Týden 9

Přednáška - první část

Připomeňme si, co to znamená rozhodnutelnost problému, v řeči „tabulek“: problém P (typu Ano/Ne) je rozhodnutelný, jestliže existuje algoritmus [Turingův stroj] M takový, že vstupně-výstupní tabulka T_M je konzistentní s tabulkou T_P (stejným vstupům odpovídají stejné výstupy).

Pro zajímavost si všimněme, že o konkrétním problému můžeme zjistit, že je rozhodnutelný, aniž jsme schopni určit konkrétní algoritmus, který jej řeší. Podívejme se např. na následující problém.

Název: 7vPi (*Sedmičky v Ludolfově čísle* π)

Vstup: Přirozené číslo k.

Otázka: Existuje v desetinném rozvoji čísla π úsek sedmiček délky k ?

Je jasné, že problému 7vPi odpovídá jedna z následujících tabulek.

Vstup	Výstup	Vstup	Výstup	Vstup	Výstup	Vstup	Výstup
0	Ano	0	Ano	0	Ano	0	Ano
1	Ano	1	Ne	1	Ano	1	Ano
2	Ano	2	Ne	2	Ne	2	Ano
3	Ano	3	Ne	3	Ne	3	Ne
4	Ano	4	Ne	4	Ne	4	Ne
5	Ano	5	Ne	5	Ne	5	Ne
...	...	...	...	...	...	...	...

...

Ke každé tabulce umíme snadno navrhnout příslušný algoritmus, takže problém 7vPi je jistě rozhodnutelný. Nevíme ovšem, která tabulka je ta pravá, takže nejsme schopni předložit konkrétní algoritmus a prokázat, že řeší problém 7vPi.

Na rozšiřující přednášce mj. dokážeme nerozhodnutelnost tzv. diagonálního problému zastavení:

Název: DHP (*Diagonal Halting Problem*)

Vstup: Turingův stroj M.

Otázka: Zastaví se (výpočet stroje) M, když začne pracovat na (vstupním) slově, které je kódem M ?

Převeditelnost mezi problémy

Ujasnili jsme si (i využitím tabulek problémů), co to znamená, když se řekne, že

> problém P_1 je *algoritmicky převeditelný* (stručněji *převeditelný*) na problém P_2; označujeme $P_1 \leadsto P_2$: existuje algoritmus, který k instanci I_1 problému P_1 sestrojí instanci I_2 problému P_2 tak, že odpověď na otázku pro I_1 v P_1 je stejná jakou odpověď na otázku pro I_2 v P_2.

Ilustrovali jsme si na případu DHP$\leadsto$HP, kde HP je definován níže. Vyvodili jsme, že HP je také nerozhodnutelný (využitím tvrzení 6.11. v části 6.5.).

NÁZEV: HP (*Halting Problem*)

VSTUP: Turingův stroj M a (vstupní) slovo w.

OTÁZKA: Zastaví se M na w ? (Je tedy výpočet M pro vstup w konečný ?)

Poznámka. Obecně je přirozené definovat, že P_1 je převeditelný na P_2, jestliže existuje algoritmus rozhodující P_1, pokud může využívat (hypotetickou) proceduru rozhodující P_2; to je tzv. *turingovská převeditelnost.* Často ale stačí speciální případ, který je uveden výše; ten bereme jako základní.

Částečná rozhodnutelnost, Postova věta

Připomněli jsme *částečnou rozhodnutelnost* problémů. Přitom byla podstatná následující definice, kterou zde formulujeme v řeči „tabulek" (problému P odpovídá tabulka T_P, stroj M přirozeně definuje tabulku T_M):

> Turingův stroj M *částečně rozhoduje* problém P (typu ANO/NE), jestliže u každého vstupu, pro nějž je v T_P ANO, je v tabulce T_M výstup ANO a pro každý vstup, pro nějž je v T_P NE, je v T_M výstup NE nebo znak $\perp$ (nedefinováno).

(Pro vstupy, kterým problém P přiřazuje odpověď NE, nemusí stroj M svůj výpočet skončit.)

Jak se dá očekávat, o problému řekneme. že je *částečně rozhodnutelný*, jestliže existuje algoritmus (Turingův stroj), který jej částečně rozhoduje.

Speciálně jsme si uvědomili Postovu větu (Věta 7.2.)

Uvědomili jsme si také, že problém HP je částečně rozhodnutelný (viz Univerzální TS), a že tedy $\overline{\text{HP}}$ (doplňkový problém k problému HP) není (ani) částečně rozhodnutelný.

Přednáška - druhá část

Pokračovali jsme v diskusi dalších problémů, hlavně šlo o nerozhodnutelnost.

Cvičení

Upozornění:
Zápis v Edisonu na **zápočtovou písemku** bude probíhat 6. - 10.4. Část cvičení je možné věnovat případné dodatečné diskusi témat zápočtové písemky.

Příklad 9.1

Vysvětlete, co to je doplňkový problém k problému P (typu ANO/NE). Pak konkrétně definujte doplňkový problém Non-Eq-CFG k problému Eq-CFG (ekvivalence bezkontextových gramatik).

Příklad 9.2

Vysvětlete podrobně, co to znamená, když řekneme, že HP$\rightsquigarrow$Non-Eq-CFG (tj. že Halting Problem je převeditelný na problém Non-Eq-CFG). (Převeditelnost HP$\rightsquigarrow$Non-Eq-CFG zde nedokazujeme, ale dále ji bereme jako fakt.)

Příklad 9.3

Je možné, že oba problémy Eq-CFG a Non-Eq-CFG jsou částečně rozhodnutelné? Umíte prokázat částečnou rozhodnutelnost alespoň jednoho z nich?

Příklad 9.4

(Nepovinně.)
Navrhněte Turingův stroj M s jednostranně nekonečnou páskou, který pro dané vstupní slovo $w \in \{a, b\}^*$ sestrojí (výstupní slovo) $w(w)^R$. Stroj M tedy realizuje příslušné (vstupně/výstupní) zobrazení $f_M : \{a, b\}^* \to \{a, b\}^*$ (např. $f_M(abb) = abbbba$).
Pak zvolte vhodné kódování slov v abecedě $\{a, b\}$ tak, aby analogické vstupně/výstupní zobrazení mohl realizovat RAM. Navrhněte konkrétní RAM M', který toto zobrazení realizuje; přitom postupujte tak, že RAM M' přímočaře simuluje Turingův stroj M. (Nejde o co nejjednodušší RAM pro daný úkol, ale o to, abyste aplikovali obecný postup prokazující, že každý TS je možné simulovat RAMem.)