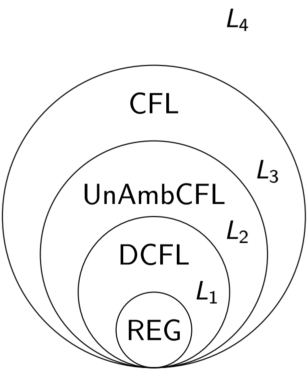
460-4005/01: Teoretická informatika (TI)
přednáška 8

prof. RNDr Petr Jančar, CSc.

katedra informatiky FEI VŠB-TUO
www.cs.vsb.cz/jancar

LS 2010/2011

Hierarchie jazyků



$L_4 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$

$L_3 = \{a^i b^j c^k \mid i = j \vee j = k\}$

$L_2 = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$

$L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$

Pumping lemma pro bezkontextové jazyky

Věta. Nechť L je bezkontextový jazyk. Pak existuje přirozené číslo n tž. každé slovo $z \in L$, $|z| \geq n$, (tedy každé 'dlouhé' slovo z jazyka L) lze psát ve tvaru $z = uvwxy$, přičemž platí

- $vx \neq \varepsilon$,
- $|vwx| \leq n$,
- pro vš. $i \geq 0$ je $uv^i wx^i y \in L$.

Např. pro jazyky

- $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$
- $\{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$
- $\{\, 0^m 1^n 0^m \mid m = 2n \,\}$

se dá snadno ukázat, že bezkontextové nejsou.

Uzávěrové vlastnosti třídy CFL

Snadnými konstrukcemi se prokáže, že CFL je uzavřena např. vůči těmto operacím:

- sjednocení ($S \longrightarrow S_1 \mid S_2$)
- zřetězení ($S \longrightarrow S_1 S_2$)
- iterace ($S \longrightarrow \varepsilon \mid S_1 S$)
- zrcadlový obraz ($A \longrightarrow \alpha \ \ldots \ A \longrightarrow (\alpha)^R$)

CFL ale není uzavřena např. vůči

- průniku ($\{a^i b^j c^k \mid i = j\} \cap \{a^i b^j c^k \mid j = k\} = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$)
- doplňku (z předchozího díky de Morganovým pravidlům; konkrétně např. doplňky jazyků $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ či $\{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$ jsou bezkontextové, ale doplňky těchto doplňků [tedy tyto jazyky] bezkontextové nejsou)

Turingovy stroje

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$$

$\Sigma \subseteq \Gamma$; $\Gamma \setminus \Sigma$ vždy obsahuje speciální (prázdný) symbol $\Box$

$$\delta : (Q - F) \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{-1, 0, +1\}$$

(základní varianta je tedy *deterministický* Turingův stroj)

Příklad TS (tedy "programu", de facto množiny instrukcí), rozhodujícího příslušnost k jazyku $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$:

$$\begin{array}{l} (q_0, a) \to (q_1, \bar{a}, +1) \\ (q_1, x) \to (q_1, x, +1) \textit{ pro } x \in \{a, \bar{b}\} \\ (q_1, b) \to (q_2, \bar{b}, +1) \\ \ldots \end{array}$$

výpočet = (legální) posloupnost konfigurací ...
$(q_0 aaabbbccc) \vdash (\bar{a} q_1 aabbbccc) \vdash (\bar{a} a q_1 abbbccc) \vdash (\bar{a} aa q_1 bbbccc) \ldots$
$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ definuje *částečné zobrazení* $f_M : \Sigma^* \to \Gamma^*$.

(Výpočetní) problémy, rozhodovací (ANO/NE) problémy

Název: Zdvojení slova v abecedě $\{a, b\}$.
Vstup (Instance): $w \in \{a, b\}^*$.
Výstup: ww.

Název: Příslušnost k jazyku $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$.
Vstup: $w \in \{a, b, c\}^*$.
Výstup: ANO, když $w \in L$, NE jinak.

Název: Příslušnost k jazyku $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$.
Vstup: $w \in \{a, b, c\}^*$.
Otázka: je $w \in L$?

Problémy řešitelné Turingovými stroji

Tabulka problému P ...... I/O tabulka Turingova stroje M (zobrazení f_M) (výstup pro w je nedefinován, označeno $\perp$, když výpočet M pro w je nekonečný)

Vstup	Příslušný výstup
ε	ε
0	00
1	11
00	0000
01	0101
10	1010
11	1111
000	000000
...	...

Problém P je *(turingovsky) řešitelný*, jestliže existuje TS M, jehož I/O tabulka se rovná tabulce P

Simulace mezi variantami Turingových strojů

Dvoupáskový Turingův stroj (2P-TS) $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$, kde

$$\delta : (Q - F) \times \Gamma \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{-1, 0, +1\} \times \Gamma \times \{-1, 0, +1\},$$

Příklad (zdvojení slova):

$$(q_0, x, \Box) \to (q_0, x, +1, x, +1) \textit{ pro } x \in \{a, b\}$$
$$(q_0, \Box, \Box) \to (q_1, \Box, -1, \Box, 0)$$
$$(q_1, x, \Box) \to (q_1, x, -1, \Box, 0) \textit{ pro } x \in \{a, b\}$$
$$(q_1, \Box, \Box) \to (q_2, \Box, +1, \Box, 0)$$
$$(q_2, x, \Box) \to (q_2, x, +1, x, +1) \textit{ pro } x \in \{a, b\}$$
$$(q_2, \Box, \Box) \to (q_{halt}, \Box, 0, \Box, 0)$$

Obecný dvoupáskový Turingův stroj (2P-TS) M lze simulovat jednopáskovým dvouhlavým Turingovým strojem (1P-2H-TS) M'. Stroje M, M' mají tedy stejné *(vstupně/výstupní) chování*, tj. realizují tutéž (částečnou) funkci $f_M = f_{M'}$ (mají tutéž I/O tabulku).
Obecný 1P-2H-TS M' lze simulovat standardním strojem, tedy jednopáskovým jednohlavým Turingovým strojem.

```
1   READ
2   JZERO 13
3   STORE 2
4   LOAD 3
5   ADD =1
6   STORE 3
7   STORE 1
8   LOAD 2
9   STORE *8
10  ADD 4
11  STORE 4
12  JUMP 1

13  LOAD 4
14  DIV 3
15  STORE 5
16  LOAD =1

17  STORE 1
18  SUB 3
19  JGTZ 26
20  LOAD *8
21  SUB 5
22  WRITE
23  LOAD 1
24  ADD =1
25  JUMP 17

26  HALT
```