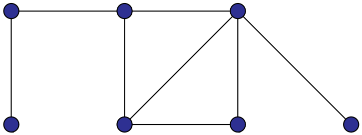
Vrcholové pokrytí grafu

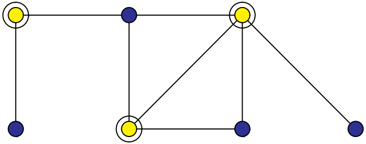
Mějme neorientovaný graf $G = (V, E)$. **Vrcholové pokrytí** (vertex-cover) grafu G je množina $C \subseteq V$ taková, že pro každou hranu $(u, v) \in E$ platí, že buď $u \in C$ nebo $v \in C$.



Naším úkolem je najít pro zadaný graf minimální vrcholové pokrytí.

Vrcholové pokrytí grafu

Mějme neorientovaný graf $G = (V, E)$. **Vrcholové pokrytí** (vertex-cover) grafu G je množina $C \subseteq V$ taková, že pro každou hranu $(u, v) \in E$ platí, že buď $u \in C$ nebo $v \in C$.



Naším úkolem je najít pro zadaný graf minimální vrcholové pokrytí.

Vrcholové pokrytí grafu

Máme tedy vyřešit následující problém:

Minimální vrcholové pokrytí grafu (vertex cover)

Vstup: Neorientovaný graf $G = (V, E)$.

Výstup: Minimalní množina C ($C \subseteq V$) tvořící vrcholové pokrytí grafu G.

Vrcholové pokrytí grafu

Máme tedy vyřešit následující problém:

Minimální vrcholové pokrytí grafu (vertex cover)

Vstup: Neorientovaný graf $G = (V, E)$.

Výstup: Minimalní množina C ($C \subseteq V$) tvořící vrcholové pokrytí grafu G.

Následující (rozhodovací) varianta tohoto problému je NP-úplná:

Vrcholové pokrytí (vertex cover)

Vstup: Neorientovaný graf $G = (V, E)$ a přirozené číslo k.

Otázka: Existuje vrcholové pokrytí grafu G tvořené k vrcholy?

Tento problém tedy není možné řešit v polynomiálním čase (leda by platilo PTIME = NPTIME).

Vrcholové pokrytí grafu

Máme tedy vyřešit následující problém:

Minimální vrcholové pokrytí grafu (vertex cover)

Vstup: Neorientovaný graf $G = (V, E)$.

Výstup: Minimalní množina C ($C \subseteq V$) tvořící vrcholové pokrytí grafu G.

Existuje však 2-aproximační algoritmus řešící tento problém:

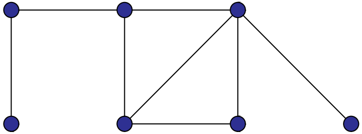
- Algoritmus najde pro zadaný graf G vrcholové pokrytí C takové, že

$$|C| \leq 2k$$

kde k je velikost minimálního vrcholového pokrytí grafu G.

Vrcholové pokrytí grafu

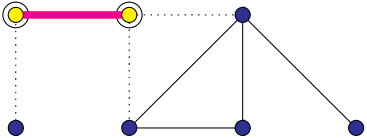
```
APPROX-VERTEX-COVER(G)
C ← ∅
E' ← E
while E' ≠ ∅
      do vyber libovolnou hranu (u, v) z E'
         C ← C ∪ {u, v}
         odstraň z E' hrany incidentní s u nebo v
return C
```



Vrcholové pokrytí grafu

Approx-Vertex-Cover(G)

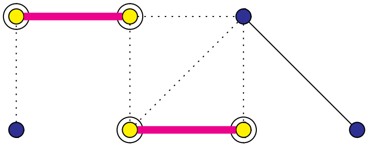
$C \leftarrow \emptyset$
$E' \leftarrow E$
while $E' \neq \emptyset$
    do vyber libovolnou hranu (u, v) z E'
        $C \leftarrow C \cup \{u, v\}$
        odstraň z E' hrany incidentní s u nebo v
return C



Vrcholové pokrytí grafu

APPROX-VERTEX-COVER(G)

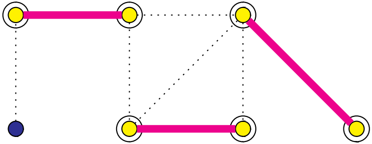
$C \leftarrow \emptyset$
$E' \leftarrow E$
while $E' \neq \emptyset$
  do vyber libovolnou hranu (u, v) z E'
    $C \leftarrow C \cup \{u, v\}$
    odstraň z E' hrany incidentní s u nebo v
return C



Vrcholové pokrytí grafu

APPROX-VERTEX-COVER(G)

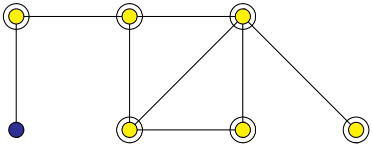
$C \leftarrow \emptyset$
$E' \leftarrow E$
while $E' \neq \emptyset$
    do vyber libovolnou hranu (u, v) z E'
        $C \leftarrow C \cup \{u, v\}$
        odstraň z E' hrany incidentní s u nebo v
return C



Vrcholové pokrytí grafu

APPROX-VERTEX-COVER(G)

$C \leftarrow \emptyset$
$E' \leftarrow E$
while $E' \neq \emptyset$
    do vyber libovolnou hranu (u, v) z E'
        $C \leftarrow C \cup \{u, v\}$
        odstraň z E' hrany incidentní s u nebo v
return C



Vrcholové pokrytí grafu

Tvrzení

APPROX-VERTEX-COVER je polynomiální 2-aproximační algoritmus.

Důkaz: Označme A množinu všech hran vybraných v kroku 4, C vrcholové pokrytí nalezené algoritmem a C^* minimální vrcholové pokrytí grafu G.

Jakékoliv vrcholové pokrytí musí obsahovat alespoň jeden z koncových vrcholů každé hrany z A.

Pro libovolné vrcholové pokrytí C' tedy platí $|A| \leq |C'|$.

Speciálně pro C^* tedy také musí platit $|A| \leq |C^*|$.

Na druhou stranu, zjevně platí $|C| = 2 \cdot |A|$.
Dohromady tedy dostáváme $|C| \leq 2 \cdot |C^*|$.