Aproximační algoritmy pro TSP

Aproximační algoritmy

- Jedno z možných rychlých řešení optimalizačních verzí NP-úplných úloh
- Nenachází vždy optimální řešení, ale zaručují, že nalezené řešení není o moc horší než optimální
- Algoritmus nazýváme α-aproximační pokud běží v polynomiálním čase a vždy vrací řešení, které je nejvýše $\alpha \cdot O$ pro minimalizační problémy, resp. nejméně $1/\alpha \cdot O$ pro maximalizační problémy, kde O je optimální hodnota

Problém obchodního cestujícího

- Vstupem problému je úplný graf ohodnocený nezápornými čísly
- V rozhodovací verzi je součásti vstupu číslo (limit) a otázka je, jestli je možné uzavřenou cestou (začíná a končí ve stejném vrcholu) projít všechny vrcholy právě jednou tak, že součet ohodnocení na projitých hranách je menší než limit
- V rozhodovací verzi je NP-úplný
- V optimalizační verzi se hledá uzavřená cesta, která má součet ohodnocení hran minimální
- Používá se zkratka TSP - z anglického Traveling Salesman Problem

Problém obchodního cestujícího

- Pro TSP neexistuje žádný α-aproximační algoritmus, kde by α byla konstanta, pokud $P \neq NP$
- Důkaz se provede redukcí z NP-úplného problému nazývaného Hamiltonovská kružnice (v neorientovaném neohodnoceném grafu se ptá na existenci uzavřené cesty procházející každý vrchol právě jednom)
- Pro důkaz sporem předpokládáme, že α-aproximační algoritmus pro TSP existuje
- Pro danou instanci problému Hamiltonovské kružnice G sestrojíme instanci problému TSP G' tak, že hrany G ohodnotíme 1, přidáme všechny chybějící hrany a ty ohodnotíme $\alpha \cdot n$, kde n je počet vrcholů grafu G

- Pokud v G existuje Hamiltonovská kružnice (HK), bude mít optimální řešení TSP na grafu G' hodnotu n
- Pokud v G neexistuje Hamiltonovská kružnice, bude optimální řešení TSP na grafu G' obsahovat alespoň jednu hranu ohodnocenou hodnotu $\alpha \cdot n$ a tedy hodnota řešení bude větší než $\alpha \cdot n$
- Protože se optimální cesta liší více než α násobně v případě, kdy graf G neobsahuje HK od případu, kdy G obsahuje HK, α-aproximační algoritmus vždy dokáže tyto případy odlišit a tím rozhodnout existenci HK
- Protože α-aproximační algoritmus běží v polynomiálním čase a měl by rozhodovat problém Hamiltonovského cyklu, znamenalo by to, že $P = NP$
- Protože se obecně předpokládá $P \neq NP$, α-aproximační algoritmus pro TSP nemůže existovat

2-aproximační algoritmus pro trojúhelníkový TSP

- Aproximační algoritmy existují pro instance TSP, kde platí trojúhelníková nerovnost (pro každou trojici vrcholů x, y, z platí, že ohodnocení hrany mezi x a y je menší nebo rovno součtu ohodnocení hrany mezi x a z a hrany mezi z a y)
- Cena minimální kostry grafu je menší nebo rovna optimální cestě obchodního cestujícího (odebráním hrany z optimální cesty dostaneme kostru a ta nemůže být menší než minimální kostra)
- Uvažujme multigraf (mezi dvěma vrcholy může být více hran) vzniklý z minimální kostry zdvojením všech hran této kostry. Protože v tomto multigrafu mají všechny vrcholy sudý stupeň, existuje v něm Eulerův tah (uzavřený tah procházející každou hranu právě jednou). Cena tohoto tahu je přesně dvojnásobek ceny minimální kostry, tedy ne více než dvojnásobek ceny optimální cesty obchodního cestujícího
- Konečnou cestu obchodního cestujícího získáme tak, že vrcholy, které bychom měli navštívit podruhé, přeskočíme. Díky trojúhelníkové nerovnosti tím cestu leda zkrátíme

Christofidův algoritmus

- Christofidův algoritmus (Christofides' Algorithm) je $3/2$-aproximační algoritmus pro trojúhelníkový TSP
- Je podobný 2-aproximačnímu algoritmu představenému dříve
- Vylepšení spočívá v tom, že se jinak konstruuje graf pro hledání Eulerovského tahu
- Nalezneme minimální kostru T_{min}. V ní neexistuje uzavřený Eulerovský tah, protože jde o strom a (minimálně) listy mají lichý stupeň
- Vezmeme úplný graf na všech vrcholech s lichým stupněm z T_{min} a najdeme minimální párování na tomto grafu
- Nalezené minimální párování přidáme k T_{min}. V párování má každý vrchol stupeň 1, ze všech vrcholů lichého stupně v T_{min} se tak stanou vrcholy sudého stupně
- V takto doplněném grafu existuje Eulerův tah
- Pro hledání Eulerova tahu i minimálního párování jsou známy polynomiální algoritmy

Christofidův algoritmus

- Označme P_{min} minimální párování na vrcholech lichého stupně kostry T_{min}, Opt optimální cestu obchodního cestujícího a funkce v dává součet hodnot všech hran grafu, na který se aplikuje
- Platí $v(T_{min}) \leq v(Opt)$ (viz dříve)
- $v(P_{min}) \leq v(Opt)$ protože cesta obchodního cestující jen na vrcholech lichého stupně kostry T_{min} je leda menší než $v(Opt)$, liché hrany této cesty tvoří jedno párování, sudé hrany druhé párování a menší z těchto dvou párování musí být menší nebo rovno $v(Opt)/2$ a leda větší než $v(P_{min})$. Tedy $v(P_{min}) < v(Opt)/2$
- Eulerův tah na grafu vzniklém doplněním T_{min} o P_{min} prochází všechny hrany tohoto grafu právě jednou, tedy jeho hodnota je $v(T_{min}) + v(P_{min})$ a to je meně nebo rovno $v(Opt) + v(Opt)/2 = 3/2 \cdot v(Opt)$
- Konečnou cestu obchodního cestujícího získáme opět tak, že vrcholy, které bychom podle Eulerovského tahu měli navštívit podruhé, přeskočíme. Díky trojúhelníkové nerovnosti tím cestu leda zkrátíme