Převod 3-SAT na ILP

Problém ILP (celočíselné lineární programování)

Vstup: Celočíselná matice A a celočíselný vektor b.

Otázka: Existuje celočíselný vektor x, takový že $Ax \leq b$?

Příklad instance problému:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ptáme se tedy, zda existuje celočíselné řešení následující soustavy nerovnic:

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 &\leq 8 \\ x_1 + x_3 &\leq -3 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 5 \end{aligned}$$

Převod 3-SAT na ILP

Jedním z řešení soustavy

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 &\leq 8 \\ x_1 + x_3 &\leq -3 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 5 \end{aligned}$$

je například $x_1 = -4$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, tj.

$$x = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

neboť

$$\begin{aligned} 3 \cdot (-4) - 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 &= -9 \leq 8 \\ -4 + 1 &= -3 \leq -3 \\ 2 \cdot (-4) + 1 &= -7 \leq 5 \end{aligned}$$

Pro tuto instanci je tedy odpověď Ano.

Převod 3-SAT na ILP

Věta

Problém ILP je NP-těžký.

NP-obtížnost problému ILP dokážeme tak, že ukážeme polynomiální redukci z následujícího známého NP-úplného problému:

3-SAT

Vstup: Booleovská formule φ v konjunktivní normální formě, kde každá klauzule obsahuje právě tři literály.

Otázka: Je φ splnitelná?

Převod 3-SAT na ILP

Předpokládejme, že máme dánu nějakou konkrétní instanci problému 3-SAT, například následující formuli φ:

$$(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_4)$$

Naším úkolem je vyrobit k formuli φ soustavu lineárních nerovnic takovou, že tato soustava bude mít řešení v oboru celých čísel právě tehdy, když je formule φ splnitelná.

Převod 3-SAT na ILP

$$(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_4)$$

Krok 1:
Každé booleovské proměnné x_i ve formuli φ bude v soustavě nerovnic odpovídat neznámá x_i'.

Například pro formuli φ uvedenou výše bude soustava nerovnic obsahovat neznámé x_1', x_2', x_3', x_4'.

Převod 3-SAT na ILP

$$(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_4)$$

Krok 2:
Nejprve do soustavy přidáme pro každou neznámou x_i' dvojici nerovnic $x_i' \geq 0$ a $x_i' \leq 1$:

$$(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_4)$$

Krok 2:
Nejprve do soustavy přidáme pro každou neznámou x_i' dvojici nerovnic $x_i' \geq 0$ a $x_i' \leq 1$:

$$\begin{aligned} x_1' &\geq 0 & \qquad x_3' &\geq 0 \\ x_1' &\leq 1 & x_3' &\leq 1 \\ x_2' &\geq 0 & x_4' &\geq 0 \\ x_2' &\leq 1 & x_4' &\leq 1 \end{aligned}$$

Převod 3-SAT na ILP

$$(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_4)$$

Krok 2:
Nejprve do soustavy přidáme pro každou neznámou x_i' dvojici nerovnic $x_i' \geq 0$ a $x_i' \leq 1$:

$$\begin{array}{ccc} x_1' & \geq & 0 \\ x_1' & \leq & 1 \\ x_2' & \geq & 0 \\ x_2' & \leq & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} x_3' & \geq & 0 \\ x_3' & \leq & 1 \\ x_4' & \geq & 0 \\ x_4' & \leq & 1 \end{array}$$

Poznámka: Tyto nerovnice zaručují, že v libovolném řešení výsledné soustavy bude muset pro všechna x_i' platit $x_i' \in \{0, 1\}$.

Krok 3:
Pro každou klauzuli tvaru $(L_1 \vee L_2 \vee L_3)$, kde L_i jsou jednotlivé literály, přidáme do soustavy nerovnic nerovnici

$$f_1 + f_2 + f_3 \geq 1$$

kde

$$f_i = \begin{cases} x_i' & \text{pokud } L_i = x_i \\ (1 - x_i') & \text{pokud } L_i = \neg x_i \end{cases}$$

Převod 3-SAT na ILP

Krok 3:
Pro každou klauzuli tvaru $(L_1 \vee L_2 \vee L_3)$, kde L_i jsou jednotlivé literály, přidáme do soustavy nerovnic nerovnici

$$f_1 + f_2 + f_3 \geq 1$$

kde

$$f_i = \begin{cases} x_i' & \text{pokud } L_i = x_i \\ (1 - x_i') & \text{pokud } L_i = \neg x_i \end{cases}$$

Příklad: Pro klauzuli $(x_1 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4)$ přidáme nerovnici

$$x_1' + (1 - x_3') + (1 - x_4') \geq 1$$

Převod 3-SAT na ILP

$$(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_4)$$

Takto vypadá celá odpovídající soustava nerovnic:

$$\begin{array}{rcl}
x_1' & \geq & 0 \\
x_1' & \leq & 1 \\
x_2' & \geq & 0 \\
x_2' & \leq & 1 \\
x_3' & \geq & 0 \\
x_3' & \leq & 1 \\
x_4' & \geq & 0 \\
x_4' & \leq & 1 \\
x_1' + (1 - x_2') + x_3' & \geq & 1 \\
x_2' + (1 - x_3') + x_4' & \geq & 1 \\
x_1' + (1 - x_3') + (1 - x_4') & \geq & 1 \\
(1 - x_1') + (1 - x_2') + x_4' & \geq & 1
\end{array}$$

Převod 3-SAT na ILP

Krok 4:
Soustavu nerovnic převedeme pomocí jednoduchých aritmetických úprav do požadovaného maticového tvaru tak, aby všechny nerovnice byly tvaru

$$c_1 \cdot x'_1 \; + \; c_2 \cdot x'_2 \; + \; \cdots \; + \; c_n \cdot x'_n \leq d$$

kde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ a d jsou konstanty.

Převod 3-SAT na ILP

Krok 4:
Soustavu nerovnic převedeme pomocí jednoduchých aritmetických úprav do požadovaného maticového tvaru tak, aby všechny nerovnice byly tvaru

$$c_1 \cdot x'_1 \; + \; c_2 \cdot x'_2 \; + \; \cdots \; + \; c_n \cdot x'_n \leq d$$

kde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ a d jsou konstanty.

Poznámka:
Pokud se v nerovnici vyskytuje nerovnost '$\geq$' místo '$\leq$', můžeme využít toho, že $x \geq y$ právě tehdy, když $-x \leq -y$.

Převod 3-SAT na ILP

Příklad:

$$x_1' + (1 - x_3') + (1 - x_4') \geq 1$$

Převod 3-SAT na ILP

Příklad:

$$\begin{array}{rcl} x'_1 + (1 - x'_3) + (1 - x'_4) & \geq & 1 \\ x'_1 - x'_3 - x'_4 + 2 & \geq & 1 \end{array}$$

// sečteme jednotlivé členy

Převod 3-SAT na ILP

Příklad:

$$
\begin{aligned}
x'_1 + (1 - x'_3) + (1 - x'_4) &\geq 1 && \text{// sečteme jednotlivé členy} \\
x'_1 - x'_3 - x'_4 + 2 &\geq 1 && \text{// odečteme } 2 \text{ od obou stran} \\
x'_1 - x'_3 - x'_4 &\geq -1
\end{aligned}
$$

Příklad:

$$\begin{aligned}
x_1' + (1 - x_3') + (1 - x_4') &\geq 1 && \text{// sečteme jednotlivé členy}\\
x_1' - x_3' - x_4' + 2 &\geq 1 && \text{// odečteme } 2 \text{ od obou stran}\\
x_1' - x_3' - x_4' &\geq -1 && \text{// vynásobíme obě strany } -1\\
-x_1' + x_3' + x_4' &\leq 1
\end{aligned}$$

Převod 3-SAT na ILP

Příklad:

$$\begin{array}{rcl}
x'_1 + (1 - x'_3) + (1 - x'_4) & \geq & 1 \qquad \text{// sečteme jednotlivé členy} \\
x'_1 - x'_3 - x'_4 + 2 & \geq & 1 \qquad \text{// odečteme } 2 \text{ od obou stran} \\
x'_1 - x'_3 - x'_4 & \geq & -1 \qquad \text{// vynásobíme obě strany } -1 \\
-x'_1 + x'_3 + x'_4 & \leq & 1
\end{array}$$

Po doplnění chybějících členů (s koeficienty 0) tedy výsledná nerovnice vypadá takto:

$$(-1) \cdot x'_1 + 0 \cdot x'_2 + 1 \cdot x'_3 + 1 \cdot x'_4 \leq 1$$

Převod 3-SAT na ILP

$$(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_4)$$

Po úpravě všech nerovnic tedy dostaneme soustavu:

$$\begin{array}{ccccccccc}
(-1)\cdot x_1' & + & 0\cdot x_2' & + & 0\cdot x_3' & + & 0\cdot x_4' & \leq & 0 \\
1\cdot x_1' & + & 0\cdot x_2' & + & 0\cdot x_3' & + & 0\cdot x_4' & \leq & 1 \\
0\cdot x_1' & + & (-1)\cdot x_2' & + & 0\cdot x_3' & + & 0\cdot x_4' & \leq & 0 \\
0\cdot x_1' & + & 1\cdot x_2' & + & 0\cdot x_3' & + & 0\cdot x_4' & \leq & 1 \\
0\cdot x_1' & + & 0\cdot x_2' & + & (-1)\cdot x_3' & + & 0\cdot x_4' & \leq & 0 \\
0\cdot x_1' & + & 0\cdot x_2' & + & 1\cdot x_3' & + & 0\cdot x_4' & \leq & 1 \\
0\cdot x_1' & + & 0\cdot x_2' & + & 0\cdot x_3' & + & (-1)\cdot x_4' & \leq & 0 \\
0\cdot x_1' & + & 0\cdot x_2' & + & 0\cdot x_3' & + & 1\cdot x_4' & \leq & 1 \\
(-1)\cdot x_1' & + & 1\cdot x_2' & + & (-1)\cdot x_3' & + & 0\cdot x_4' & \leq & 0 \\
0\cdot x_1' & + & (-1)\cdot x_2' & + & 1\cdot x_3' & + & (-1)\cdot x_4' & \leq & 0 \\
(-1)\cdot x_1' & + & 0\cdot x_2' & + & 1\cdot x_3' & + & 1\cdot x_4' & \leq & 1 \\
1\cdot x_1' & + & 1\cdot x_2' & + & 0\cdot x_3' & + & (-1)\cdot x_4' & \leq & 1
\end{array}$$

Převod 3-SAT na ILP

$$(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_4)$$

Tuto soustavu můžeme zapsat maticovým zápisem jako:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Převod 3-SAT na ILP

Je zřejmé, že tuto konstrukci můžeme provést v čase $O(n^2)$, kde n je velikost formule φ.

Poznámka:

Ve skutečnosti nejvíce času zabere vyplňování matice A nulami. Není těžké ověřit, že vše ostatní (vyplnění nenulových prvků v matici A a vytvoření vektoru b) je možné provést v čase $O(n)$.

Je zřejmé, že tuto konstrukci můžeme provést v čase $O(n^2)$, kde n je velikost formule φ.

Poznámka:
Ve skutečnosti nejvíce času zabere vyplňování matice A nulami. Není těžké ověřit, že vše ostatní (vyplnění nenulových prvků v matici A a vytvoření vektoru b) je možné provést v čase $O(n)$.

Poznámka:
Není těžké si rozmyslet, jak by vypadal algoritmus, který by vytvářel matici A a vektor b přímo, bez mezikroku s úpravami nerovnic.
Tento mezikrok zavádíme pro lepší pochopení konstrukce.

Převod 3-SAT na ILP

Nyní ještě zbývá ukázat korektnost konstrukce.

Nejprve si všimněme, že vzhledem k tomu, že vytvořená soustava obsahuje pro každé x_i' nerovnice

$$x_i' \geq 0 \qquad\qquad x_i' \leq 1$$

musí jakékoliv řešení celé soustavy (pokud vůbec nějaké existuje) být toho typu, že jednotlivá x_i' nabývají pouze hodnot 0 nebo 1.

Převod 3-SAT na ILP

Každému ohodnocení ν booleovských proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_k$ ve formuli φ jednoznačně odpovídá přiřazení hodnot neznámým $x_1', x_2', \ldots, x_k'$ ve vytvořené soustavě nerovnic:

$$x_i' = \begin{cases} 0 & \text{když } [x_i]_\nu = \text{FALSE} \\ 1 & \text{když } [x_i]_\nu = \text{TRUE} \end{cases}$$

Převod 3-SAT na ILP

Každému ohodnocení ν booleovských proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_k$ ve formuli φ jednoznačně odpovídá přiřazení hodnot neznámým $x'_1, x'_2, \ldots, x'_k$ ve vytvořené soustavě nerovnic:

$$x'_i = \begin{cases} 0 & \text{když } [x_i]_\nu = \text{FALSE} \\ 1 & \text{když } [x_i]_\nu = \text{TRUE} \end{cases}$$

Tento vztah je vzájemně jednoznačný.

Ke každému přiřazení celočíselných hodnot neznámým $x'_1, x'_2, \ldots, x'_k$ takovému, že pro všechna x'_i platí $x'_i \in \{0, 1\}$, existuje odpovídající přiřazení booleovských hodnot ν.

Vezměme si nyní nějaké ohodnocení booleovských proměnných ν a jemu odpovídající přiřazení hodnot 0 a 1 neznámým $x_1', x_2', \ldots, x_k'$.

Připomeňme, že ve vytvořené soustavě nerovnic odpovídá každé klauzuli $(L_1 \vee L_2 \vee L_3)$ vyskytující se ve formuli φ nerovnice tvaru

$$f_1 + f_2 + f_3 \geq 1$$

kde f_i je tvaru x_j', pokud $L_i = x_j$, nebo $(1 - x_j')$, pokud $L_i = \neg x_j$.

Převod 3-SAT na ILP

Vezměme si nyní nějaké ohodnocení booleovských proměnných ν a jemu odpovídající přiřazení hodnot 0 a 1 neznámým $x'_1, x'_2, \ldots, x'_k$.

Připomeňme, že ve vytvořené soustavě nerovnic odpovídá každé klauzuli $(L_1 \vee L_2 \vee L_3)$ vyskytující se ve formuli φ nerovnice tvaru

$$f_1 + f_2 + f_3 \geq 1$$

kde f_i je tvaru x'_j, pokud $L_i = x_j$, nebo $(1 - x'_j)$, pokud $L_i = \neg x_j$.

Vidíme, že ať už je literál L_i tvaru x_j nebo $\neg x_j$, platí, že:

- $f_i = 1$, pokud $[L_i]_\nu = \text{TRUE}$
- $f_i = 0$, pokud $[L_i]_\nu = \text{FALSE}$

Převod 3-SAT na ILP

Hodnota výrazu $f_1 + f_2 + f_3$ při daném přiřazení je tedy počtem literálů v klauzuli $(L_1 \vee L_2 \vee L_3)$, které mají při ohodnocení ν hodnotu TRUE.

Vzhledem k tomu, že $[L_1 \vee L_2 \vee L_3]_\nu = \mathrm{TRUE}$ právě tehdy, když pro alespoň jeden z literálů L_1, L_2, L_3 platí $[L_i]_\nu = \mathrm{TRUE}$, je očividné, že nerovnost

$$f_1 + f_2 + f_3 \geq 1$$

platí při daném přiřazení právě tehdy, když

$$[L_1 \vee L_2 \vee L_3]_\nu = \mathrm{TRUE}\,.$$

Převod 3-SAT na ILP

Tvrzení

Pokud je formule φ splnitelná, pak existuje celočíselné řešení vytvořené soustavy nerovnic.

Důkaz: Jestliže je φ splnitelná, existuje nějaké ohodnocení ν takové, že $[\varphi]_\nu = \text{TRUE}$, tj. takové, kde $[C_i]_\nu = \text{TRUE}$ pro všechny klauzule C_i formule φ.

Z předchozího je zřejmé, že pokud vezmeme jemu odpovídající přiřazení hodnot 0 a 1 neznámým $x'_1, x'_2, \ldots, x'_k$, budou při tomto přiřazení platit všechny vytvořené nerovnice:

- Nerovnice tvaru $x'_i \geq 0$ a $x'_i \leq 1$ proto, že $x_i \in \{0, 1\}$.
- Nerovnice odpovídající klauzulím proto, že při ohodnocení ν má každá klauzule hodnotu TRUE.

Převod 3-SAT na ILP

Tvrzení

Jestliže existuje řešení vytvořené soustavy nerovnic, pak je formule φ splnitelná.

Důkaz: Je zřejmé, že pokud má soustava nerovnic řešení, tak musí toto řešení pro všechna x_i' splňovat podmínku $x_i' \in \{0, 1\}$.

Tomuto řešení tedy jednoznačně odpovídá nějaké ohodnocení ν a z předchozího je zřejmé, že každá klauzule formule φ při tomto ohodnocení nabývá hodnoty TRUE, takže platí

$$[\varphi]_\nu = \text{TRUE}$$

a formule φ je tedy splnitelná.

Vidíme, že formule φ je splnitelná právě tehdy, když existuje celočíselné řešení k ní vytvořené soustavy nerovnic.

Tím je důkaz korektnosti konstrukce hotov.