

# Automatizované řešení úloh s omezeními

Martin Kot

Katedra informatiky, FEI,  
Vysoká škola báňská – Technická universita Ostrava  
17. listopadu 15, Ostrava-Poruba 708 33  
Česká republika

18. října 2012

# Sítě omezení

- **Síť omezení** (constraint network) se skládá množiny proměnných  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  s vlastními doménami  $D = \{D_1, \dots, D_n\}$  (obsahujícími možné hodnoty pro každou proměnnou  $D_i = \{v_1, \dots, v_k\}$ ) a množiny omezení  $C = \{C_1, \dots, C_t\}$ . Formálně tedy jde o trojici  $\mathcal{R} = (X, D, C)$ .
- Omezení  $C_i$  je relace  $R_i$  definovaná na podmnožině proměnných  $S_i, S_i \subseteq X$ .
- $S_i$  se nazývá **rozsah** (scope) relace  $R_i$
- Relace určují vzájemné povolené přiřazení hodnot proměnným
- Pro  $S_i = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_r}\}$  je  $R_i \subseteq D_{i_1} \times \dots \times D_{i_r}$
- Omezení tedy můžeme chápat jako dvojici  $C_i = (S_i, R_i)$
- Pozn. - Při jasném rozsahu používáme jen  $R_i$  nebo rozsah uvedeme v indexu  $R_{S_i}$ , často taky bez závorek  $R_{xyz}$
- Množina rozsahů  $S = \{S_1, \dots, S_t\}$  - **schéma sítě** (network scheme)

- Předpokládá se jen jedno omezení nad každým  $S_i \in S$  (při relačních omezeních)
- Arita omezení = kardinalita rozsahu
- Binární síť omezení (binary constraint network) - má pouze unární a binární omezení
- Příklad - formalizace  $n$  dam na šachovnici
  - Slidy Riny Dechter, chapter 2, slides 2-3
  - Sloupce jsou proměnné  $x_1, \dots, x_n$
  - Možné řádky jsou domény  $D_i = \{1, \dots, n\}$
  - Omezení jsou binární - vyjadřují, že dámy se nesmí ohrožovat vyjmenováním povolených dvojic řádků pro dvojice sloupců
  - Pro 4 dámy:  $\mathcal{R} = (X, D, C)$ ,  $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ,  $\forall i D_i = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  
 $C_1 = R_{12}$ ,  $C_2 = R_{13}$ ,  $C_3 = R_{14}$ ,  $C_4 = R_{23}$ ,  $C_5 = R_{24}$ ,  $C_6 = R_{34}$

- **Instančiacie** (instantiation) **podmnožiny proměnných** - celé podmnožině proměnných se přiřadí hodnoty z příslušných domén
- Formálně je instančiacie množiny  $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}$  *ntice dvojic*  $((x_{i_1}, a_{i_1}), \dots, (x_{i_k}, a_{i_k}))$ , kde  $(x, a)$  reprezentuje přiřazení  $a \in D_x$  proměnné  $x$
- Pozn. Používá se taky  $(x_1 = a_1, \dots, x_i = a_i)$  nebo  $\bar{a} = (a_1, \dots, a_i)$

- Instanciací  $\bar{a}$  **splňuje omezení**  $(S, R)$  právě tehdy, když je definována nad všemi proměnnými z  $S$  a prvky  $\bar{a}$  asociované s  $S$  jsou v relaci  $R$
- Příklad: uvažujme  $R_{xyz} = \{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (0, 0, 0)\}$ . Potom  
 $\bar{a} = ((x, 1), (y, 1), (z, 1), (t, 0))$  splňuje  $R_{xyz}$  ale  
 $\bar{a} = ((x, 1), (y, 0), (z, 0), (t, 0))$  ne, protože  $(1, 0, 0) \notin R_{xyz}$ .

- Částečná instanciac je **konzistentní**, když splňuje omezení, v jejichž rozsahu není žádná neinstanciovaná proměnná
- Projekci  $\bar{a}$  na podmnožinu rozsahu  $S_i$  označujeme  $\bar{a}[S_i]$  nebo  $\pi_{S_i}(\bar{a})$

- **Řešení** (solution) sítě  $\mathcal{R} = (X, D, C)$ , kde  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  je instanciace všech proměnných, která splňuje všechna omezení
- **Relace řešení**  $sol(\mathcal{R})$  (ozn. také  $\rho_X$ ) je definována jako  $sol(\mathcal{R}) = \{a = (a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in D_i, \forall S_i \text{ ve schématu } R \text{ je } \bar{a}[S_i] \in R_i\}$
- Říkáme, že síť omezení **vyjadřuje** (express) nebo **reprezentuje** (represents) relaci všech svých řešení.
- Pro síť  $\mathcal{R}$  nad  $X$  a  $A \subseteq X$  je  $sol(A)$  nebo  $\rho_A$  množina konzistentních instanciací nad  $A$
- Příklad: 4 dámy na šachovnici (slidy Riny Dechter, chapter 2, slide 3) - Uvažujme  $Y = \{x_1, x_2, x_3\}$ , instanciaci  $\bar{a} = ((x_1, 1), (x_2, 4), (x_3, 2))$  na obr. (a). Ta je konzistentní, protože  $\bar{a}[\{x_1, x_2\}] = (1, 4)$  a  $(1, 4) \in R_{12}$  atd. Ale  $\bar{a}$  není součástí žádného řešení. 4 dámy na šachovnici reprezentují  $\rho_{1234} = \{(2, 4, 1, 3), (3, 1, 4, 2)\}$ .



- Jedna z reprezentací sítě omezení je prostřednictvím **grafu omezení** ((primal) constraint graph)
- Uzly reprezentují proměnné, hrany spojují proměnné které jsou svázány některým z omezení
- Pro binární omezení - chybějící hrana znamená úplnou relaci mezi příslušnými proměnnými
- Dává smysl pro binární i jiná omezení

- **Hypergraf** je struktura  $\mathcal{H} = (V, S)$ ,  $V$  je množina vrcholů,  $S = \{S_1, \dots, S_l\}$  množina podmnožin množiny vrcholů ( $S_i \subseteq V$ ) nazývaných hyperhrany
- V hypergrafu omezení opět vrcholy reprezentují proměnné a hyperhrany (kreslené jako oblasti)
- Je přesnější reprezentací nebinárních omezení
- **Duální graf omezení**
  - Hyperhrana původního grafu (tedy rozsah omezení) je reprezentována vrcholem
  - Hrany spojují vrcholy s neprázdným průnikem hyperhran (tedy sdílející některou z proměnných)
  - Hrany jsou ohodnoceny sdílenou proměnnou

- **Duální problém** (dual problem) vychází z duálního grafu
- Omezení tvoří proměnné nazývané **c-proměnné** (c-variables)
- Domény proměnných jsou tvořeny možnými kombinacemi hodnot vynucenými odpovídajícími omezeními
- Omezení mezi c-proměnnými vynucují, že jimi sdíleným (původním) proměnným musí být přiřazené stejné hodnoty
- Jakoukoliv síť omezení takto je možno převést na binární a řešit ji technikami pro binární

- **Numerická omezení** (numeric constraints) vyjadřují omezení aritmetickými výrazy
- Příklad: Pro dámy na šachovnici můžeme dát omezení  $\forall i, j : x_i \neq x_j \wedge |x_i - x_j| \neq |i - j|$
- Příklad: Můžeme uvažovat proměnné s doménami, které jsou podmnožiny přirozených čísel. Omezení ve tvaru konjunkce lineárních nerovnic  $ax_i - bx_j = c$ ,  $ax_i - bx_j < c$ ,  $ax_i - bx_j \leq c$ . Jde o speciální případ tzv. celočíselného lineárního programu.
- Příklad: SEND + MORE = MONEY z prvního cvičení

- Když jsou proměnné dvouhodnotové, využívá se často jazyk výrokové (nebo také booleovské) logiky
- Výrokové proměnné nabývají hodnot  $\{true, false\}$  nebo  $\{1, 0\}$  a označujeme je  $P, Q, R, \dots$
- Literály jsou  $P$  ( $P$  je true) nebo  $\neg P$  ( $P$  je false)
- Klauzule - disjunkce literálů
- Operace rezoluce mezi  $\alpha \vee Q$  a  $\beta \vee \neg Q$  dává  $\alpha \vee \beta$
- Konjunktivní normální forma (také označována jako teorie) - množina klauzulí označující jejich konjunkci
- Model nebo řešení teorie  $\phi$  je přiřazení pravdivostních hodnot proměnným tak, aby všechny klauzule byly pravdivé
- SAT - má formule model? (je příslušný problém konzistentní?)

- Základním konceptem práce s omezeními je vyvozování nových omezení
- Nová omezení mohou být zpřísněním původních nebo mohou omezovat proměnné, které dříve omezené nebyly
- Příklad: Z  $x \geq y$ ,  $y \geq z$  lze vyvodit  $x \geq z$
- Odvozené omezení je redundantní vzhledem k síti - jeho odstranění neovlivní množinu řešení
- **Skládání** (composition): pro dané binární (popř. unární) omezení  $R_{xy}$ ,  $R_{yz}$  složení  $R_{xy} \dot{R}_{yz}$  generuje binární relaci  $R_{xz} = \{(a, b) \mid a \in D_x, b \in D_z, \exists c \in D_y \text{ tž. } (a, c) \in R_{xy} \text{ a } (c, b) \in R_{yz}\}$
- Skládání lze popsat také jako násobení booleovských matic

- Ne každá obecná relace může být reprezentována sadou binárních omezení (relací s  $n$  proměnnými a  $k$  hodnotami v doménách je  $2^{kn}$ , binárních sítí omezení jen  $2^{k^2n^2}$ )
- Ale můžeme takovou relaci aproximovat binárně, například **projekční sítí** (projection network)
- Projekční síť relace  $\rho$  je projekce  $\rho$  na každou dvojici jejích proměnných
- Formálně, když  $\rho$  je relace nad  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ , její projekční síť  $P(\rho)$  je definována jako  $\mathcal{P} = (X, D, P)$  kde  $D = \{D_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ ,  $D_i = \pi_i(\rho)$ ,  $P = \{P_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ ,  $P_{ij} = \pi_{x_i, x_j}(\rho)$
- Řešení sítě  $P(\rho)$  vždy obsahuje  $\rho$
- Neexistuje síť binární síť  $\mathcal{R}'$  taková, že  $\rho \subseteq \text{sol}(\mathcal{R}') \subset \text{sol}(P(\rho))$
- Když relace nemůže být reprezentována projekční sítí, nemůže být reprezentována žádnou binární sítí

- Pro dvě binární sítě  $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$  na stejné množině proměnných  $x_1, \dots, x_n$  říkáme, že  $\mathcal{R}'$  je alespoň tak striktní (tight) jako  $\mathcal{R}$  právě tehdy, když  $\forall i, j : R'_{ij} \subseteq R_{ij}$
- Průnik sítí  $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$ , označovaný  $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}'$  je binární síť získaná vzájemným průnikem všech vzájemně si odpovídajících omezení
- Když jsou sítě  $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$  ekvivalentní, je s nimi ekvivalentní i  $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}'$  a je minimálně tak striktní jako obě tyto sítě
- Existuje částečné uspořádání sítí podle striktnosti
- **Minimální síť** je průnikem všech ekvivalentních sítí
- Minimální síť je ekvivalentní se sítěmi, ze kterých průnikem vznikla a je alespoň tak striktní, jako každá z nich
- Formálně: Necht'  $\{\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_l\}$  je množina všech sítí ekvivalentních s  $\mathcal{R}_0$  a necht'  $\rho = \text{sol}(\mathcal{R}_0)$ . Potom minimální síť  $M$  pro  $\mathcal{R}_0$  nebo  $\rho$  je definována jako  $M(\mathcal{R}_0) = M(\rho) = \bigcap_{i=1}^l R_i$



- Minimální síť je identická s projekční sítí množiny řešení minimální sítě. Tedy pro každou binární síť  $\mathcal{R}$  tž.  $\rho = \text{sol}(\mathcal{R})$  platí  $M(\rho) = P(\rho)$
- Binární omezení v minimální síti označujeme  $M_{ij}$
- Unární omezení jsou redukované domény
- Když nějaká dvojice hodnot proměnných vyhovuje omezení v minimální síti, potom se vyskytuje v alespoň jednom řešení