Redukované gramatiky

Definice

Bezkontextová gramatika $G = (\Pi, \Sigma, S, P)$ je **redukovaná**, jestliže:

- Každý neterminál $X \in \Pi$ je možné přepsat na sekvenci terminálů, tj. existuje $w \in \Sigma^*$ takové, že $X \Rightarrow^* w$.
- Každý neterminál $X \in \Pi$ je dosažitelný z počátečního neterminálu S, tj. existují $\alpha, \beta \in (\Pi \cup \Sigma)^*$ takové, že $S \Rightarrow^* \alpha X \beta$.

Ke každé bezkontextové gramatice je možné sestrojit ekvivalentní redukovanou gramatiku.

Redukované gramatiky

Konstrukce $\mathcal{T} = \{X \in \Pi \mid \exists w \in \Sigma^* : X \Rightarrow^* w\}$

- Konstruujeme $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3, \ldots$
- $\mathcal{T}_1 = \{X \mid \exists w \in \Sigma^* : (X \to w) \in P\}$
- $\mathcal{T}_{i+1} = \mathcal{T}_i \cup \{X \mid \exists \alpha \in \mathcal{T}_i^* : (X \to \alpha) \in P\}$
- $\mathcal{T}_n = \mathcal{T}_{n+1} \Longrightarrow \mathcal{T}_n = \mathcal{T}$

Konstrukce $\mathcal{D} = \{X \in \Pi \mid \exists \alpha, \beta \in (\Pi \cup \Sigma)^* : S \Rightarrow^* \alpha X \beta\}$

- $\mathcal{D}_1 = \{S\}$
- $\mathcal{D}_{i+1} = \mathcal{D}_i \cup \{X \mid \exists Y \in \mathcal{D}_i, \alpha_1, \alpha_2 \in (\Pi \cup \Sigma)^* : (Y \to \alpha_1 X \alpha_2) \in P\}$
- $\mathcal{D}_n = \mathcal{D}_{n+1} \Longrightarrow \mathcal{D}_n = \mathcal{D}$

Redukované gramatiky

Příklad: Gramatika $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b\}, S, P)$

$$\begin{aligned} S &\rightarrow A \mid B \\ A &\rightarrow aB \mid bS \mid b \\ B &\rightarrow AB \mid Ba \\ C &\rightarrow AS \mid b \end{aligned}$$

Příklad: Gramatika $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b\}, S, P)$

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow A \mid B \\
A &\rightarrow aB \mid bS \mid b \\
B &\rightarrow AB \mid Ba \\
C &\rightarrow AS \mid b
\end{aligned}
$$

$$\mathcal{T} = \{$$

Redukované gramatiky

Příklad: Gramatika $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b\}, S, P)$

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow A \mid B \\
A &\rightarrow aB \mid bS \mid b \\
B &\rightarrow AB \mid Ba \\
C &\rightarrow AS \mid b
\end{aligned}
$$

$$\mathcal{T} = \{A,$$

Redukované gramatiky

Příklad: Gramatika $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b\}, S, P)$

$$
\begin{aligned}
S &\to A \mid B \\
A &\to aB \mid bS \mid b \\
B &\to AB \mid Ba \\
C &\to AS \mid b
\end{aligned}
$$

$$\mathcal{T} = \{A, C,$$

Příklad: Gramatika $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b\}, S, P)$

$$\begin{aligned} S &\rightarrow A \mid B \\ A &\rightarrow aB \mid bS \mid b \\ B &\rightarrow AB \mid Ba \\ C &\rightarrow AS \mid b \end{aligned}$$

$$\mathcal{T} = \{A, C, S$$

Redukované gramatiky

Příklad: Gramatika $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b\}, S, P)$

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow A \mid B \\
A &\rightarrow aB \mid bS \mid b \\
B &\rightarrow AB \mid Ba \\
C &\rightarrow AS \mid b
\end{aligned}
$$

$$\mathcal{T} = \{A, C, S\}$$

Redukované gramatiky

Příklad: Gramatika $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b\}, S, P)$

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow A \mid B \\
A &\rightarrow aB \mid bS \mid b \\
B &\rightarrow AB \mid Ba \\
C &\rightarrow AS \mid b
\end{aligned}
$$

$$\mathcal{T} = \{A, C, S\}$$

Gramatika $G' = (\{S, A, C\}, \{a, b\}, S, P')$

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow A \\
A &\rightarrow bS \mid b \\
C &\rightarrow AS \mid b
\end{aligned}
$$

Příklad: Gramatika $G' = (\{S, A, C\}, \{a, b\}, S, P')$

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow A \\
A &\rightarrow bS \mid b \\
C &\rightarrow AS \mid b
\end{aligned}
$$

Redukované gramatiky

Příklad: Gramatika $G' = (\{S, A, C\}, \{a, b\}, S, P')$

$$\begin{aligned} S &\rightarrow A \\ A &\rightarrow bS \mid b \\ C &\rightarrow AS \mid b \end{aligned}$$

$$\mathcal{D} = \{$$

Příklad: Gramatika $G' = (\{S, A, C\}, \{a, b\}, S, P')$

$$\begin{aligned} S &\rightarrow A \\ A &\rightarrow bS \mid b \\ C &\rightarrow AS \mid b \end{aligned}$$

$$\mathcal{D} = \{S,$$

Redukované gramatiky

Příklad: Gramatika $G' = (\{S, A, C\}, \{a, b\}, S, P')$

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow A \\
A &\rightarrow bS \mid b \\
C &\rightarrow AS \mid b
\end{aligned}
$$

$$\mathcal{D} = \{S, A$$

Redukované gramatiky

Příklad: Gramatika $G' = (\{S, A, C\}, \{a, b\}, S, P')$

$$\begin{aligned} S &\rightarrow A \\ A &\rightarrow bS \mid b \\ C &\rightarrow AS \mid b \end{aligned}$$

$$\mathcal{D} = \{S, A\}$$

Redukované gramatiky

Příklad: Gramatika $G' = (\{S, A, C\}, \{a, b\}, S, P')$

$$\begin{aligned} S &\rightarrow A \\ A &\rightarrow bS \mid b \\ C &\rightarrow AS \mid b \end{aligned}$$

$$\mathcal{D} = \{S, A\}$$

Gramatika $G'' = (\{S, A\}, \{a, b\}, S, P'')$

$$\begin{aligned} S &\rightarrow A \\ A &\rightarrow bS \mid b \end{aligned}$$

Redukované gramatiky

Pořadí obou kroků je třeba dodržet. Pokud bychom je provedli v opačném pořadí, můžeme dostat gramatiku, která není redukovaná.

Příklad:

$$\begin{aligned} S &\to a \mid A \\ A &\to AB \\ B &\to b \end{aligned}$$

Pokud provedeme oba kroky algoritmu ve správném pořadí, dostaneme

$$S \to a$$

Pokud provedeme kroky algoritmu v opačném pořadí, dostaneme

$$\begin{aligned} S &\to a \\ B &\to b \end{aligned}$$

Redukované gramatiky

Předchozí algoritmus lze použít ke zjištění, zda $L(G) \neq \emptyset$.

Stačí ověřit, zda $S \in \mathcal{T}$:

- Pokud ano, je $L(G) \neq \emptyset$.
- Pokud ne, je $L(G) = \emptyset$.