Týden 12

Přednáška se nekoná (velikonoční pondělí).

Partie textu k prostudování

Části 8.3., 8.4., 8.5. (třída PTIME, třída NPTIME, NP-úplné problémy). Kapitola 9 (speciálně Třída PSPACE).

Cvičení

Příklad 12.1

Vysvětlete pojem „NP-úplný problém".
Definujte problémy SAT, 3-SAT, HC, HK, 3-CG a IS (s příklady pozitivních a negativních instancí). Tyto problémy jsou NP-úplné. U každého si alespoň uvědomte algoritmus, prokazující příslušnost k NP.

Příklad 12.2

Uvažujme následující problém (jeden z často uváděných NP-úplných problémů).

NÁZEV: TSP (*problém obchodního cestujícího (* ANO/NE *verze)*)

VSTUP: množina „měst" $\{1, 2, \ldots, n\}$, přir. čísla („vzdálenosti") d_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$); dále číslo ℓ („limit").

OTÁZKA: existuje „okružní jízda" dlouhá nejvýše ℓ, tj. existuje permutace $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ tž. $d(i_1, i_2) + d(i_2, i_3) + \cdots + d(i_{n-1}, i_n) + d(i_n, i_1) \leq \ell$?

Je to rozhodovací (neboli ANO/NE) verze optimalizačního problému. Odvoďte nejdříve, jak vypadá onen optimalizační problém (tedy co je jeho vstupem a co odpovídajícím výstupem).

Dále ukažte nějakou malou (ale ne úplně triviální) instanci (tedy vstup) uvedeného problému TSP, pro niž je odpověď ANO, a instanci, pro niž je odpověď NE.

Pak prokažte (návrhem konkrétního nedeterministického algoritmu), že TSP je v NP.

Nakonec zkuste vymyslet důkaz NP-obtížnosti problému TSP.
(Nápověda. Můžete využít faktu, že problém hamiltonovské kružnice (HK) je NP-úplný.)

Připomenutí bokem: animace ukazují důkaz Cookovy věty, tedy důkaz toho, že SAT je NP-úplný, a dále demonstrují SAT $\triangleleft$ 3-SAT, 3-SAT $\triangleleft$ IS, IS $\triangleleft$ HC, HC $\triangleleft$ HK (a také nyní požadovaný převod HK $\triangleleft$ TSP.)

Příklad 12.3

Uvažujme problém

NÁZEV: ILP (*problém celočíselného lineárního programování*)

VSTUP: Matice A typu $m \times n$ a sloupcový vektor b velikosti m, jejichž prvky jsou celá čísla.

OTÁZKA: Existuje celočíselný sloupcový vektor x (velikosti n) tž. $Ax \geq b$?

Ukažte nejprve nějakou malou (ale ne úplně triviální) instanci (tedy vstup) uvedeného problému ILP, pro niž je odpověď ANO, a instanci, pro niž je odpověď NE.

Vysvětlete přesně, co bychom museli udělat, kdybychom chtěli ukázat, že 3-SAT $\lhd$ ILP.

(Zbytek příkladu je nepovinný.)

Zbude-li čas, zkuste tuto převeditelnost dokázat. Přinejmenším ale uveďte, co bychom mohli říci o složitosti problému ILP poté, co bychom prokázali 3-SAT $\lhd$ ILP.

Dále pouvažujte o tom, zda ILP patří do NP.

Je to tak, ale je to příklad problému, jehož příslušnost k NP není ihned zřejmá – na rozdíl od dřívějších příkladů problémů v NP.

(Spokojíme se zde jen s odkazem na fakt, že se dá ukázat, že existuje-li řešení nerovnosti $Ax \geq b$, pak existuje i řešení „dostatečně malé“ – jeho zápis je polynomiální vzhledem k zápisu A a b; řešení se tedy dá v polynomiálním čase „uhodnout“ a ověřit.)

Příklad 12.4

Definujte třídu PSPACE a pojem „PSPACE-úplný problém“; příkladem je:

NÁZEV: QBF (*problém pravdivosti kvantifikovaných booleovských formulí*)

VSTUP: formule $(\exists x_1)(\forall x_2)(\exists x_3)(\forall x_4)\dots(\exists x_{2n-1})(\forall x_{2n})\mathcal{F}(x_1, x_2, \dots, x_{2n})$, kde $\mathcal{F}(x_1, x_2, \dots, x_{2n})$ je booleovská formule v konjunktivní normální formě.

OTÁZKA: je daná formule pravdivá?

Uveďte nějaké malé, ale netriviální, příklady pozitivních a negativních instancí problému.

(Zbytek příkladu je nepovinný.)

Definujte pravidla hry pro hráče Eva („existenční hráč“) a Adam („univerzální hráč“), kteří postupně nasazují hodnoty proměnných. Jde o to, definovat hru tak, aby Eva měla vítěznou strategii (mimochodem, co to je vítězná strategie?) právě tehdy, když je zadaná formule pravdivá (a Adam měl vítěznou strategii právě tehdy, když je zadaná formule nepravdivá).

Zbude-li čas, nakonec ilustrujte na malém příkladu, jak lze obecnou plně kvantifikovanou booleovskou formuli ϕ převést (v polynomiálním čase) na ekvivalentní ϕ', která je ve tvaru požadovaném pro vstup problému QBF.