funkce $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ řekneme, že $f \in O(g)$, označujeme také jako $f(n) \in O(g(n))$, právě tehdy, když platí $(\exists c > 0)(\exists n_0 \geq 0)(\forall n \geq n_0) : f(n) \leq c\, g(n)$.

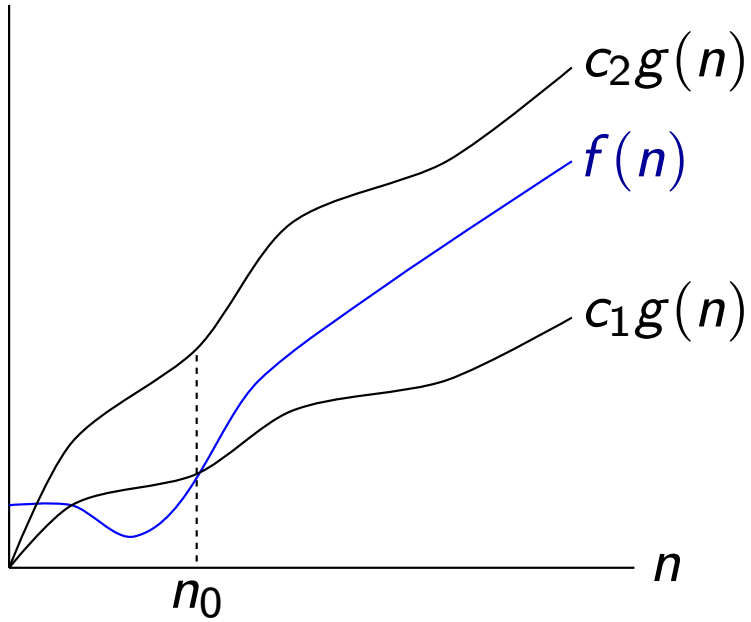
Asymptotická notace



Definice

Pro libovolné dvě funkce $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ řekneme, že $f \in \Omega(g)$, označujeme také jako $f(n) \in \Omega(g(n))$, právě tehdy, když platí $g \in O(f)$ neboli $(\exists c > 0)(\exists n_0 \geq 0)(\forall n \geq n_0) : 0 \leq c\, g(n) \leq f(n)$.

Asymptotická notace



Definice

Pro libovolné dvě funkce $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ řekneme, že $f \in \Theta(g)$, označujeme také jako $f(n) \in \Theta(g(n))$, právě tehdy, když platí $g \in O(f)$ a $f \in O(g)$ neboli
$(\exists c_1 > 0)(\exists c_2 > 0)(\exists n_0 \geq 0)(\forall n \geq n_0) : 0 \leq c_1\, g(n) \leq f(n) \leq c_2\, g(n)$.

Asymptotická notace

Definice

Pro libovolné dvě funkce $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ řekneme, že $f \in o(g)$, označujeme také jako $f(n) \in o(g(n))$, právě tehdy, když platí $(\forall c > 0)(\exists n_0 > 0)(\forall n \geq n_0) : 0 \leq f(n) < c\, g(n)$.

Definice

Pro libovolné dvě funkce $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ řekneme, že $f \in \omega(g)$, označujeme také jako $f(n) \in \omega(g(n))$, právě tehdy, když platí $(\forall c > 0)(\exists n_0 > 0)(\forall n \geq n_0) : 0 \leq c\, g(n) < f(n)$.

Asymptotická notace

Poznámka: Často se píše $f(n) = O(g(n))$ místo $f(n) \in O(g(n))$

Příklad: Při analýze složitosti vyhledávání čísla v posloupnosti jsme dostali $t_{\mathcal{A}}(n) = 6n - 5$. Platí $t_{\mathcal{A}} \in O(n)$. Takže můžeme říct, že složitost našeho algoritmu je v $O(n)$.

Příklad:

$n \in O(n^2)$	$n^3 \in O(n^4)$
$1000n \in O(n)$	$0.00001n^2 - 10^{10}n \in \Theta(10^{10}n^2)$
$2^{log_2 n} \in \Theta(n)$	$n^3 - n^2 log^3 n + 1000n - 10^{100} \in \Theta(n^3)$
$n \in o(n^2)$	$n^3 + 1000n - 10^{100} \notin o(n^3)$
$n^2 \in \omega(n)$	$n^3 + n^2 \in \Omega(n^2)$
$n^3 + 2^n \in \Omega(n^2)$	$n! \in \Omega(2^n)$

Složitost algoritmů

- Ne vždy je algoritmus s lepší asymptotickou složitostí výhodnější v praxi
- Můžeme si to ilustrovat na algoritmech pro třídění

Algoritmus	Nejhorší	Průměrný
Bubblesort	$O(n^2)$	$O(n^2)$
Heapsort	$O(n \log n)$	$O(n \log n)$
Quicksort	$O(n^2)$	$O(n \log n)$

- Quicksort má horší asymptotickou složitost v nejhorším případě než heapsort, stejnou asymptotickou složitost v průměrném případě a přesto je v praxi nejrychlejší

Složitost algoritmů

- Ne vždy je vhodné uvažovat složitost jako funkci počtu znaků abecedy potřebných pro zápis vstupu
- Pro grafy často bývá složitost vyjádřena jako funkce dvou parametrů: m (počet hran) a n (počet vrcholů)
- Pro operace s posloupnostmi čísel (třídění, vyhledávání,...) bývá n počet čísel a ne cifer nebo bitů
- Pro rozhodování o prvočíselnosti nemůžeme brát $n = 1$ (vstupem je jedno číslo), ale uvažujeme počet bitů (popřípadě cifer)
- Při práci s maticemi uvažujeme většinou n jako počet řádků a m počet sloupců (popř. jen n je-li sloupců a řádku přibližně stejně) a ne přímo počet prvků matice

Složitost algoritmů

- O algoritmu s časovou složitostí $t_{\mathcal{A}}(n)$ řekneme, že je:
  logaritmický, pokud $t_{\mathcal{A}}(n) \in \Theta(\log n)$
  lineární, pokud $t_{\mathcal{A}}(n) \in \Theta(n)$
  kvadratický, pokud $t_{\mathcal{A}}(n) \in \Theta(n^2)$
  kubický, pokud $t_{\mathcal{A}}(n) \in \Theta(n^3)$
  polynomiální, pokud $t_{\mathcal{A}}(n) \in \Theta(n^k)$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$
  exponenciální, pokud $t_{\mathcal{A}}(n) \in \Theta(k^n)$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$
- Pro exponenciální složitost se používá také $2^{\Theta(n)}$, protože potom již nemusíme uvažovat různé základy mocniny.
- Pro logaritmickou složitost nehraje roli základ logaritmu, protože $\log_k n \in \Theta(\log_l n)$ pro všechna $k, l > 0$.

Složitost algoritmů

- Zatím jsme uvažovali, že provedení všech instrukcí trvá stejně dlouho
- V praxi mohou být některé instrukce časově náročnější
- Místo počtu instrukcí v nejhorším případě nás může zajímat počet provedení jedné konkrétní instrukce v nejhorším případě
- Pokud známe časy provedení jednotlivých instrukcí, můžeme si spočítat počty jejich provedení a čas běhu potom dostaneme jako $\sum_i n_i t_i$, kde n_i je počet provedení instrukce i a t_i je čas potřebný k vykonání této instrukce

Prostorová (paměťová) složitost algoritmů

- Zatím jsme se zajímali o čas, který potřebujeme k výpočtu
- Často bývá kritickou velikost paměti

Definice

Velikost paměti stroje RAM $\mathcal{M}$ na vstupu x rozumíme počet buněk paměti, které stroj $\mathcal{M}$ během svého výpočtu navštíví.

Definice

Prostorová složitost stroje RAM $\mathcal{M}$ (v nejhorším případě) je funkce $s_{\mathcal{M}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, kde $s_{\mathcal{A}}(n)$ udává maximální velikost paměti ze všech výpočtů nad vstupy x délky n.

Prostorová (paměťová) složitost algoritmů

- Pro konkrétní problém můžeme mít dva algoritmy takové, že jeden má menší prostorovou složitost a druhý zase časovou složitost
- Prostorová složitost je někdy kritičtější než časová. Když dojde paměť, ve výpočtu se nedá pokračovat
- Je-li časová složitost algoritmu v $O(f(n))$ je i prostorová v $O(f(n))$ (počet buněk navšívených RAMem nemůže být větší než počet kroků, protože v každém kroku navšíví maximálně jednu buňku)

Složitost problémů

- Zřejmě jsou některé problémy „složitější“ než jiné
- Jestliže pro nějaký problém známe algoritmus v $\Theta(n^3)$, který jej řeší, máme horní odhad pro složitost problému. Ale může existovat algoritmus v $\Theta(n^2)$, který daný problém také řeší.

Definice

Pro funkci $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rozumíme **třídou časové složitosti** $\mathcal{T}(f)$ (nebo $\mathcal{T}(f(n))$) množinu těch problémů, které jsou řešeny RAMy s časovou složitostí v $O(f(n))$.

Definice

Pro funkci $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rozumíme **třídou prostorové složitosti** $\mathcal{S}(f)$ (nebo $\mathcal{S}(f(n))$) množinu těch problémů, které jsou řešeny RAMy s prostorovou složitostí v $O(f(n))$.

Složitost problémů

- Pokud chceme ukázat, že problém je v $\mathcal{T}(f(n))$ stačí najít algoritmus se složitostí v $O(f(n))$ řešící daný problém.
- Pokud chceme ukázat, že problém není v $\mathcal{T}(f(n))$, musí ukázat, že neexistuje žádný algoritmus se složitostí v $O(f(n))$ řešící daný problém. To je obvykle dost obtížné.
- Třídy složitosti jsou závislé na zvoleném modelu (v našem případě stroj RAM). Pro jiný model bychom mohli dostat jiné třídy.

Třída PTIME

Definice

$$\text{PTIME} = \cup_{k=0}^{\infty} \mathcal{T}(n^k)$$

- Třída PTIME se ukazuje jako vhodná aproximace zvládnutelných problémů
- Není to ale přesné, algoritmus v $\Theta(n^{1000000})$ se moc za rychlý považovat nedá. Naopak i algoritmy s exponenciální složitostí mohou být použitelné, pokud nejsou určeny pro velké vstupy.
- Pokud je znám pro nějaký problém polynomiální algoritmus, často se najde i polynomiální algoritmus s nízkým stupněm polynomu (řekněme menším než 6)
- Třída PTIME není závislá na zvoleném (rozumném) modelu

Složitosti konkrétních problémů

Mějme dáno pole `A[]`

- Nalezení konkrétního prvku v `A` lineárním prohledáváním je v $O(n)$.
- Časová složitost setřídění `A` je $O(n \log n)$.
- V setříděném poli `A` lze nalézt prvek binárním vyhledáváním v čase $O(\log n)$.

Vezměme aritmetiku dlouhých n-místných čísel.

- Sečíst dvě taková čísla lze v čase $O(n)$ a vynásobit v čase $O(n^2)$ běžnými "školními" postupy.
- Sofistikovaný Strassenův algoritmus vynásobí dvě n-místná čísla v čase $O(n \log n \log \log n)$.

Mějme daný graf G s n vrcholy a m hranami ($m = O(n^2)$).

- Komponenty souvislosti G najdeme v čase $O(n + m)$.
- Nejkratší cestu mezi dvěma vrcholy vypočteme v čase $O(n + m \log n)$.
- Minimální kostru nalezneme hladově v čase $O(n + m \log n)$.
- Rovinné nakreslení grafu lze nalézt (pokud existuje) v čase $O(n)$.