Převod SAT na 3-SAT

Připomeňme si definici problému SAT:

SAT (splnitelnost booleovských formulí)

Vstup: Booleovská formule φ.

Otázka: Je φ splnitelná?

Příklad:
Formule $\varphi_1 = x_1 \wedge (\neg x_2 \vee x_3)$ je splnitelná:
např. při ohodnocení ν, kde $[x_1]_\nu = 1$, $[x_2]_\nu = 0$, $[x_3]_\nu = 1$, platí $[\varphi_1]_\nu = 1$.

Formule $\varphi_2 = (x_1 \wedge \neg x_1) \vee (\neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_2)$ není splnitelná:
pro libovolné ohodnocení ν platí $[\varphi_2]_\nu = 0$.

Převod SAT na 3-SAT

Problém SAT je NP-úplný.

Ukážeme si, že zůstává NP-úplný, i když se omezíme jen na formule určitého speciální typu:

3-SAT

Vstup: Formule φ v konjunktivní normální formě, kde každá klauzule obsahuje právě 3 literály.

Otázka: Je φ splnitelná?

Převod SAT na 3-SAT

Připomeňme si některé pojmy:

- **Literál** je formule tvaru x nebo $\neg x$, kde x je booleovská proměnná.
- **Klauzule** je disjunkce literálů.

  Příklady: $x_1 \vee \neg x_2$ $\quad \neg x_5 \vee x_8 \vee \neg x_{15} \vee \neg x_{23}$ $\quad x_6$
- Formule je v **konjunktivní normální formě (KNF)**, jestliže je konjunkcí klauzulí.

  Příklad: $(x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_5 \vee x_8 \vee \neg x_{15} \vee \neg x_{23}) \wedge x_6$

Převod SAT na 3-SAT

Popíšeme polynomiální algoritmus, který k zadané formuli φ vyrobí formuli φ' takovou, že:

- φ' bude v KNF a každá její klauzule bude obsahovat právě 3 literály,
- φ' bude splnitelná právě tehdy, když φ je splnitelná.

Poznámka: Jednoduchá myšlenka – převést φ do KNF – nefunguje.
Problém je v tom, že výsledná formule by mohla být exponenciálně větší než φ (a tedy by ji nebylo možné sestrojit v polynomiálním čase).

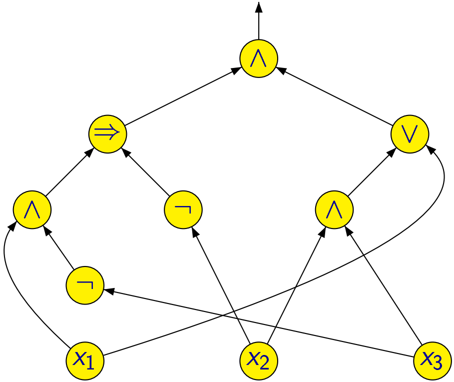
Převod SAT na 3-SAT

Algoritmus rozdělíme do dvou částí:

- Nejprve vyrobíme formuli φ_1, která bude v KNF a která bude obsahovat **nejvýše** 3 literály v každé klauzuli (a která bude splnitelná právě tehdy, když φ je splnitelná).
- Poté z φ_1 vyrobíme φ', která bude v KNF a která bude obsahovat **právě** 3 literály v každé klauzuli (a která bude splnitelná právě tehdy, když φ_1 bude splnitelná).

Převod SAT na 3-SAT

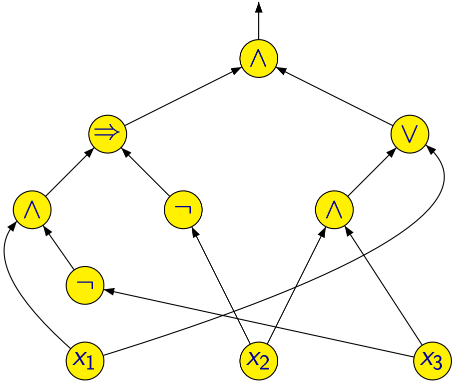
Formuli φ si můžeme znázornit jako booleovský obvod, jehož struktura je dána (abstraktním) syntaktickým stromem dané formule:



$$((x_1 \land \neg x_3) \Rightarrow \neg x_2) \land ((x_2 \land x_3) \lor x_1)$$

Převod SAT na 3-SAT

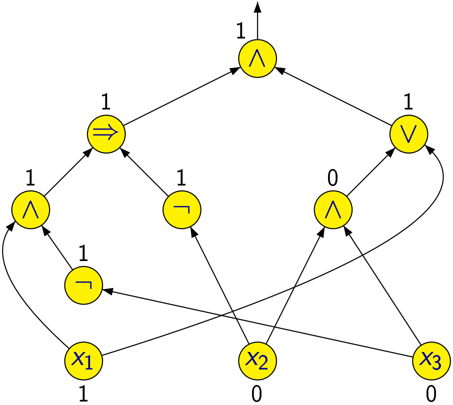
Formule φ je splnitelná právě tehdy, jestliže existuje nějaký vstup, pro který dostaneme na výstupu 1.



$$((x_1 \wedge \neg x_3) \Rightarrow \neg x_2) \wedge ((x_2 \wedge x_3) \vee x_1)$$

Převod SAT na 3-SAT

Formule φ je splnitelná právě tehdy, jestliže existuje nějaký vstup, pro který dostaneme na výstupu 1.



$$((x_1 \wedge \neg x_3) \Rightarrow \neg x_2) \wedge ((x_2 \wedge x_3) \vee x_1)$$

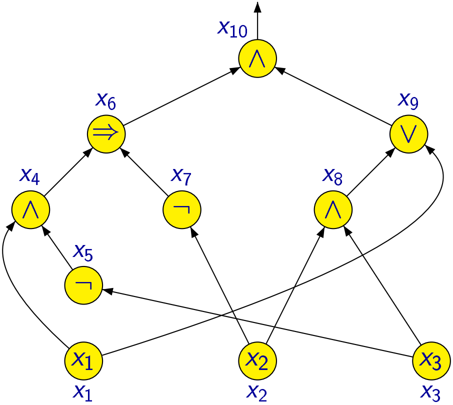
Převod SAT na 3-SAT

Ve formuli φ_1, kterou sestrojíme k dané formuli φ, se budou vyskytovat následující proměnné:

- všechny proměnné, které se vyskytují ve formuli φ (tj. jedna proměnná pro každý vstup obvodu),
- jedna proměnná pro každý výskyt booleovského operátoru ve φ (tj. jedna proměnná pro každé hradlo obvodu).

Převod SAT na 3-SAT

Příklad: Formule φ_1 bude obsahovat proměnné $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$.



$$((x_1 \wedge \neg x_3) \Rightarrow \neg x_2) \wedge ((x_2 \wedge x_3) \vee x_1)$$

Převod SAT na 3-SAT

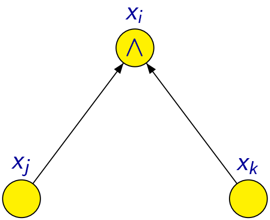
Formule φ_1 bude sestrojena tak, aby pro libovolné ohodnocení ν platilo, že $[\varphi_1]_\nu = 1$ právě tehdy, pokud:

- ν reprezentuje korektní přiřazení booleovských hodnot všem vstupům a výstupům jednotlivých hradel a
- na výstupu obvodu je hodnota 1.

(Pokud bude některá některá z těchto podmínek porušena, bude $[\varphi_1]_\nu = 0$.)

Převod SAT na 3-SAT

Zaměřme se nyní na jednotlivé hradlo (např. typu $\wedge$), jehož výstupu je přiřazena proměnná x_i a jehož vstupy jsou reprezentovány proměnnými x_j a x_k.



Převod SAT na 3-SAT

Možná (korektní) přiřazení hodnot vstupů a výstupu daného hradla (typu $\wedge$) jsou popsána následující tabulkou:

x_j	x_k	x_i
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Obsah této tabulky je možné reprezentovat pomocí následující formule ψ:

$$\begin{array}{cccccccc}
(& \neg x_j & \wedge & \neg x_k & \Rightarrow & \neg x_i &) & \wedge \\
(& \neg x_j & \wedge & x_k & \Rightarrow & \neg x_i &) & \wedge \\
(& x_j & \wedge & \neg x_k & \Rightarrow & \neg x_i &) & \wedge \\
(& x_j & \wedge & x_k & \Rightarrow & x_i &) &
\end{array}$$

Převod SAT na 3-SAT

Formule ψ reprezentuje výše uvedenou tabulku v tom smyslu, že ψ nabývá hodnoty 1 právě pro ta přiřazení, která se v této tabulce vyskytují (a pro ta, která se tam nevyskytují, nabývá hodnoty 0).

Převod SAT na 3-SAT

Libovolnou formuli tvaru

$$A \wedge B \Rightarrow C$$

je možné přepsat na ekvivalentní formuli tvaru

$$\neg(A \wedge B) \vee C$$

a tu je dále možné přepsat na ekvivalentní formuli tvaru

$$\neg A \vee \neg B \vee C$$

Převod SAT na 3-SAT

Formuli

$$
\begin{array}{ccccccccc}
(& \neg x_j & \wedge & \neg x_k & \Rightarrow & \neg x_i &) & \wedge \\
(& \neg x_j & \wedge & x_k & \Rightarrow & \neg x_i &) & \wedge \\
(& x_j & \wedge & \neg x_k & \Rightarrow & \neg x_i &) & \wedge \\
(& x_j & \wedge & x_k & \Rightarrow & x_i &) &
\end{array}
$$

tedy můžeme přepsat na ekvivalentní formuli

$$
\begin{array}{ccccccccc}
(& x_j & \vee & x_k & \vee & \neg x_i &) & \wedge \\
(& x_j & \vee & \neg x_k & \vee & \neg x_i &) & \wedge \\
(& \neg x_j & \vee & x_k & \vee & \neg x_i &) & \wedge \\
(& \neg x_j & \vee & \neg x_k & \vee & x_i &) &
\end{array}
$$

Pokud by typ hradla byl $\vee$, postupovali bychom analogicky.

K tabulce

x_j	x_k	x_i
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

bychom dostali formuli

$$\begin{array}{ccccccccc} (& x_j & \vee & x_k & \vee & \neg x_i &) & \wedge \\ (& x_j & \vee & \neg x_k & \vee & x_i &) & \wedge \\ (& \neg x_j & \vee & x_k & \vee & x_i &) & \wedge \\ (& \neg x_j & \vee & \neg x_k & \vee & x_i &) & \end{array}$$

Převod SAT na 3-SAT

Podobně bychom mohli reprezentovat i další booleovské operace ($\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, ...).

Pro ilustraci si ukážeme ještě konstrukci pro hradla typu $\neg$ (tentokrát máme jen jeden vstup x_j):

Tabulce

x_j	x_i
0	1
1	0

odpovídá formule

$$(\neg x_j \Rightarrow \neg x_i) \ \wedge \ (x_j \Rightarrow x_i)$$

kterou můžeme přepsat na tvar

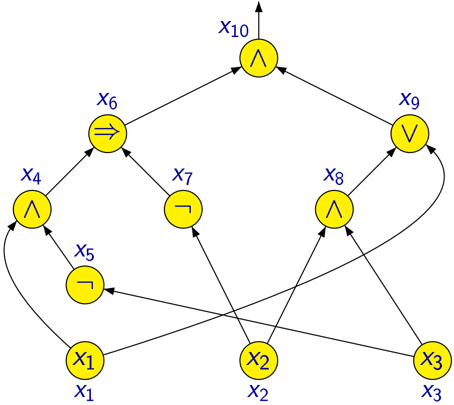
$$(x_j \vee \neg x_i) \ \wedge \ (\neg x_j \vee x_i)$$

Převod SAT na 3-SAT

Nyní přistoupíme k vlastní konstrukci formule φ_1, kterou vytvoříme jako konjunkci následujících formulí:

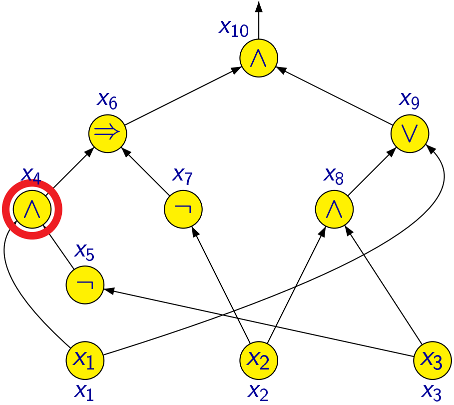
- Pro každé hradlo přidáme jemu odpovídající formuli sestrojenou výše popsaným způsobem.
- Přidáme formuli x_{out}, kde x_{out} je proměnná reprezentující výstup obvodu.

Příklad:


x_{10}
$\wedge$
x_6
$\Rightarrow$
x_9
$\vee$
x_4
$\wedge$
x_7
$\neg$
x_8
$\wedge$
x_5
$\neg$
x_1
x_2
x_3
x_1
x_2
x_3

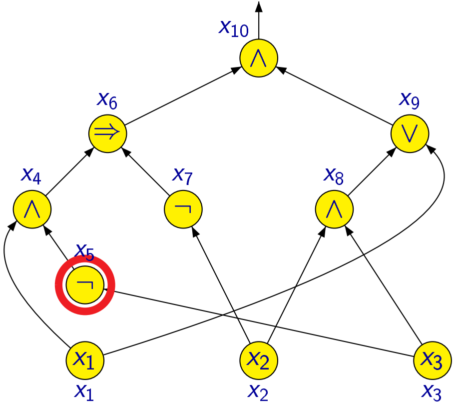
Převod SAT na 3-SAT

Příklad:



Pro x_4 přidáme do formule φ_1 tyto klauzule:
$(x_1 \vee x_5 \vee \neg x_4)$, $(x_1 \vee \neg x_5 \vee \neg x_4)$, $(\neg x_1 \vee x_5 \vee \neg x_4)$, $(\neg x_1 \vee \neg x_5 \vee x_4)$

Příklad:

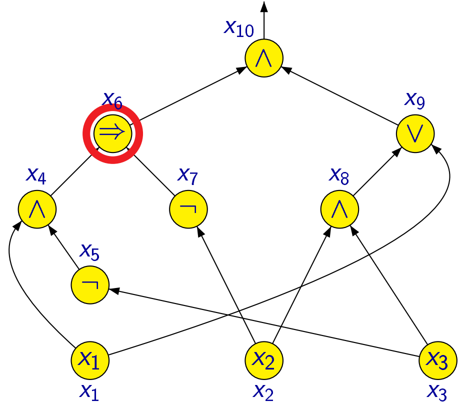


Pro x_5 přidáme do formule φ_1 tyto klauzule:

$$(x_3 \vee x_5),\ (\neg x_3 \vee \neg x_5)$$

Převod SAT na 3-SAT

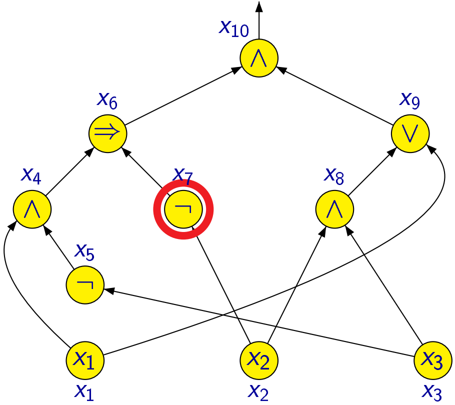
Příklad:



Pro x_6 přidáme do formule φ_1 tyto klauzule:
$(x_4 \vee x_7 \vee x_6)$, $(x_4 \vee \neg x_7 \vee x_6)$, $(\neg x_4 \vee x_7 \vee \neg x_6)$, $(\neg x_4 \vee \neg x_7 \vee x_6)$

Převod SAT na 3-SAT

Příklad:

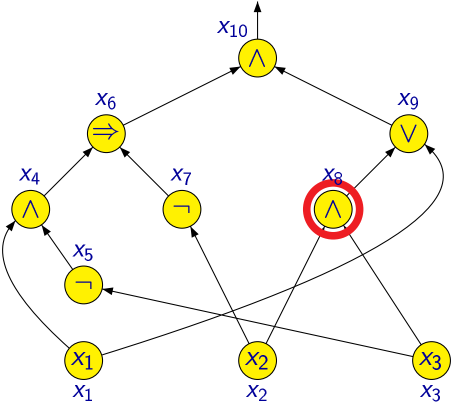


Pro x_7 přidáme do formule φ_1 tyto klauzule:

$$(x_2 \vee x_7),\ (\neg x_2 \vee \neg x_7)$$

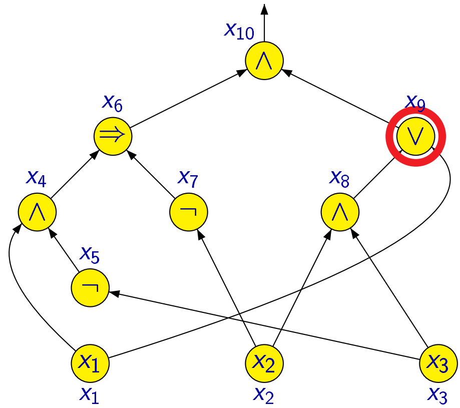
Převod SAT na 3-SAT

Příklad:



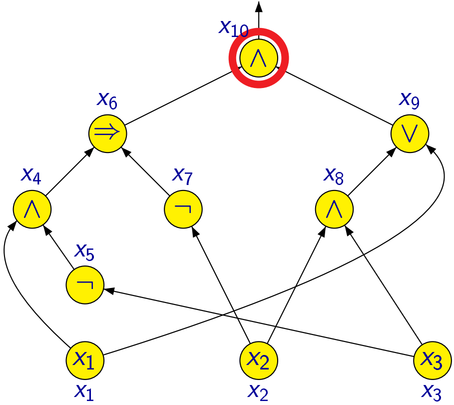
Pro x_8 přidáme do formule φ_1 tyto klauzule:
$(x_2 \vee x_3 \vee \neg x_8)$, $(x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_8)$, $(\neg x_2 \vee x_3 \vee \neg x_8)$, $(\neg x_2 \vee \neg x_3 \vee x_8)$

Příklad:



Pro x_9 přidáme do formule φ_1 tyto klauzule:
$(x_8 \vee x_1 \vee \neg x_9)$, $(x_8 \vee \neg x_1 \vee x_9)$, $(\neg x_8 \vee x_1 \vee x_9)$, $(\neg x_8 \vee \neg x_1 \vee x_9)$

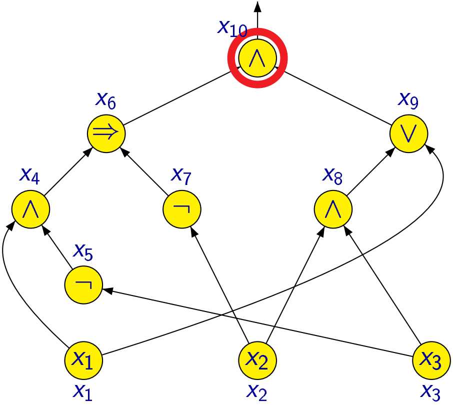
Příklad:



Pro x_{10} přidáme do formule φ_1 tyto klauzule:
$(x_6 \vee x_9 \vee \neg x_{10})$, $(x_6 \vee \neg x_9 \vee \neg x_{10})$, $(\neg x_6 \vee x_9 \vee \neg x_{10})$, $(\neg x_6 \vee \neg x_9 \vee x_{10})$

Převod SAT na 3-SAT

Příklad:



Nakonec přidáme do φ_1 klauzuli reprezentující hodnotu na výstupu:

$$(x_{10})$$

Převod SAT na 3-SAT

Celá formule φ_1 pak vypadá takto:

$(x_1 \vee x_5 \vee \neg x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_5 \vee \neg x_4) \wedge (\neg x_1 \vee x_5 \vee \neg x_4) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_5 \vee x_4) \wedge$
$(x_3 \vee x_5) \wedge (\neg x_3 \vee \neg x_5) \wedge$
$(x_4 \vee x_7 \vee x_6) \wedge (x_4 \vee \neg x_7 \vee x_6) \wedge (\neg x_4 \vee x_7 \vee \neg x_6) \wedge (\neg x_4 \vee \neg x_7 \vee x_6) \wedge$
$(x_2 \vee x_7) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_7) \wedge$
$(x_2 \vee x_3 \vee \neg x_8) \wedge (x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_8) \wedge (\neg x_2 \vee x_3 \vee \neg x_8) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3 \vee x_8) \wedge$
$(x_8 \vee x_1 \vee \neg x_9) \wedge (x_8 \vee \neg x_1 \vee x_9) \wedge (\neg x_8 \vee x_1 \vee x_9) \wedge (\neg x_8 \vee \neg x_1 \vee x_9) \wedge$
$(x_6 \vee x_9 \vee \neg x_{10}) \wedge (x_6 \vee \neg x_9 \vee \neg x_{10}) \wedge (\neg x_6 \vee x_9 \vee \neg x_{10}) \wedge (\neg x_6 \vee \neg x_9 \vee x_{10}) \wedge$
(x_{10})

Převod SAT na 3-SAT

Nyní se přesvědčíme, že φ_1 je splnitelná právě tehdy, když φ je splnitelná.

Převod SAT na 3-SAT

Nejprve předpokládejme, že φ je splnitelná.

Existuje tedy ohodnocení ν takové, že $[\varphi]_\nu = 1$. Definujme ohodnocení ν' následujícím způsobem:

- $\nu'(x_i) = \nu(x_i)$ pokud x_i je proměnná ve formuli φ
- Pokud x_i reprezentuje výstup hradla, $\nu'(x_i)$ nastavíme na hodnotu, která bude na tomto výstupu při ohodnocení ν.

Vzhledem k tomu, že $[\varphi]_\nu = 1$, musí platit $\nu'(x_{out}) = 1$.

Je tedy zřejmé, že bude platit $[\varphi_1]_{\nu'} = 1$, neboť x_{out} i všechny klauzule odpovídající jednotlivým hradlům budou mít při ohodnocení ν' hodnotu 1.

Převod SAT na 3-SAT

Předpokládejme nyní, že φ_1 je splnitelná,
tj. $[\varphi_1]_{\nu'} = 1$ pro nějaké ohodnocení ν'.

Snadno ověříme, že $[\varphi]_{\nu'} = 1$, neboť ν' musí odpovídat nějakému přiřazení hodnot na výstupech jednotlivých hradel, při kterém je na výstupu celého obvodu hodnota 1.

Tím jsme ověřili, že konstrukce formule φ_1 je opravdu korektní.

Převod SAT na 3-SAT

Nyní k formuli φ_1 sestrojíme formuli φ' takovou, že:

- φ' bude v KNF,
- každá klauzule formule φ' bude obsahovat právě 3 literály,
- v žádné klauzuli formule φ' se žádná proměnná nebude vyskytovat více než jednou,
- φ' bude splnitelná právě tehdy, když φ_1 je splnitelná.

Převod SAT na 3-SAT

Nejprve se zbavíme nadbytečných literálů a klauzulí:

- Pokud se v nějaké klauzuli vyskytuje nějaký literál více než jednou, odstraníme z této klauzule všechny jeho výskyty kromě jednoho.
- Pokud nějaká klauzule obsahuje současně literály x_i a $\neg x_i$ (kde x_i je nějaká proměnná), odstraníme celou tuto klauzuli (taková klauzule by měla hodnotu 1 při libovolném ohodnocení).

Je zjevné, že upravená formule je ekvivalentní s původní formulí.

Převod SAT na 3-SAT

Přidáme dvě nové proměnné y a z.

- Klauzule se třemi literály ponecháme beze změny.
- Každou klauzuli tvaru $(A \vee B)$ (tj. klauzuli se dvěma literály A a B) nahradíme následující dvojicí klauzulí:

$$(A \vee B \vee y) \ \wedge \ (A \vee B \vee \neg y)$$

- Každou klauzuli tvaru (A) (tj. klauzuli s jedním literálem) nahradíme následující čtveřicí klauzulí:

$$(A \vee y \vee z) \ \wedge \ (A \vee y \vee \neg z) \ \wedge \ (A \vee \neg y \vee z) \ \wedge \ (A \vee \neg y \vee \neg z)$$

Není těžké ověřit, že výsledná formule φ' je splnitelná právě tehdy, když je splnitelná původní formule.

Převod SAT na 3-SAT

Jestliže velikost formule φ je n, velikost formulí φ_1 i φ' bude v $O(n)$.

Formule φ_1 i φ' snadno sestrojíme v čase $O(n)$.

Popsaná redukce je tedy polynomiální.