Cvičení 7

- Krátká diskuse opravených zápočtových písemek č.2.
- Upozornění na ukázkové zadání 3. zápočtové písemky na webu (písemka je plánována na 2.5.2007); podrobnější informace se také objeví na přednáškách.
- Prezentace referátu č. 11.
- Prezentace referátu č. 12.

Příklad 0.1

Vyjádřete následující funkci $T2$ (argumentu n) co nejjednodušeji (jako polynom)

$$T2(n) = \left(\sum_{j=1}^{n-1} \left(10 + \left(\sum_{i=1}^{n-j} 34 \right) + 8 \right) \right) + 6$$

(Je toho využito v analýze složitosti Bubblesortu v Přednášce.)

Příklad 0.2

Zjistěte, co dělají dva níže uvedené fragmenty programů pro stroje RAM. Význam většiny instrukcí možná při své programátorské zkušenosti uhádnete; kompletní definice modelu RAM je uvedena v pracovním textu. Jen připomeňme, že buňka s adresou 1 je indexregistr a hodnota operandu $*i$ je číslo uložené v buňce s adresou $i + j$, kde j je aktuální obsah indexregistru. (Oproti základní definici zde také užíváme symbolického adresování.)

```
        READ
        STORE   N
        LOAD    =2
cykl:   STORE   temp
        LOAD    N
        JGTZ    body
        LOAD    temp
        WRITE
        HALT
body:   SUB     =1
        STORE   N
        LOAD    temp
        MUL     temp
        JUMP    cykl
```

```
        LOAD    N
        STORE   1
zmena   LOAD    *A
        STORE   X
cykl    LOAD    1
        SUB     =1
        JZERO   konec
        STORE   1
        LOAD    *A
        SUB     X
        JGTZ    zmena
        JUMP    cykl
konec   HALT
```

Příklad 0.3

Odvoďte, kolik vrcholů má (úplný) binární strom hloubky n a jakou hloubku má binární strom o n vrcholech.

Příklad 0.4

Nechť $a, b > 1$. Ukažte:

- $\exists c : \forall x : \log_a x = c \cdot \log_b x$
- $a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$

Příklad 0.5

Ukažte, že (pro $b \neq 0$)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{an^2}{bn^3 - cn^2} = 0$$

(Můžete použít l'Hospitalovo pravidlo.)

Příklad 0.6

Ukažte, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = 0$$

Příklad 0.7

Nechť funkce f, g jsou definovány vztahy

$$f(n) = 158n^2 \log n + 2541n^2 + 145n$$

$$g(n) = max\,\{\,0\,,\ 0.0005n^3 - 1578n^2\,\}$$

Uveďte všechny platné vztahy typu $f \in X(g)$, $g \in X(f)$, kde za X lze dosadit libovolný ze symbolů O, o, Ω, ω, Θ.

Příklad 0.8

Sestrojte Turingův stroj realizující zdvojení slov v abecedě $\{a, b\}$. (Je-li na začátku zapsáno na pásce slovo u, po skončení výpočtu bude zapsáno uu.)

Referát č. 13 (zadání)
Důkladně promyslete, popište a vysvětlete následující příklad (s návodem).

Mějme standardní Turingův stroj (předpokládající oboustranně nekonečnou pásku) $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$. Sestrojme k němu Turingův stroj $M' = (Q', \Sigma, \Gamma', \delta', q_0', F')$, který předpokládá jen jednostranně (tj. pravostranně) nekonečnou pásku—tedy z nejlevější buňky (na níž stojí hlava na počátku) nemůže přejít doleva—a přitom simuluje stroj M.
Naznačíme možný způsob konstrukce:
$Q' = \{q_0', q_1\} \cup \{q_x \mid x \in \Sigma\} \cup \{q_U \mid q \in Q\} \cup \{q_D \mid q \in Q\}$
$\Gamma' = \Sigma \cup (\Gamma \times \Gamma) \cup \{\not\in, \Box\}$
$F' = \{q_U \mid q \in F\} \cup \{q_D \mid q \in F\}$
$\delta'(q_0', x) = (q_x, \not\in, +1) \ldots$ pro $x \in \Sigma$
$\delta'(q_x, y) = (q_y, (x, \Box), +1) \ldots$ pro $x, y \in \Sigma$
$\delta'(q_x, \Box) = (q_1, (x, \Box), -1) \ldots$ pro $x \in \Sigma$
$\delta'(q_1, z) = (q_1, z, -1) \ldots$ pro $z \neq \not\in$
$\delta'(q_1, \not\in) = ((q_0)_U, \not\in, +1)$
Obrázkem si znázorněte pásku a (na malém příkladu) počáteční fázi práce stroje M' (pozn.: asi vás napadne pojem 'dvoustopá páska'); doplňte pak instrukce stroje M' (tedy dodefinujte zobrazení δ') tak, aby skutečně simuloval M. (Ještě kousek nápovědy: U v indexu u stavu znamená 'up', D znamená 'down').

Referát č. 14 (zadání)
Představte si Turingův stroj pracující na "čtverečkované rovině" (místo lineární pásky). Vstupní slovo je zapsáno na začátku v jednom řádku, čtecí hlava stojí na jeho začátku (ostatní buňky=čverečky obsahují prázdný znak). Obor hodnot přechodové funkce je nyní rozšířen tak, že možné pohyby hlavy jsou Left, Right, Up, Down.
Přesně takový stroj definujte a precizně popište, jak je možné simulovat tento "rovinný" stroj klasickým "lineárním" (uveďte také konkrétní příklad).

Referát č. 15 (zadání)
Vysvětlete, jak lze problém (z pracovního textu)

> *Název problému*: *Výběr aktivit*
>
> *Vstup*: množina konečně mnoha aktivit $\{1, 2, \ldots, n\}$ s pevně určenými časovými intervaly (s_1, f_1), (s_2, f_2), ..., (s_n, f_n), kde $(\forall i, 1 \leq i \leq n) : s_i < f_i$
> *Výstup*: množina obsahující největší možný počet vzájemně kompatibilních aktivit (tj. aktivit s vzájemně se nepřekrývajícími intervaly)

řešit hltavým (greedy) algoritmem.
Dokažte indukcí podle počtu aktivit n, že vámi uvedený přístup skutečně vede k optimálnímu řešení.

Referát č. 16 (zadání)
Sestavte důkaz použitelnosti hltavého přístupu při konstrukci minimální kostry grafu (důkaz je stručně nastíněn v pracovním textu).