Týden 4

Přednáška-pondělí

Ekvivalence konečných automatů; minimální automaty

Přemýšleli jsme, zda bychom uměli navrhnout (a naprogramovat) algoritmus řešící následující problém.

NÁZEV: *Evivalence konečných automatů*

VSTUP: dva konečné automaty A_1, A_2

VÝSTUP: ANO – jestliže $L(A_1) = L(A_2)$,
NE – jestliže $L(A_1) \neq L(A_2)$.

K jednomu možnému algoritmu nás přímo přivedla myšlenka, že u negativního případu, tedy $L(A_1) \neq L(A_2)$, by bylo dobré také ukázat protipříklad, tedy (co nejkratší) slovo w, které patří jen do jednoho z jazyků $L(A_1), L(A_2)$. Uvědomili jsme si, že takové slovo patří do jazyka

$$L = (L(A_1) - L(A_2)) \cup (L(A_2) - L(A_1)) = (L(A_1) \cap \overline{L(A_2)}) \cup (L(A_2) \cap \overline{L(A_1)})$$

a že díky dříve probraným algoritmům snadno sestrojíme A tak, že $L(A) = L$. Je nám tedy jasný algoritmus, který k zadaným A_1, A_2 sestrojí A tak, že

$$L(A_1) = L(A_2)) \;\Leftrightarrow\; L(A) = \emptyset\,.$$

No a napsat proceduru (algoritmus), která o zadaném konečném automatu A zjistí, zda $L(A) = \emptyset$, hravě zvládneme (když si vzpomeneme na algoritmus pro zjišťování dosažitelných stavů; stačí prostě zjistit, zda nějaký přijímající stav je dosažitelný [z počátečního]).
Ekvivalence konečných automatů se ovšem dá algoritmicky (rychle) zjišťovat i jinak. Nejprve jsme si uvedli následující přirozenou definici.

> Konečný automat A je *minimální*, jestliže neexistuje automat A', který je ekvivalentní s A (pro nějž je tedy $L(A) = L(A')$) a který má méně stavů než A.

Pak jsme si uvedli tyto věty.

Věta. Je-li automat redukovaný a nemá nedosažitelné stavy, pak je minimální.

Věta. Dva minimální automaty, které přijímají tentýž jazyk (a jsou tedy ekvivalentní), jsou izomorfní, tedy stejné až na pojmenování stavů; to také znamená, že mají stejný normovaný tvar.

Platnost vět jsme si naznačili jen intutivně, důkazům se věnujeme na přednáškách pro hlubší zájemce. Uvědomili jsme si ale, že algoritmus rozhodující ekvivalenci konečných automatů může být tedy založen na redukci a převodu do normovaného tvaru. (Dva automaty jsou ekvivalentní právě tehdy, když po provedené redukci mají stejný normovaný tvar.)

Bezkontextové gramatiky

Připomněli jsme si, že

$$(((a \cdot a) + b)^*)$$

je příklad (úplně uzávorkovaného) regulárního výrazu, který reprezentuje jazyk v abecedě $\{a, b\}$. Uvědomili jsme si, že ovšem samotný regulární výraz je prostě řetězcem symbolů abecedy

$$\Sigma = \{\emptyset, \varepsilon, a, b, +, \cdot, ^*, (,)\}\,.$$

Ne každý řetězec v Σ^* je ale regulárním výrazem. (Např. řetězec $a)++($ regulárním výrazem není.)
Snadno jsme vyvodili, že množina těchto regulárních výrazů, označovaná $RV(\{a, b\})$, není regulárním jazykem. Dá se ale generovat bezkontextovou gramatikou, např.

$$R \longrightarrow \emptyset \mid \varepsilon \mid a \mid b \mid (R + R) \mid (R \cdot R) \mid (R^*)\,.$$

Jiná gramatika generující uvedený jazyk je

$$\begin{aligned} R &\longrightarrow C \mid L \mid (RBR) \mid (RU) \\ C &\longrightarrow \emptyset \mid \varepsilon \\ L &\longrightarrow a \mid b \\ B &\longrightarrow + \mid \cdot \\ U &\longrightarrow ^* \end{aligned}$$

Demonstrovali jsme si základní pojmy teorie bezkontextových gramatik. Ukázali jsme si *(levou) derivaci* slova $(((a \cdot a) + b)^*)$, příslušný *derivační strom*, apod.
Připomněli jsme definici *bezkontextové gramatiky* jako struktury

$$G = (\Pi, \Sigma, S, P)$$

a *jazyka generovaného gramatikou*

$$L(G) = \{w \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow^* w\}\,.$$

Pak jsme se vrátili k příkladu jazyka $RV(\{a, b\})$ a upravili jej tak, že v řetězcích (regulárních výrazech) vynecháváme tečku pro zřetězení a nemusíme plně uzávorkovávat. Např. výraz $(((a \cdot a) + b)^*)$ můžeme zapsat $(aa + b)^*$. Takto upravený jazyk generuje např. gramatika

$$R \longrightarrow \emptyset \mid \varepsilon \mid a \mid b \mid R + R \mid R \cdot R \mid R^* \mid (R)\,.$$

Všimli jsme si ovšem, že např. slovo $aa+b$ má v této gramatice dva různé derivační stromy; tedy tato gramatika *není jednoznačná*. Příčinou je tady fakt, že naše dohodnutá priorita operátorů není v gramatice reflektována. K tomuto problému se vrátíme příště.

Přednáška-čtvrtek

Na přednášce se psala první zápočtová písemka.

Partie textu k prostudování

Část 3.7. (ekvivalence konečných automatů, minimální automaty), a dále začít části 4.1., 4.2., 4.3. (bezkontextové gramatiky, jednoznačné gramatiky).
(Máte si udělat přinejmenším dobrou první představu a zamyslet se nad příklady, speciálně těmi plánovanými na cvičení, ať se můžete na cvičení aktivně účastnit a případné problémy si tam objasnit.)

Cvičení

Prezentace referátů

Referát č. 5
K regulárnímu jazyku $L \subseteq \Sigma^*$ nazveme *kanonickým* takový KA A, $L(A) = L$, který je v normovaném tvaru (a tudíž jsou všechny stavy dosažitelné) a v němž pro každé $w \in \Sigma^*$ existuje právě jeden stav q takový, že $L_q^{toAcc} = w\backslash L$.
Vysvětlete, proč ke každému regulárnímu jazyku L existuje právě jeden kanonický automat, a proč je kanonický automat minimálním. (Za vysvětlení se pochopitelně nepovažuje odkaz "protože tam a tam je to dokázáno".)

Referát č. 6
Vysvětlete, proč pro každé n existuje nedeterministický automat A_n s n stavy takový, že minimální deterministický konečný automat přijímající $L(A_n)$ má 2^n stavů. (Ilustrujte např. na konkrétním příkladu pro $n = 5$. Ten můžete najít např. ve starším materiálu `http://www.cs.vsb.cz/jancar/TEORET-INF/teoret-inf.pdf`.)

Příklady

Příklad 4.1

Připomeňme problém

NÁZEV: *Evivalence konečných automatů*

VSTUP: dva konečné automaty A_1, A_2

VÝSTUP: ANO – jestliže $L(A_1) = L(A_2)$,
NE – jestliže $L(A_1) \neq L(A_2)$.

a uvažujme následující algoritmus pro jeho řešení:

generuj postupně (všechna) slova $w_0, w_1, w_2, \ldots$ v abecedě daných automatů; pro každé w_i přitom zjisti, zda je oběma automaty přijímáno či oběma nepřijímáno – když je jedním přijímáno a druhým nepřijímáno, skonči s výsledkem $L(A_1) \neq L(A_2)$.

Je zřejmé, že běh tohoto algoritmu neskončí v případě $L(A_1) = L(A_2)$. Lze tento nedostatek opravit tím, že necháme algoritmus probírat jen slova do délky n, kde n je součtem počtu stavů A_1 a A_2, a nenajde-li se rozlišující slovo do té doby, pak algoritmus zahlásí $L(A_1) = L(A_2)$? Pokud je tomu tak (tedy odpověď algoritmu je vždy správná), v čem je tento algoritmus zřejmě horší než algoritmy probrané na přednášce?

Příklad 4.2

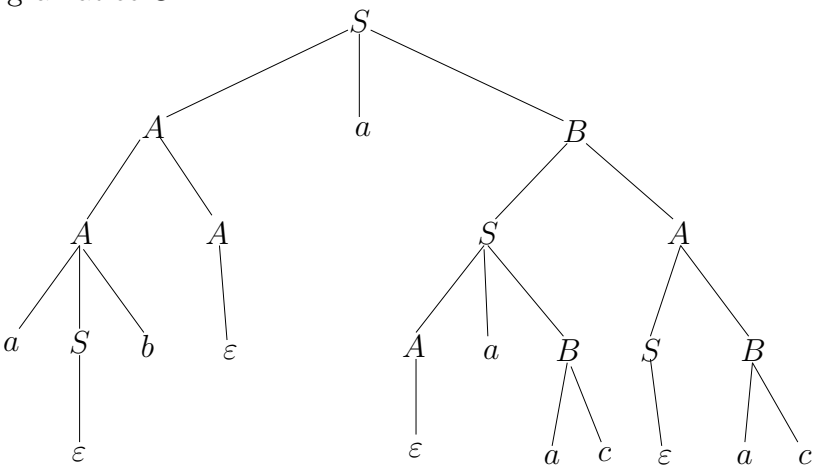
Dodělejte případné nedodělané příklady z dřívějška, diskutujte naznačený obsah první zápočtové písemky.

Příklad 4.3

Uvědomte si znovu, že při konstrukci RV $\longrightarrow$ ZNKA nejprve (přinejmenším podvědomě) děláte syntaktický rozbor daného regulárního výrazu, tedy de facto konstruujete příslušný derivační strom podle bezkontextové gramatiky generující regulární výrazy; také si uvědomte, jak vám onen derivační strom pomůže ke konstrukci příslušného ZNKA.

Příklad 4.4

(V případě nedostatku času nechte na příště.)
Na obrázku je derivační strom pro slovo $w = abaaacac$ odpovídající jisté bezkontextové gramatice G.



- Vypište všechna pravidla G, jejichž existenci můžete vyvodit z daného derivačního stromu.

- Napište levé odvození (levou derivaci) slova w podle gramatiky G.
- Najděte *menší* derivační strom pro slovo $abaaacac$ a zakreslete jej tak, že všechny listy budou na stejné úrovni (tedy odvozené slovo bude celé na „jednom řádku“).
- Najděte nejlevější větev (v onom menším stromě), která obsahuje dva výskyty neterminálu B. Využijte to k důkazu, že gramatika generuje také slovo $abaac$. Pak ukažte, že gramatika také generuje slova $aba(a)ac(ac)$, $aba(a)^2ac(ac)^2$, $aba(a)^3ac(ac)^3$, ...
- Lze z dostupné informace zjistit něco ohledně jednoznačnosti gramatiky G ?