460-4005/01: Teoretická informatika (TI)
přednáška 9

prof. RNDr Petr Jančar, CSc.

katedra informatiky FEI VŠB-TUO
www.cs.vsb.cz/jancar

LS 2010/2011

Turingovy stroje

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$$

$\Sigma \subseteq \Gamma$; $\Gamma \setminus \Sigma$ vždy obsahuje speciální (prázdný) symbol $\Box$

$$\delta : (Q - F) \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{-1, 0, +1\}$$

(základní varianta je tedy *deterministický* Turingův stroj)

Příklad TS (tedy "programu", de facto množiny instrukcí), rozhodujícího příslušnost k jazyku $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$:

$(q_0, a) \to (q_1, \bar{a}, +1)$
$(q_1, x) \to (q_1, x, +1)$ *pro* $x \in \{a, \bar{b}\}$
$(q_1, b) \to (q_2, \bar{b}, +1)$
$\ldots$

výpočet = (legální) posloupnost konfigurací ...
$(q_0 aaabbbccc) \vdash (\bar{a} q_1 aabbbccc) \vdash (\bar{a} a q_1 abbbccc) \vdash (\bar{a} aa q_1 bbbccc) \ldots$
$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ definuje *částečné zobrazení* $f_M : \Sigma^* \to \Gamma^*$.

(Výpočetní) problémy, rozhodovací (ANO/NE) problémy

Název: Zdvojení slova v abecedě $\{a, b\}$.
Vstup (Instance): $w \in \{a, b\}^*$.
Výstup: ww.

Název: Příslušnost k jazyku $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$.
Vstup: $w \in \{a, b, c\}^*$.
Výstup: ANO, když $w \in L$, NE jinak.

Název: Příslušnost k jazyku $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$.
Vstup: $w \in \{a, b, c\}^*$.
Otázka: je $w \in L$?

Problémy řešitelné Turingovými stroji

Tabulka problému P ...... I/O tabulka Turingova stroje M (zobrazení f_M) (výstup pro w je nedefinován, označeno $\perp$, když výpočet M pro w je nekonečný)

Vstup	Příslušný defin. výstup
ε	ε
0	00
1	11
00	0000
01	0101
10	1010
11	1111
000	000000
...	...

Vstup	Výstup výpočtu nebo $\perp$
ε	
0	
1	
00	
01	
10	
11	
000	
...	...

Problém P je *(turingovsky) řešitelný*, jestliže existuje TS M, jehož I/O tabulka se rovná tabulce P

Rozhodovací (ANO/NE) problémy

ANO/NE problém je rozhodnutelný, jestliže ...

Název: Sedmičky v Ludolfově čísle π
Vstup: přirozené číslo k
Otázka: Existuje v desetinném rozvoji čísla π úsek sedmiček délky k ?

Vstup	Výstup	Vstup	Výstup	Vstup	Výstup	Vstup	Výstup
0	Ano	0	Ano	0	Ano	0	Ano
1	Ano	1	Ne	1	Ano	1	Ano
2	Ano	2	Ne	2	Ne	2	Ano
3	Ano	3	Ne	3	Ne	3	Ne
4	Ano	4	Ne	4	Ne	4	Ne
5	Ano	5	Ne	5	Ne	5	Ne
...	...	...	...	...	...	...	...

...

Church-Turingova teze

Algoritmus = Turingův stroj

algoritmická neřešitelnost
(algoritmická) nerozhodnutelnost

Simulace mezi variantami Turingových strojů

Dvoupáskový Turingův stroj (2P-TS) $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$, kde

$$\delta : (Q - F) \times \Gamma \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{-1, 0, +1\} \times \Gamma \times \{-1, 0, +1\},$$

Příklad (zdvojení slova):

$$\begin{aligned}
&(q_0, x, \square) \to (q_0, x, +1, x, +1) \; \textit{pro } x \in \{a, b\} \\
&(q_0, \square, \square) \to (q_1, \square, -1, \square, 0) \\
&(q_1, x, \square) \to (q_1, x, -1, \square, 0) \; \textit{pro } x \in \{a, b\} \\
&(q_1, \square, \square) \to (q_2, \square, +1, \square, 0) \\
&(q_2, x, \square) \to (q_2, x, +1, x, +1) \; \textit{pro } x \in \{a, b\} \\
&(q_2, \square, \square) \to (q_{halt}, \square, 0, \square, 0)
\end{aligned}$$

Obecný dvoupáskový Turingův stroj (2P-TS) M lze simulovat jednopáskovým dvouhlavým Turingovým strojem (1P-2H-TS) M'. Stroje M, M' mají tedy stejné *(vstupně/výstupní) chování*, tj. realizují tutéž (částečnou) funkci $f_M = f_{M'}$ (mají tutéž I/O tabulku).
Obecný 1P-2H-TS M' lze simulovat standardním strojem, tedy jednopáskovým jednohlavým Turingovým strojem.

Omezení abecedy

Bez ztráty obecnosti se můžeme omezit na Turingovy stroje s abecedami
$\Sigma = \{0, 1\}$,
$\Gamma = \{0, 1, \square\}$,

jejichž I/O zobrazení je typu

$\{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^* \cup \{\perp\}$

Model RAM (příklad konkrétního stroje = programu)

```
1   READ
2   JZERO 13
3   STORE 2
4   LOAD 3
5   ADD =1
6   STORE 3
7   STORE 1
8   LOAD 2
9   STORE *8
10  ADD 4
11  STORE 4
12  JUMP 1

13  LOAD 4
14  DIV 3
15  STORE 5

16  LOAD =1

17  STORE 1
18  SUB 3
19  JGTZ 26
20  LOAD *8
21  SUB 5
22  WRITE
23  LOAD 1
24  ADD =1
25  JUMP 17

26  HALT
```

Simulace mezi RAMy a Turingovými stroji

Je vcelku jasné, jak lze jakýkoli Turingův stroj s jednostranně nekonečnou páskou přímočaře simulovat RAMem.

Naopak je to technicky komplikovanější, ale myšlenkově to pro programátory zase není tak náročné – simulaci RAMu vícepáskovým Turingovým strojem ilustruje jedna z animací.

Nerozhodnutelné problémy

Název:Halting Problem
Vstup: Turingův stroj M, vstupní slovo w
Otázka: Zastaví se (výpočet stroje) M, když začne pracovat na (vstupním) slově w ?

Název:Diagonal Halting Problem
Vstup: Turingův stroj M
Otázka: Zastaví se (výpočet stroje) M, když začne pracovat na (vstupním) slově, které je kódem M ?

Převeditelnost mezi problémy

Problém P_1 je algoritmicky převeditelný (stručněji převeditelný) na problém P_2,

jestliže …

Částečná rozhodnutelnost, Postova věta

Připomněli jsme *částečnou rozhodnutelnost* problémů. Přitom byla podstatná následující definice, kterou zde formulujeme v řeči „tabulek“ (problém P určuje tabulku T_P, stroj M definuje tabulku T_M):

> *Turingův stroj M částečně rozhoduje problém P (typu* ANO/NE*), jestliže u každého vstupu, pro nějž je v T_P* ANO*, je v tabulce T_M výstup* ANO *a pro každý vstup, pro nějž je v T_P* NE*, je v T_M výstup* NE *nebo znak $\perp$ (nedefinováno).*

(Pro vstupy, kterým problém P přiřazuje odpověď NE, nemusí stroj M svůj výpočet skončit.)

O problému řekneme, že je *částečně rozhodnutelný*, jestliže existuje algoritmus (Turingův stroj), který jej částečně rozhoduje.
Speciálně jsme si uvědomili Postovu větu (Věta 7.2.)
Uvědomili jsme si také, že problém HP je částečně rozhodnutelný a že tedy $\overline{\text{HP}}$ (doplňkový problém k problému HP) není (ani) částečně rozhodnutelný.