VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A INFORMATIKY | KATEDRA INFORMATIKY

Strategie řešení problémů hrubou silou a úplným prohledáváním

doc. Mgr. Jiří Dvorský, Ph.D.

Stav prezentace ke dni 15. září 2024

Katedra informatiky
Fakulta elektrotechniky a informatiky
VŠB – TU Ostrava

Osnova přednášky

Strategie řešení problémů hrubou silou a úplným prohledáváním

- Třídící algoritmy
  - Třídění výběrem – SelectSort
  - Bublinové třídění – BubbleSort
- Sekvenční vyhledávání
- Vyhledávání podřetězce hrubou silou
- Problém nejbližší dvojice bodů
- Konvexní obal množiny
- Úplné prohledávání

Osnova přednášky (pokrač.)

Strategie řešení problémů hrubou silou

Charakteristika

Strategie řešení problémů hrubou silou je založena na **přímočarém přístupu k řešení problému**, kdy algoritmus řešení vychází přímo ze zadání problému a pojmů obsažených v zadání.

Strategie řešení problémů hrubou silou – příklady

Výpočet mocniny

Máme vypočítat mocninu a^n pro nenulové a a n přirozené číslo. Z definice mocnění platí

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ krát}}$$

Řešení hrubou silou – vynásobíme číslo a mezi sebou $n - 1$ krát.

Další příklady řešení hrubou silou

- výpočet NSD postupným dělením a
- násobení matic podle algoritmu z předchozí prezentace.

Strategie řešení problémů hrubou silou

1. obecná strategie – je obtížné najít problém, kde by „nezabrala“,
2. obecně sice nevede k efektivním algoritmům, ale pro některé problémy, např. násobení matic, pattern matching, jsou algoritmy založené na této strategii použitelné i pro větší vstupy,
3. přijatelná strategie v případě, kdy se nevyplatí zabývat se sofistikovanějším algoritmem – ad hoc řešení problému,
4. vždy použitelná strategie pro řešení problémů s malou velikostí vstupu a
5. význam i jako měřítko, kterým můžeme poměřovat efektivnější algoritmy řešící stejný problém.

Strategie řešení problémů hrubou silou a úplným prohledáváním

Třídící algoritmy

Třídící algoritmy

- Máme dáno pole n prvků pro které je definována relace uspořádání (čili vztah „menší než“), pro ukázku vezměme celé čísla.
- Úkolem je přeuspořádání prvků pole do neklesající posloupnosti – prvek pole na nižším indexu musí být menší nebo roven prvku na vyšším indexu.
- Otázka zní: existuje třídící algoritmus řešící problém hrubou silou, zcela přímočaře?

Třídění výběrem – SelectSort

Výchozí úvaha

Otázka

O kterém prvku z pole víme přesně kam patří?

Odpověď

O nejmenším! Patří na začátek pole, na nejnižší index! (Pozn. Totéž platí pro největší prvek.)

Princip algoritmu

1. Vybereme z n prvků pole nejmenší prvek a zaměníme jej s prvním prvkem pole.
2. Vybereme ze zbylých $n - 1$ prvků pole nejmenší prvek a zaměníme jej s druhým prvkem pole.
3. Obecně v i-tém kroku vybereme ze zbylých $n - i$ nejmenší

Třídění výběrem – ukázka

89	45	68	90	29	34	17
17	45	68	90	29	34	89
17	29	68	90	45	34	89
17	29	34	90	45	68	89
17	29	34	45	90	68	89
17	29	34	45	68	90	89
17	29	34	45	68	89	90

Třídění výběrem – pseudokód

Vstup : Pole $A[0 \ldots n-1]$ s definovaným uspořádáním na prvcích pole
Výstup: Setříděné pole A

```
1 for i ← 0 to n - 2 do
2 |   min ← i;
3 |   for j ← i + 1 to n - 1 do
4 |   |   if A[j] < A[min] then
5 |   |   |   min ← j;
6 |   |   end
7 |   end
8 |   Swap (A[i], A[min]);
9 end
```

Funkce pro výměnu hodnot dvou proměnných

```
1 Procedure Swap(x, y)
  |   Vstup  : Parametry x a y shodného datového typu
  |   Výstup: Navzájem přehozené hodnoty x a y
2 |   aux ← x;
3 |   x ← y;
4 |   y ← aux;
5 end
```

Třídění výběrem – analýza

1. Velikost vstupu – počet prvků n.
2. Základní operace – porovnání prvků (někdy i počet výměn prvků).
3. Počet základních operací závisí pouze na n – nejhorší, nejlepší a průměrný případ splývají.
4. Sestavení vztahů

$$C(n) = \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} 1 = \sum_{i=0}^{n-2} [(n-1)-(i+1)+1]$$

$$= \sum_{i=0}^{n-2} (n-1-i) = \frac{1}{2} n(n-1) \approx \frac{1}{2} n^2 = \Theta(n^2)$$

Třídění výběrem – analýza (pokrač.)

Poznámky

- Podrobný výpočet sumy lze najít v příkladu „Unikátnost prvků“ v minulé lekci.
- Složitost algoritmu nijak nezávisí na míře nesetříděnosti vstupního pole. Algoritmus tedy **není přirozený**.
- Algoritmus je ale **stabilní** – jako minimum je vždy brán první prvek z několika shodných.
- Algoritmus je **in situ** – vystačíme si s konstantním rozsahem paměti navíc.

Třídění výběrem

Animace

K algoritmu třídění výběrem je k dispozici animace v samostatném souboru.

Bublinové třídění – BubbleSort

- Vezmu dvojici sousedních prvků A_i a A_{i+1}.
- Pokud jsou v nesprávném pořadí, tak je vyměním.
- Zvýším i o jedna a pokračuji další dvojicí prvků.
- Po každém průchodu polem A se dostane jeden prvek určitě na své místo.

$$A_0, \dots, A_j \leftrightarrow A_{j+1}, \dots A_{n-i-1} \mid \underbrace{A_{n-i} \leq \dots \leq A_{n-1}}_{\text{setříděno}}$$

  V dalším průchodu polem už procházím o jeden prvek méně.
- Proč bublinové třídění – největší prvek z nesetříděné části takto „probublá“ směrem ke konci pole.

Bublinové třídění – ukázka

89	↔	45		68		90		29		34		17
45		89	↔	68		90		29		34		17
45		68		89	↔	90		29		34		17
45		68		89		90	↔	29		34		17
45		68		89		29		90	↔	34		17
45		68		89		29		34		90	↔	17
45		68		89		29		34		17		90
45	↔	68	↔	89	↔	29		34		17		90
45		68		29		89	↔	34		17		90
45		68		29		34		89	↔	17		90
45		68		29		34		17		89		90

a tak dále

Bublinové třídění – pseudokód

Vstup : Pole $A[0 \ldots n-1]$ s definovaným uspořádáním na prvcích pole
Výstup: Setříděné pole A

```
1 for i ← 0 to n − 2 do
2 |   for j ← 0 to n − i − 2 do
3 |   |   if A[j] > A[j + 1] then
4 |   |   |   Swap (A[j], A[j + 1]);
5 |   |   end
6 |   end
7 end
```

Bublinové třídění – analýza

1. Velikost vstupu – počet prvků n.
2. Základní operace – porovnání prvků.
3. Počet základních operací závisí pouze na n – nejhorší, nejlepší a průměrný případ splývají.
4. Sestavení vztahů

$$C(n) = \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=0}^{n-i-2} 1 = \sum_{i=0}^{n-2} [(n-i-2)-0+1]$$

$$= \sum_{i=0}^{n-2} (n-1-i) = \frac{1}{2} n(n-1) \approx \frac{1}{2} n^2 = \Theta(n^2)$$

Bublinové třídění – analýza (pokrač.)

Počet základních operací $C(n)$ je shodný s tříděním výběrem.
Počet vzájemných výměn prvků $S(n)$ ale už na vstupu závisí a je v nejhorším případě roven

$$S_{worst}(n) = C(n) = \frac{1}{2}n(n-1) \in \Theta(n^2)$$

Bublinové třídění – další vlastnosti

- Algoritmus je **in situ** – vystačíme si s konstantním rozsahem paměti navíc.
- Algoritmus je **stabilní** – k výměně dojde jen pokud je $A[j] > A[j+1]$, jinak ne.
- Složitost této verze algoritmu nijak nezávisí na míře nesetříděnosti vstupního pole. Algoritmus tedy **není přirozený**.
- Modifikované verze (viz dále) už ale přirozené jsou.

Bublinové třídění – alternativní konstrukce algoritmu I

- Počet opakování vnějšího cyklu by měl záviset na provedení či neprovedení výměny prvků.
- Pokud se během vnitřního cyklu neprovedla žádná výměna prvků není nutné toto pole dále procházet – pole je evidentně setříděno.
- Zavedeme si logickou proměnnou *AnySwap*, kam si budeme ukládat informaci o případné výměně.

Bublinové třídění – alternativní konstrukce algoritmu I

Vstup : Pole $A[0 \ldots n-1]$ s definovaným uspořádáním na prvcích pole
Výstup: Setříděné pole A

```
1 do
2 |   AnySwap ← false;
3 |   for i ← 0 to n – 2 do
4 |   |   if A[i] > A[i + 1] then
5 |   |   |   Swap (A[i], A[i + 1]);
6 |   |   |   AnySwap ← true;
7 |   |   end
8 |   end
9 while AnySwap;
```

Bublinové třídění – alternativní konstrukce algoritmu II

- Kombinovaná konstrukce algoritmu:
  - nedošlo k výměně prvků a
  - zkracování posloupnosti o jeden prvek zprava.
- Zavedeme si logickou proměnnou *AnySwap*, kam si budeme ukládat informaci o případné výměně.
- Proměnná *Right* bude označovat pravý okraj tříděné posloupnosti.

Bublinové třídění – alternativní konstrukce algoritmu II

Vstup : Pole $A[0 \ldots n-1]$ s definovaným uspořádáním na prvcích pole
Výstup: Setříděné pole A

```
1  Right ← n - 2;
2  do
3  |   AnySwap ← false;
4  |   for i ← 0 to Right do
5  |   |   if A[i] > A[i + 1] then
6  |   |   |   Swap (A[i], A[i + 1]);
7  |   |   |   AnySwap ← true;
8  |   |   end
9  |   end
10 |   Right ← Right - 1;
11 while AnySwap;
```

Bublinové třídění – alternativní konstrukce algoritmu III

Proměnná *LastSwapIndex*

- bude označovat index poslední výměny prvků,
- jinak řečeno pravý okraj tříděné posloupnosti v následujícím průchodu polem.

Bublinové třídění – alternativní konstrukce algoritmu III

Vstup : Pole $A[0 \ldots n-1]$ s definovaným uspořádáním na prvcích pole
Výstup: Setříděné pole A

```
1  Right ← n − 2;
2  do
3  |   LastSwapIndex ← 0;
4  |   for i ← 0 to Right do
5  |   |   if A[i] > A[i + 1] then
6  |   |   |   Swap (A[i], A[i + 1]);
7  |   |   |   LastSwapIndex ← i + 1;
8  |   |   end
9  |   end
10 |   Right ← LastSwapIndex;
11 while LastSwapIndex > 0;
```

Bublinové třídění

Animace

K algoritmu bublinového třídění je k dispozici animace v samostatném souboru. V animaci je znázorněn algoritmus podle snímku 229.

Třídění přetřásáním – ShakerSort

U BubbleSortu lze pozorovat dva efekty:

1. „velké“ prvky, **zajíci**, se velice rychle posunují ke konci pole, ale
2. „malé“ prvky, **želvy**, se posunují na začátek pole jen jako důsledek rychlého přesunu velkých prvků.

Modifikace BubbleSortu:

- pole budeme procházet střídavě z obou stran
- po každém průchodu pole se vymění role zajíců a želv, cimrmanovská „výměna mečů“ ze hry Blaník
- **ShakerSort** – pole je „přestřásáno, setřepáváno“ jako v barovém shakeru.

Třídění přetřásáním – ukázka

89	↔	45		68		90		29		34		17		
45		89	↔	68		90		29		34		17		
45		68		89	↔	90		29		34		17		
45		68		89		90	↔	29		34		17		
45		68		89		29		90	↔	34		17		
45		68		89		29		34		90	↔	17		
45		68		89		29		34		17		90		
45		68		89		29		34	↔	17		90		
45		68		89		29	↔	17		34		90		
45		68		89	↔	17		29		34		90		
45		68	↔	17		89		29		34		90		
45	↔	17		68		89		29		34		90		
17		45		68		89		29		34		90		

a tak dále

Třídění přetřásáním – pseudokód

Vstup : Pole $A[0 \ldots n-1]$ s definovaným uspořádáním na prvcích pole
Výstup: Setříděné pole A

```
1 Left ← 0;
2 Right ← n - 1;
3 do
4 |   LeftToRight (A, Left, Right);
5 |   RightToLeft (A, Left, Right);
6 while Left < Right;
```

Třídění přetřásáním – pseudokód (pokrač.)

```
1  Procedure LeftToRight(A, Left, Right)
2  |  j ← 0;
3  |  for i ← Left to Right – 1 do
4  |  |  if A[i] > A[i + 1] then
5  |  |  |  Swap (A[i], A[i + 1]);
6  |  |  |  j ← i;
7  |  |  end
8  |  end
9  |  Right ← j;
10 end
```

Třídění přetřásáním – pseudokód (pokrač.)

```
1  Procedure RightToLeft(A, Left, Right)
2      j ← 0;
3      for i ← Right downto Left + 1 do
4          if A[i − 1] > A[i] then
5              Swap (A[i − 1], A[i]);
6              j ← i;
7          end
8      end
9      Left ← j;
10 end
```

Třídění přetřásáním

Animace

K algoritmu třídění přetřásáním je k dispozici animace v samostatném souboru.

Strategie řešení problémů hrubou silou a úplným prohledáváním

Sekvenční vyhledávání

Sekvenční vyhledávání

- Typická ukázka strategie řešení hrubou silou.
- Silná stránka algoritmu – jednoduchost (simplicity).
- Slabá stránka algoritmu – vysoká složitost.

Vstup : Pole $A[0 \dots n-1]$ a hledaný prvek x
Výstup: Index prvního výskytu prvku x v poli A, jinak -1

```
1 for i ← 0 to n − 1 do
2 |   if A[i] = x then
3 |   |   return i;
4 |   end
5 end
6 return -1;
```

Algoritmus bývá také označován jako **lineární vyhledávání**.

Lineární vyhledávání – složitost

	Počet porovnání
Nejhorší případ	n
Nejlepší případ	1
Průměrný případ	$\frac{1}{2}p(n+1) + n(1-p)$

kde p je pravděpodobnost úspěšného vyhledání

Lineární vyhledávání – využití zarážky (angl. sentinel)

Vstup : Pole $A[0 \dots n]$ a hledaný prvek x
Výstup: Index prvního výskytu prvku x v poli A, jinak -1

```
1 A[n] ← x;
2 i ← 0;
3 while A[i] ≠ x do
4 |   i ← i + 1;
5 end
6 if i < n then return i;
7 return -1;
```

Strategie řešení problémů hrubou silou a úplným prohledáváním

Vyhledávání podřetězce hrubou silou

Vyhledávání podřetězce hrubou silou

Zadání

Najít vzorek p v textu t.

Řešení hrubou silou

1. Přiložíme vzorek na začátek textu.
2. Začneme porovnávat znaky ve vzorku a textu.
3. Pokud se shodují všechny znaky vzorku s textem – nalezeno.
4. Pokud nalezneme neshodu, posuneme vzorek o jednu pozici dopředu a pokračujeme bodem 2

$$\begin{array}{ccccccccc} t_0 & \cdots & t_i & \cdots & t_{i+j} & \cdots & t_{i+m-1} & \cdots & t_{n-1} \\ & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \\ & & p_0 & \cdots & p_j & \cdots & p_{m-1} & & \end{array}$$

Vyhledávání hrubou silou – pseudokód

Vstup : Vzorek p, text t a počáteční pozice s
Výstup: Pozice prvního výskytu p v textu t nebo -1

```
1 for i ← s to |t| - |p| do
2 |   j ← 0;
3 |   while j < |p| do
4 |   |   if p[j] ≠ t[i + j] then break;
5 |   |   j ← j + 1;
6 |   end
7 |   if j = |p| then return i;
8 end
9 return -1;
```

Vyhledávání hrubou silou – příklad

První pokus

Posun o 1 znak

Druhý pokus

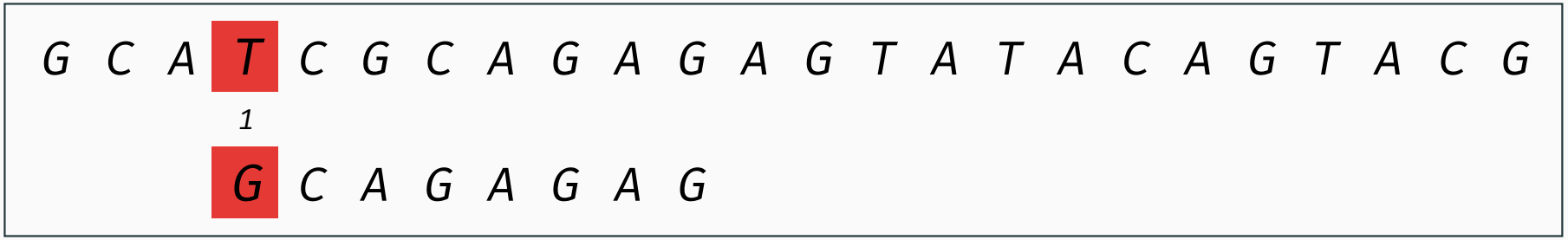
Posun o 1 znak

Vyhledávání hrubou silou – příklad (pokrač.)

Třetí pokus

Posun o 1 znak

Čtvrtý pokus



Posun o 1 znak

Vyhledávání hrubou silou – příklad (pokrač.)

Pátý pokus

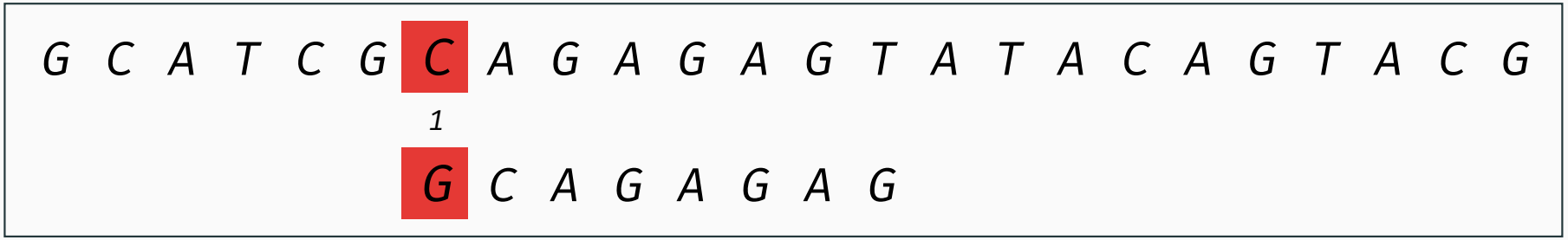
Posun o 1 znak

Šestý pokus

Posun o 1 znak

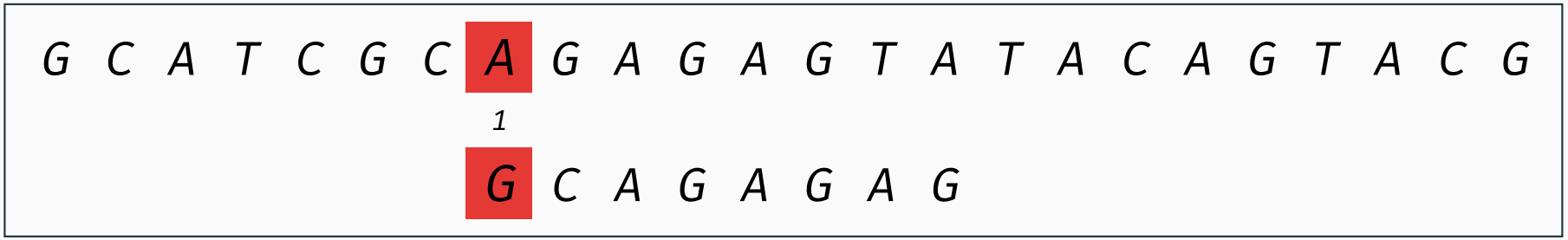
Vyhledávání hrubou silou – příklad (pokrač.)

Sedmý pokus



Posun o 1 znak

Osmý pokus



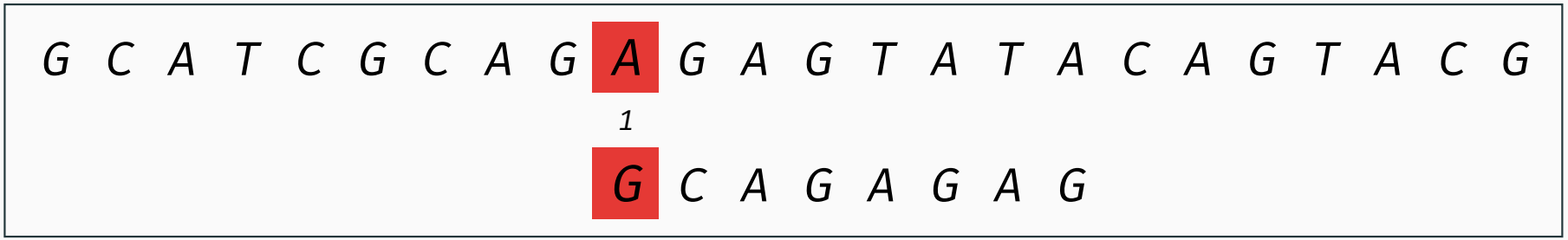
Posun o 1 znak

Vyhledávání hrubou silou – příklad (pokrač.)

Devátý pokus

Posun o 1 znak

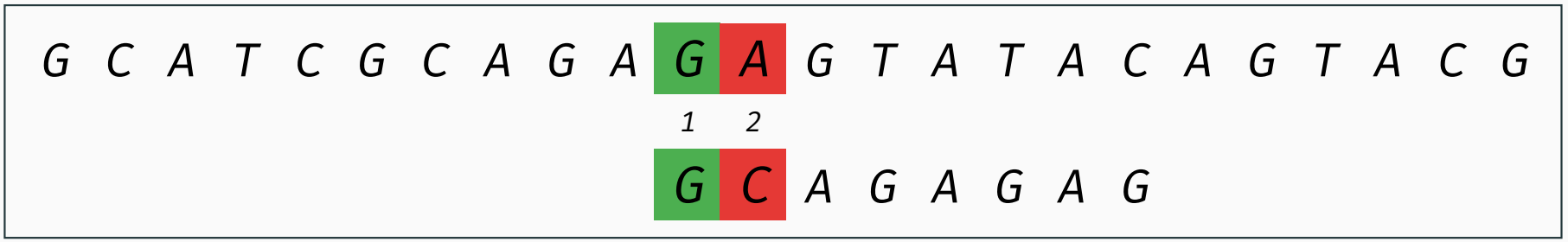
Desátý pokus



Posun o 1 znak

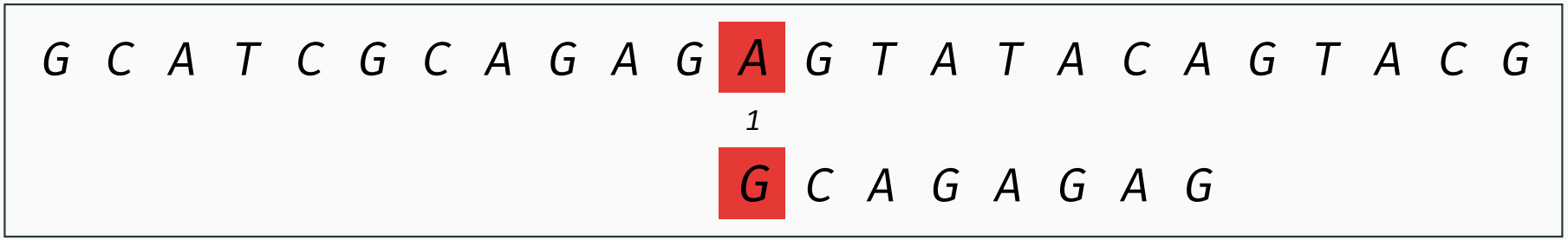
Vyhledávání hrubou silou – příklad (pokrač.)

Jedenáctý pokus



Posun o 1 znak

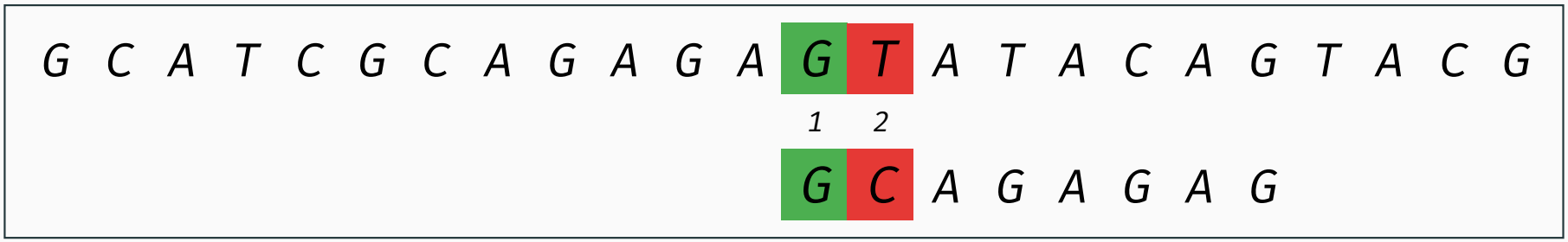
Dvanáctý pokus



Posun o 1 znak

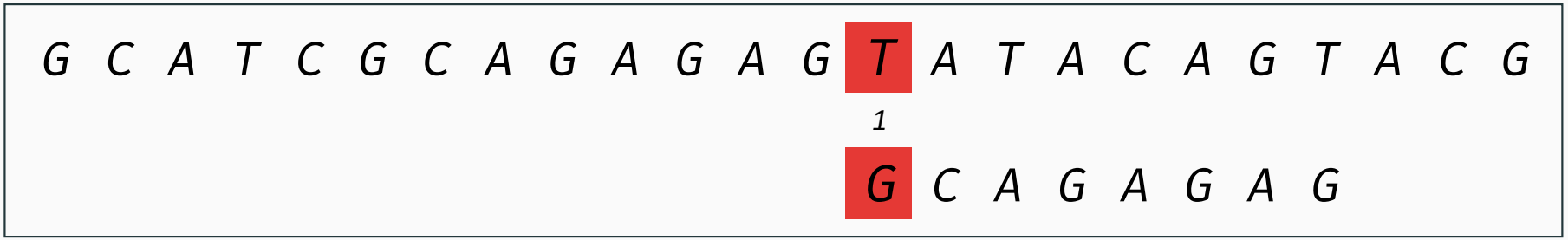
Vyhledávání hrubou silou – příklad (pokrač.)

Třináctý pokus



Posun o 1 znak

Čtrnáctý pokus



Posun o 1 znak

Vyhledávání hrubou silou – příklad (pokrač.)

Patnáctý pokus

G	C	A	T	C	G	C	A	G	A	G	A	G	T	A	T	A	C	A	G	T	A	C	G
														1									
														G	C	A	G	A	G	A	G		

Posun o 1 znak

Šesnáctý pokus

G	C	A	T	C	G	C	A	G	A	G	A	G	T	A	T	A	C	A	G	T	A	C	G
															1								
															G	C	A	G	A	G	A	G	

Posun o 1 znak

Vyhledávání hrubou silou – příklad (pokrač.)

Sedmnáctý pokus

Posun o 1 znak

Algoritmus provedl celkem 30 porovnání znaků.

Vyhledávání podřetězce hrubou silou – složitost algoritmu

- Velikost vstupu – délka textu n a délka vzorku m.
- Základní operace – porovnání znaku vzorku a textu.
- Závislost jen na velikosti vstupu – ne, záleží i na tom, kdy se najde první neshoda.
- Nejhorší případ – text $a^{n-1}b$, vzorek $a^{m-1}b$
  - v každém pokusu provedeme všech m porovnání vzorku s textem
  - současně provedeme všech $n - m + 1$ pokusů.
  - Celkem provedeme $m(n - m + 1)$ porovnání, algoritmus spadá do $O(mn)$.
- Nejlepší případ – vzorek je nalezen na začátku textu, složitost $O(m)$.
- Přirozené jazyky – posun nastane po „několika“ (k_L) porovnáních, nejhorší složitost $O(k_L n) = O(n)$.

Strategie řešení problémů hrubou silou a úplným prohledáváním

Problém nejbližší dvojice bodů

Problém nejbližší dvojice bodů

Zadání problému

Nalezněte dva navzájem nejbližší body z množiny n bodů.

- Jde o jeden z problémů **výpočetní geometrie**.
- Body mohou ležet na rovině nebo obecně v nějakém mnohodimenzionálním prostoru.
- Body mohou reprezentovat objekty reálného světa nebo záznamy v databázi, texty...
- Příklady aplikací:
  - Bezpečnost letového provozu – hledáme dvě nejbližší letadla ve vzdušném prostoru.
  - Shlukování – hierarchické shlukovací algoritmy postupně spojují sobě nejbližší shluky do jednoho, většího shluku.

Problém nejbližší dvojice bodů – předpoklady

Předpokládejme množinu n bodů $\{P_1, \ldots, P_n\}$, každému bodu P_i odpovídá vektor $\vec{p}_i$ se složkami

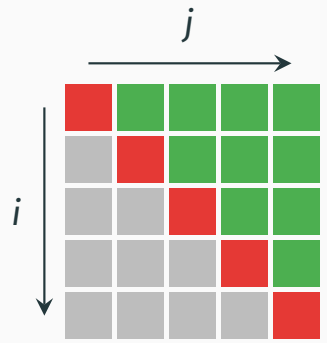
$$\vec{p}_i = (x_i, y_i)$$

v obvyklých kartézských souřadnicích.

Vzdálenost bodů $\vec{p}_i$ a $\vec{p}_j$ budeme počítat pomocí Euklidovské vzdálenosti

$$d(\vec{p}_i, \vec{p}_j) = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$$

Problém nejbližší dvojice bodů – řešení hrubou silou



- Vypočteme vzdálenost všech dvojic bodů $\vec{p}_i$ a $\vec{p}_j$ a nalezneme minimum.
- Stačí počítat jen dvojice bodů pro $j = i + 1, \ldots n$.

Vstup : Množina bodů $\{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n\}$
Výstup: Vzdálenost dvou nejbližších bodů

```
1 MinDist ← ∞;
2 for i ← 1 to n − 1 do
3 |   for j ← i + 1 to n do
4 |   |   MinDist ← min(MinDist, sqrt((x_i − x_j)^2 + (y_i − y_j)^2));
5 |   end
6 end
7 return MinDist;
```

Problém nejbližší dvojice bodů – řešení hrubou silou, složitost

1. Velikost vstupu – počet bodů n
2. Základní operace
   - Výpočet odmocniny – nejde o triviální záležitost[1].
   - Výpočtu odmocniny se lze vyhnout – jde o rostoucí funkci, lze hledat minimum „čtverců“ vzdáleností.
   - Za základní operaci vezmeme umocňování rozdílů souřadnic.
3. Počet základních operací závisí pouze na n – nejhorší, nejlepší a průměrný případ splývají.

Problém nejbližší dvojice bodů – řešení hrubou silou, složitost (pokrač.)

4. Sestavení vztahů

$$\begin{aligned} C(n) &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} 2 = 2 \sum_{i=1}^{n-1} (n - i) \\ &= 2[(n-1) + (n-2) + \cdots + 1] = (n-1)n \in \Theta(n^2) \end{aligned}$$

5. Odstranění odmocniny – snížení složitosti o konstantní faktor, nedošlo k zlepšení asymptotické složitosti, stále je to $\Theta(n^2)$ algoritmus.
6. Později si ukážeme algoritmus s lineárně logaritmickou složitostí.

[1] *https://en.wikipedia.org/wiki/Methods_of_computing_square_roots*

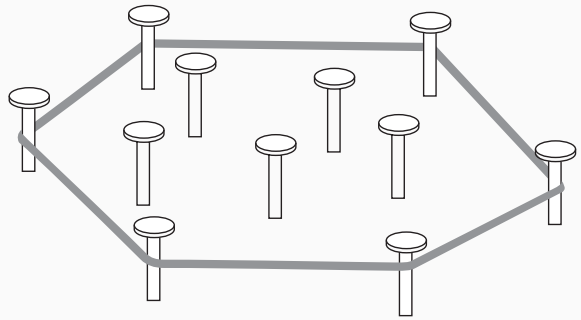
Strategie řešení problémů hrubou silou a úplným prohledáváním

Konvexní obal množiny

Konvexní obal – Convex Hull

Zadání problému

Úkolem je najít konvexní obal (obálku) množiny bodů v prostoru.



- Jde o jeden z problémů **výpočetní geometrie**.
- Body mohou ležet na rovině nebo obecně v nějakém mnohodimenzionálním prostoru.
- Příklady aplikací:
  - Detekce kolizí – počítačová grafika, autonomní vozidla,
  - GIS – bodové senzory, vytvoření oblasti z těchto dat,
  - Optimalizační úlohy – vrcholy konvexního obalu jsou jistým způsobem extrémní; konvexní mnohoúhelník vzniká jako průnik konečného množství polorovin; polorovina je definována nerovnicí...

Konvexní množina bodů

Definice

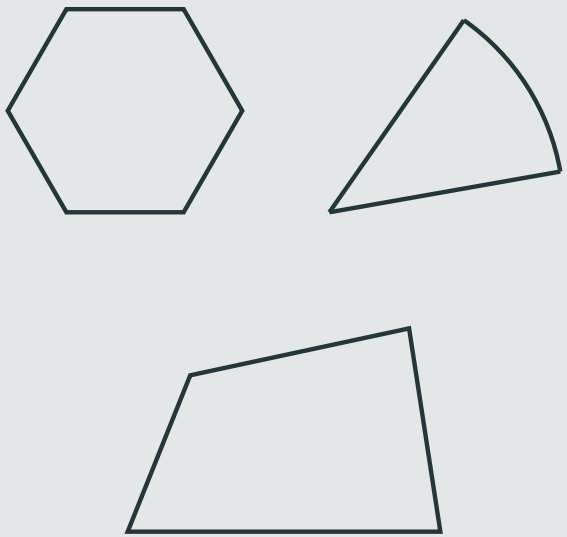
Množina bodů M v rovině se nazývá **konvexní**, jestliže pro libovolnou dvojici bodů $p, q \in M$ úsečka spojující body p a q náleží do množiny M.

Množina, které není konvexní se nazývá **nekonvexní**.

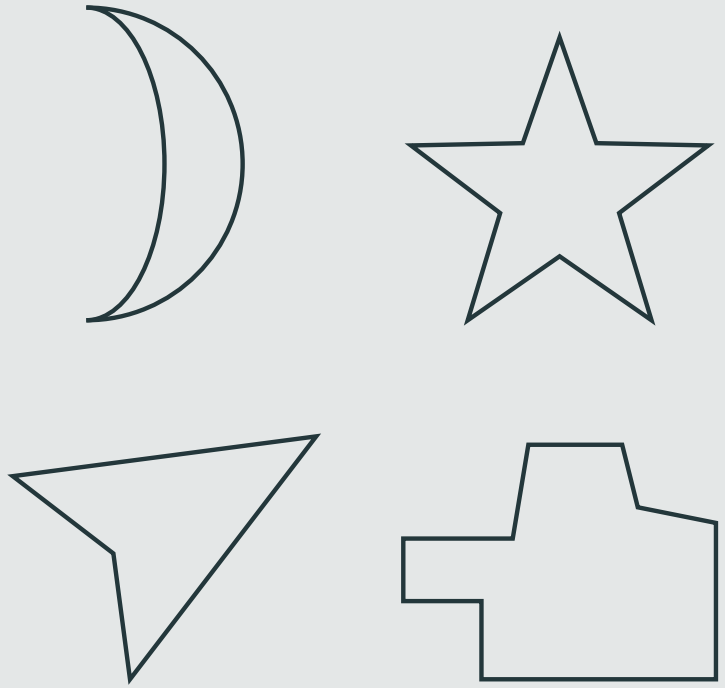
Představíme-li si hranici množiny jako neprůhlednou, znamená konvexita množiny názorně to, že z každého jejího bodu je vidět každý její bod.

Konvexní množina bodů – příklady

Konvexní útvary



Nekonvexní útvary



Konvexní obal

Definice

Konvexním obalem množiny bodů M nazýváme nejmenší konvexní množinu, která obsahuje M.

Výraz „nejmenší“ znamená, že konvexní obal množiny M musí být podmnožinou jakékoliv jiné konvexní podmnožiny obsahující množinu M.

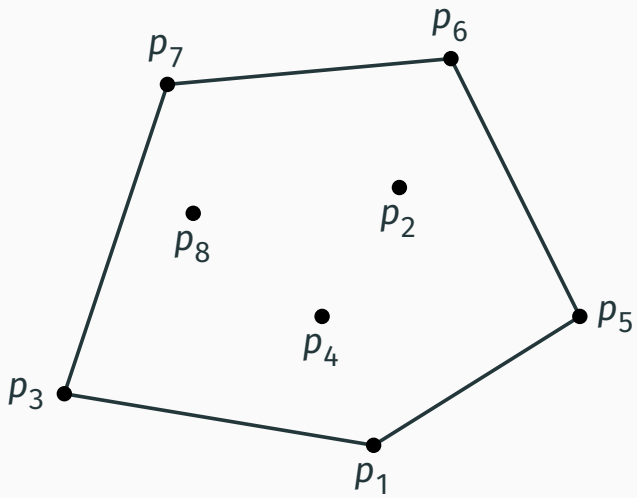
Konvexní obal

- dvouprvkové množiny – úsečka spojující oba body.
- tříprvkové množiny – trojúhelník, pokud body neleží na přímce, jinak je to úsečka spojující nejvzdálenější body.

Konvexní obal (pokrač.)

Věta

Konvexní obal množiny bodů M s více než dvěma body, které neleží na jedné přímce, je konvexní mnohoúhelník, jehož vrcholy náleží do M.

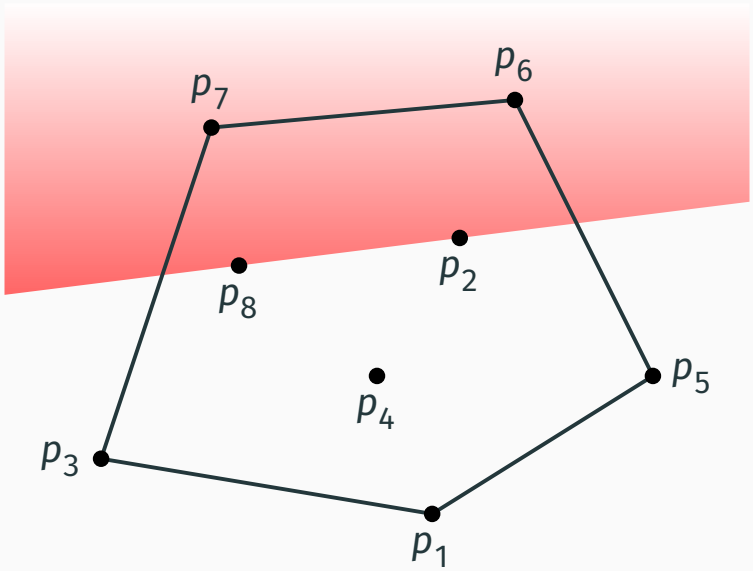


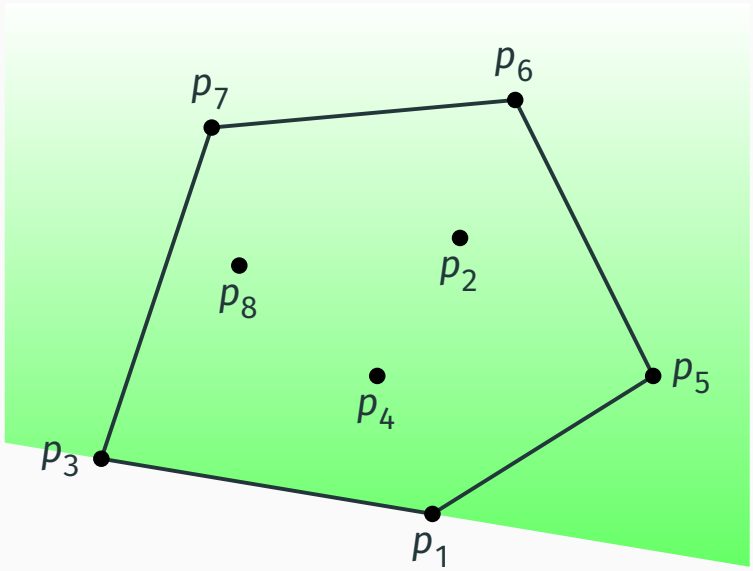
Body množiny M, které specifikují konvexní obal M se nazývají **extrémní body**.

Problém nalezení konvexního obalu množiny M redukujeme na nalezení extrémních bodů.

Konvexní obal – řešení hrubou silou

Úsečka $\vec{p}_i\vec{p}_j$ náleží do konvexního obalu množiny M, právě když všechny ostatní body z M leží v jedné z polorovin definovaných přímkou $\vec{p}_i\vec{p}_j$.





Konvexní obal – řešení hrubou silou (pokrač.)

Obecnou rovnici přímky procházející body $\vec{p}_i$ a $\vec{p}_j$ lze psát jako

$$ax + by + c = 0,$$

kde

$$\begin{aligned} a &= y_j - y_i \\ b &= x_i - x_j \\ c &= y_i x_j - x_i y_j \end{aligned}$$

Konvexní obal – řešení hrubou silou (pokrač.)

Přímka definuje dvě poloroviny:

$$ax + by + c < 0 \tag{14}$$

$$ax + by + c > 0 \tag{15}$$

Stačí tedy ověřit, zda pro zbývajících $n - 2$ bodů platí buď nerovnice (14) nebo (15).

Konvexní obal – analýza složitosti

- Musíme prověřit všech $\frac{1}{2}n(n-1)$ dvojic bodů a současně
- pro každou přímku definovanou jednou dvojicí bodů musíme ověřit platnost nerovnic (14) a (15) pro zbývajících $n-2$ bodů.
- Celkově tedy $\left[\frac{1}{2}n(n-1)\right](n-2) \in O(n^3)$.

Strategie řešení problémů hrubou silou a úplným prohledáváním

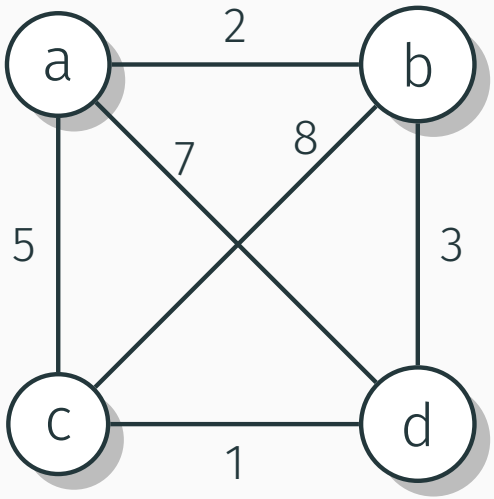
Úplné prohledávání

Úplné prohledávání (Exhaustive search)

- Součást řešení mnoha problémů – nalezení **jednoho prvku**, s nějakou **specifickou vlastností**, z množiny prvků, tzv. domény, která **exponenciálně** nebo rychleji roste s velikostí problému.
- Hledaný element je typicky **kombinatorické povahy** – permutace, kombinace, podmnožina.
- Typicky jde o **optimalizační úlohy** – typicky hledáme maximum, minimum. Například minimalizujeme délku cesty, maximalizujeme zisk.

Úplné prohledávání je strategie řešení problému hrubou silou spočívající v otestování všech prvků uvažované domény.

Problém obchodního cestujícího – příklad



Trasa	Délka trasy l
$a \to b \to c \to d \to a$	$2 + 8 + 1 + 7 = 18$
$a \to b \to d \to c \to a$	$2 + 3 + 1 + 5 = 11$
$a \to c \to b \to d \to a$	$5 + 8 + 3 + 7 = 23$
$a \to c \to d \to b \to a$	$5 + 1 + 3 + 2 = 11$
$a \to d \to b \to c \to a$	$7 + 3 + 8 + 5 = 23$
$a \to d \to c \to b \to a$	$7 + 1 + 8 + 2 = 18$

Úplné prohledávání

Problém obchodního cestujícího (Traveling Salesman Problem)

Problém batohu

Strategie řešení problémů hrubou silou a úplným prohledáváním

Průchody grafem

Průchod grafem do hloubky a do šířky

Algoritmus průchodu grafem do hloubky

```
   Input  : Graf G(V, E), počáteční vrchol s ∈ V
   Output: DF-strom
 1 Init(V, s);
 2 while stack ≠ ∅ do
 3 |   u ← Top(stack);
 4 |   switch state [u] do
 5 |   |   case discovered do
 6 |   |   |   ProcessDiscoveredVertex(u);
 7 |   |   end
 8 |   |   case current do
 9 |   |   |   ProcessCurrentVertex(u);
10 |   |   end
11 |   end
12 end
```

Algoritmus průchodu grafem do hloubky (pokrač.)

```
1  Procedure Init(V, s)
       Input  : Množina vrcholů V, počáteční vrchol s ∈ V
2      foreach u ∈ V do
3          state [u] ← unknown;
4          d [u] ← f [u] ← ∞;
5          π [u] ← nothing;
6      end
7      state [s] ← discovered;
8      stack ← ∅;
9      Push(stack, s);
10     time ← 0;
11 end
```

Algoritmus průchodu grafem do hloubky (pokrač.)

```
1  Procedure ProcessDiscoveredVertex(u)
   |  Input  : Vrchol u ∈ V
2  |  state [u] ← current;
3  |  d [u] ← time ← time + 1;
4  |  foreach v ∈ Adj(G, u) do
5  |  |  if state [v] = unknown then
6  |  |  |  state [v] ← = discovered;
7  |  |  |  π [v] ← u;
8  |  |  |  Push(stack, v);
9  |  |  end
10 |  end
11 end
```

Algoritmus průchodu grafem do hloubky (pokrač.)

```
1 Procedure ProcessCurrentVertex(u)
  |   Input  : Vrchol u ∈ V
2 |   state[u] ← finished;
3 |   f[u] ← time ← time + 1;
4 |   Pop(stack);
5 end
```

Animace průchodu grafem do hloubky – legenda

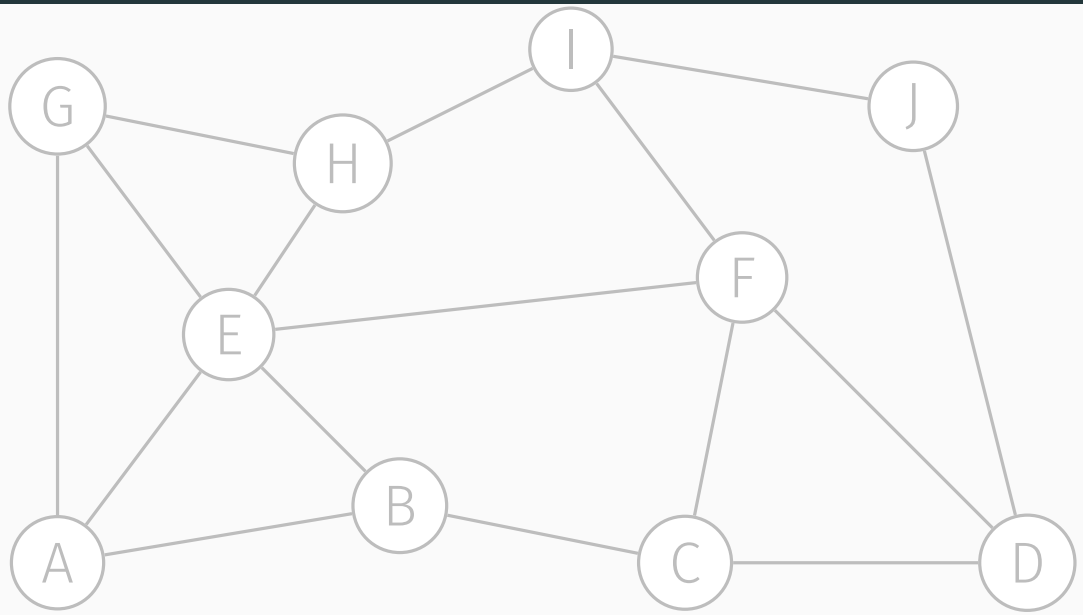
Vrcholy grafu

šedá	vrchol ve stavu unknown
žlutá	vrchol ve stavu discovered
červená	vrchol ve stavu current
modrá	vrchol ve stavu finished

Hrany grafu

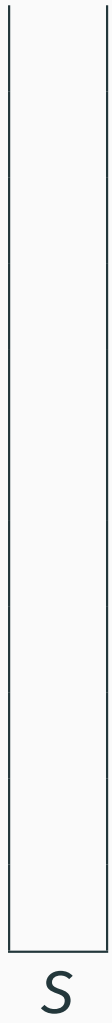
šedá	hrana mezi vrcholy ve stavu unknown nebo hrana nepatřící do DF-stromu
žlutá	hrana incidentní s vrcholy ve stavu discovered
červená	hrana incidentní s vrcholem ve stavu current
modrá	hrana mezi vrcholy ve stavu finished

Průchod grafem do hloubky, krok 1

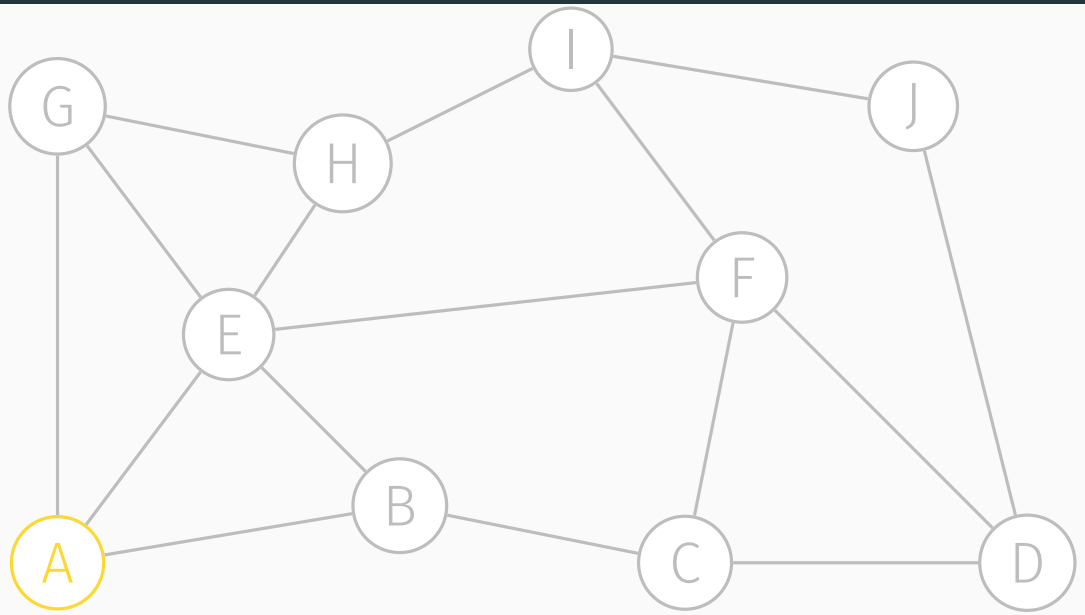


v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
A	∞	∞	/
B	∞	∞	/
C	∞	∞	/
D	∞	∞	/
E	∞	∞	/

v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
F	∞	∞	/
G	∞	∞	/
H	∞	∞	/
I	∞	∞	/
J	∞	∞	/



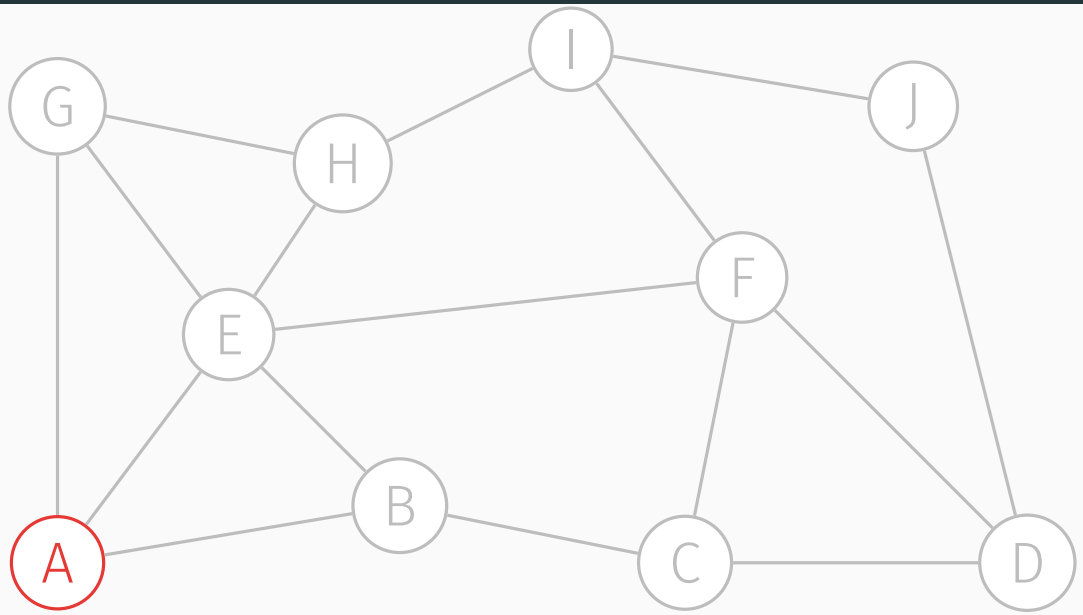
Průchod grafem do hloubky, krok 2



v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
A	∞	∞	/
B	∞	∞	/
C	∞	∞	/
D	∞	∞	/
E	∞	∞	/

v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
F	∞	∞	/
G	∞	∞	/
H	∞	∞	/
I	∞	∞	/
J	∞	∞	/

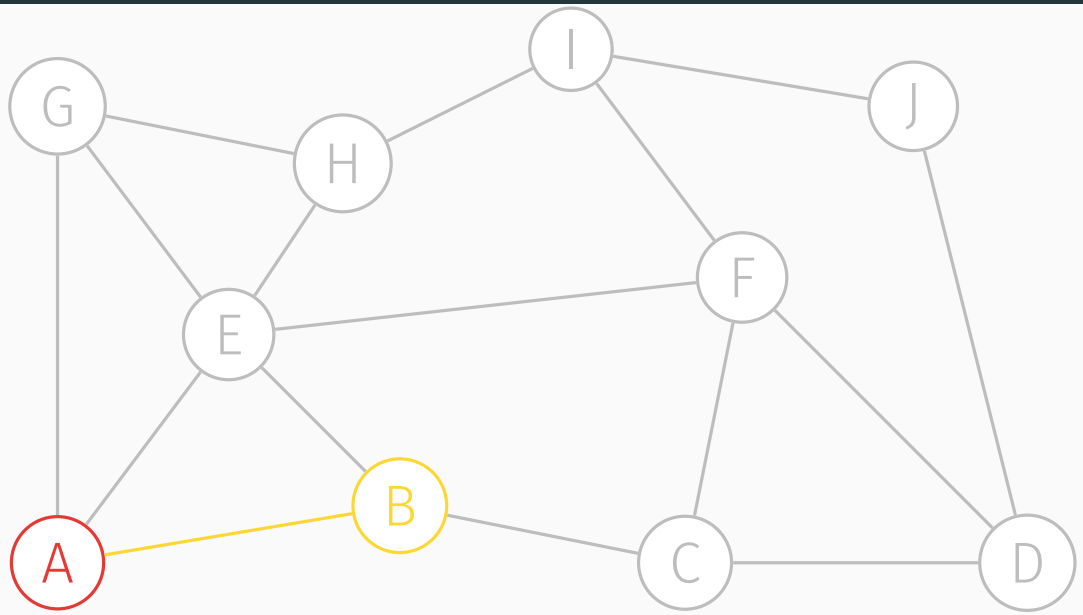
Průchod grafem do hloubky, krok 3



v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
A	1	∞	/
B	∞	∞	/
C	∞	∞	/
D	∞	∞	/
E	∞	∞	/

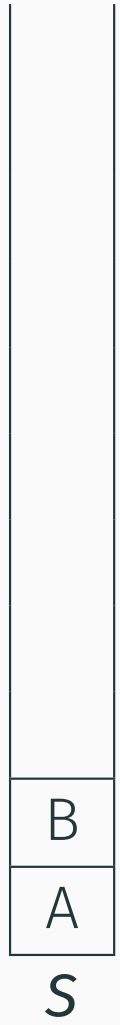
v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
F	∞	∞	/
G	∞	∞	/
H	∞	∞	/
I	∞	∞	/
J	∞	∞	/

Průchod grafem do hloubky, krok 4

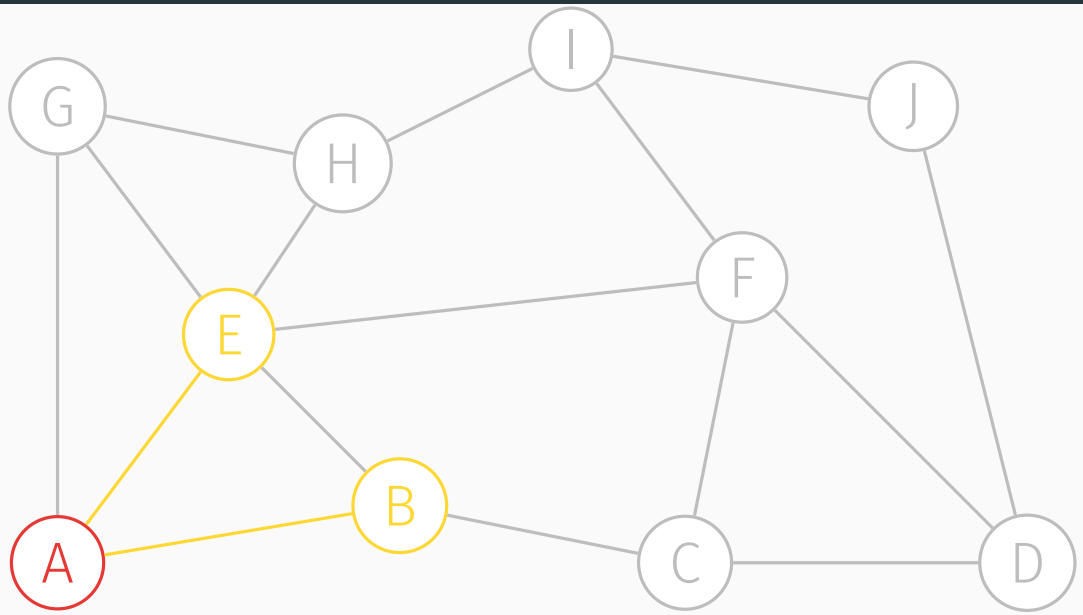


v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
A	1	∞	/
B	∞	∞	A
C	∞	∞	/
D	∞	∞	/
E	∞	∞	/

v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
F	∞	∞	/
G	∞	∞	/
H	∞	∞	/
I	∞	∞	/
J	∞	∞	/

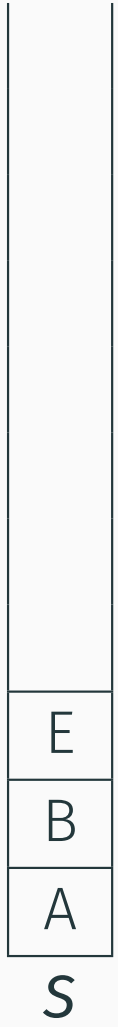


Průchod grafem do hloubky, krok 5

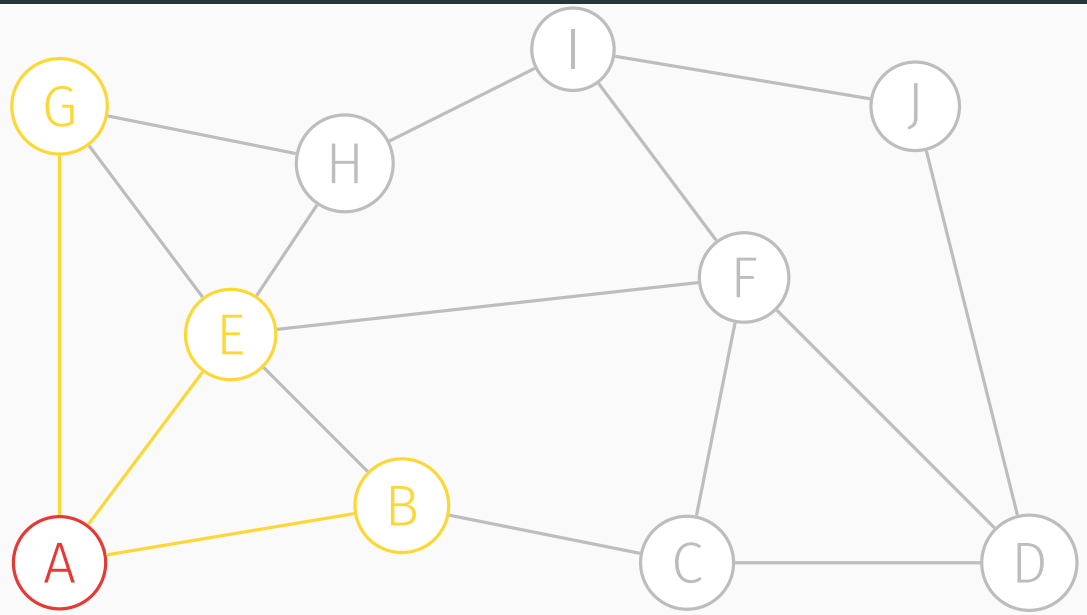


v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
A	1	∞	/
B	∞	∞	A
C	∞	∞	/
D	∞	∞	/
E	∞	∞	A

v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
F	∞	∞	/
G	∞	∞	/
H	∞	∞	/
I	∞	∞	/
J	∞	∞	/



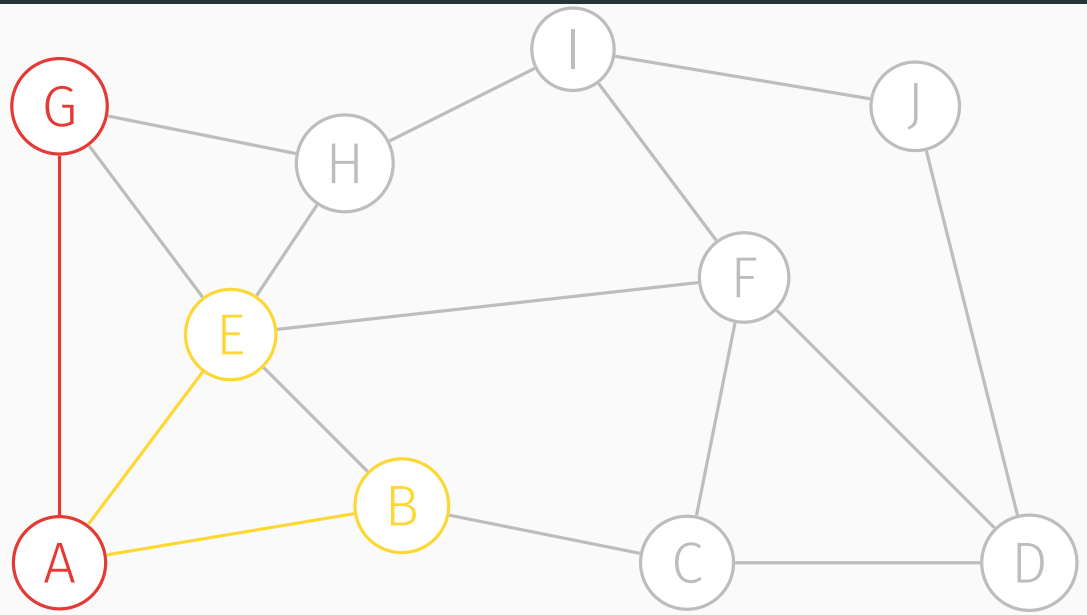
Průchod grafem do hloubky, krok 6



v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
A	1	∞	/
B	∞	∞	A
C	∞	∞	/
D	∞	∞	/
E	∞	∞	A

v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
F	∞	∞	/
G	∞	∞	A
H	∞	∞	/
I	∞	∞	/
J	∞	∞	/

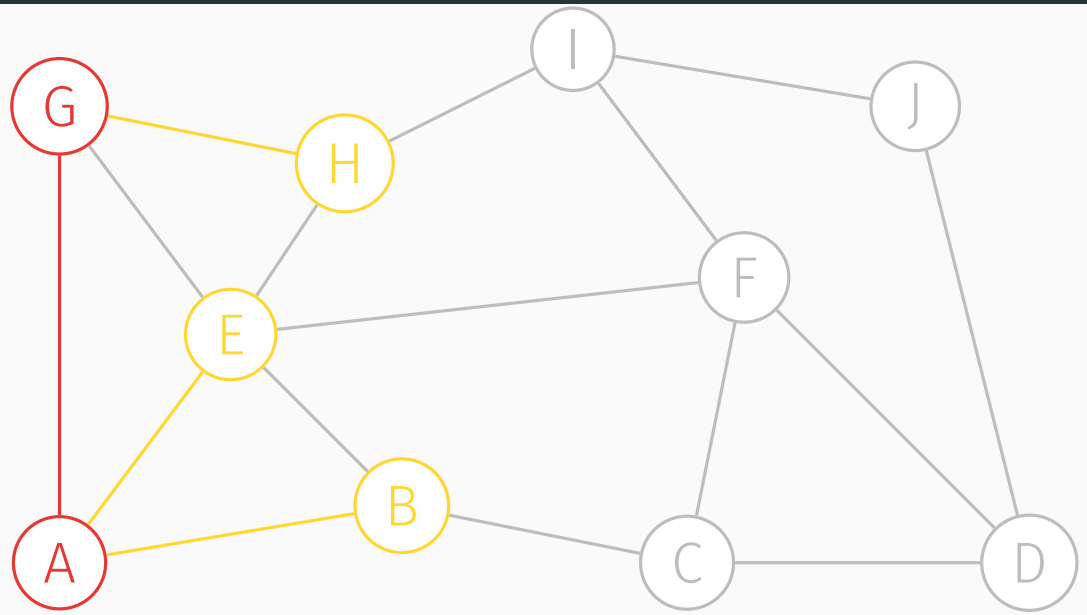
Průchod grafem do hloubky, krok 7



v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
A	1	∞	/
B	∞	∞	A
C	∞	∞	/
D	∞	∞	/
E	∞	∞	A

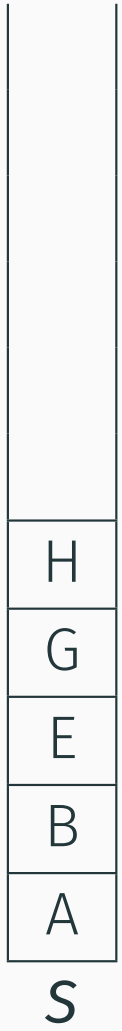
v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
F	∞	∞	/
G	2	∞	A
H	∞	∞	/
I	∞	∞	/
J	∞	∞	/

Průchod grafem do hloubky, krok 8

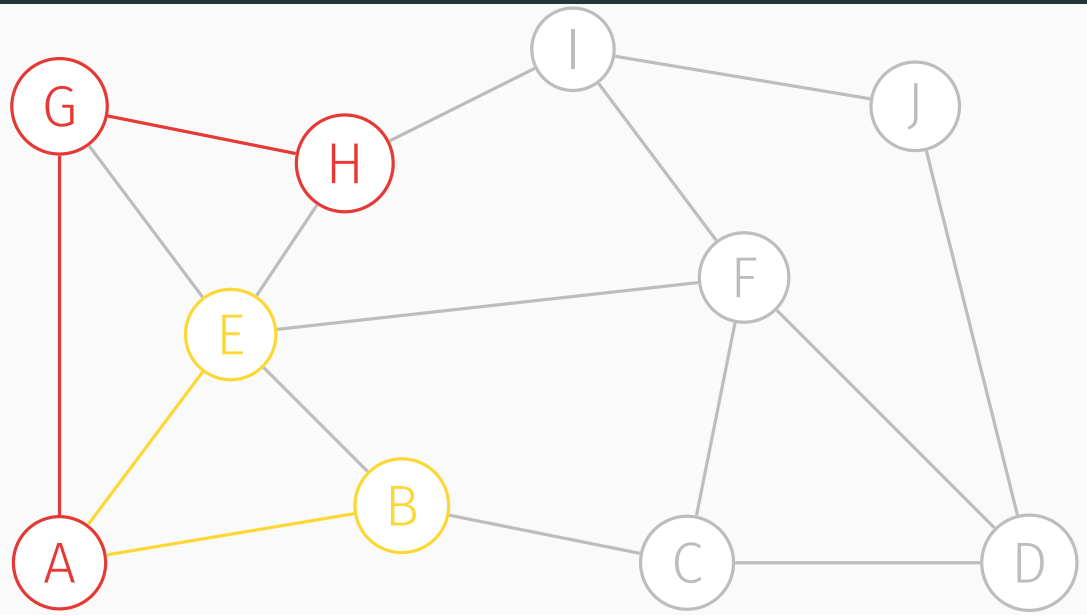


v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
A	1	∞	/
B	∞	∞	A
C	∞	∞	/
D	∞	∞	/
E	∞	∞	A

v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
F	∞	∞	/
G	2	∞	A
H	∞	∞	G
I	∞	∞	/
J	∞	∞	/

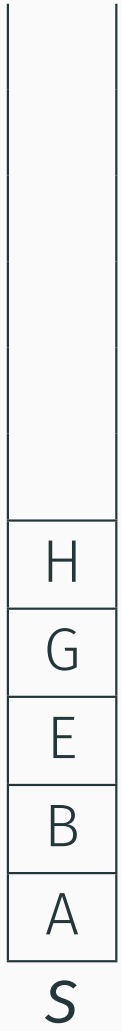


Průchod grafem do hloubky, krok 9

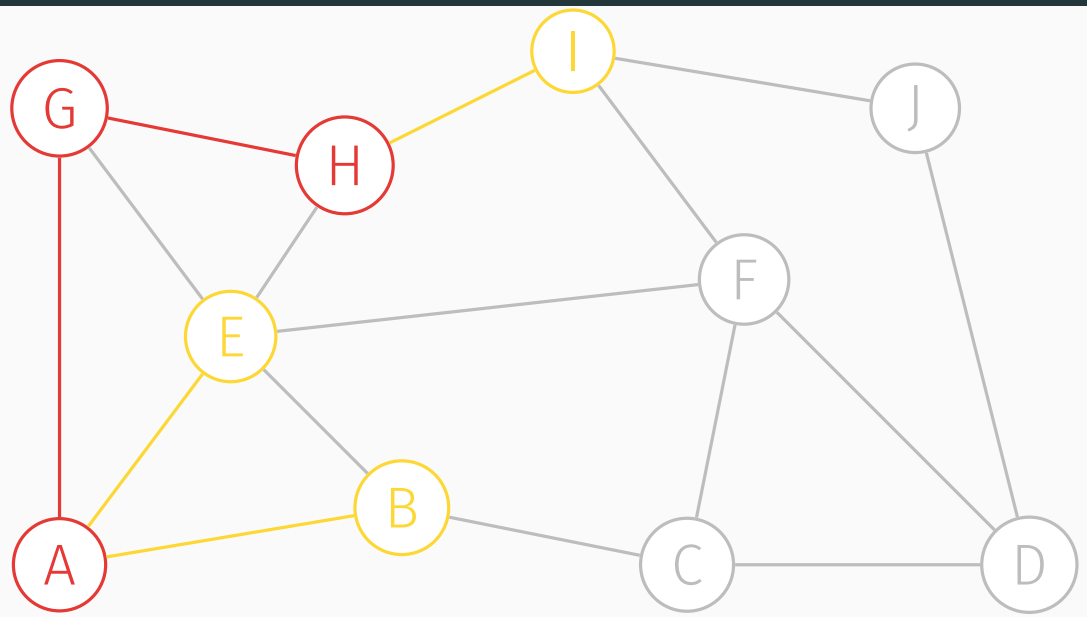


v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
A	1	∞	/
B	∞	∞	A
C	∞	∞	/
D	∞	∞	/
E	∞	∞	A

v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
F	∞	∞	/
G	2	∞	A
H	3	∞	G
I	∞	∞	/
J	∞	∞	/

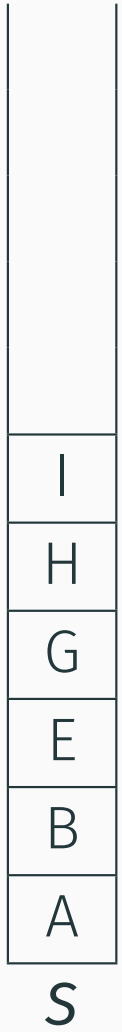


Průchod grafem do hloubky, krok 10

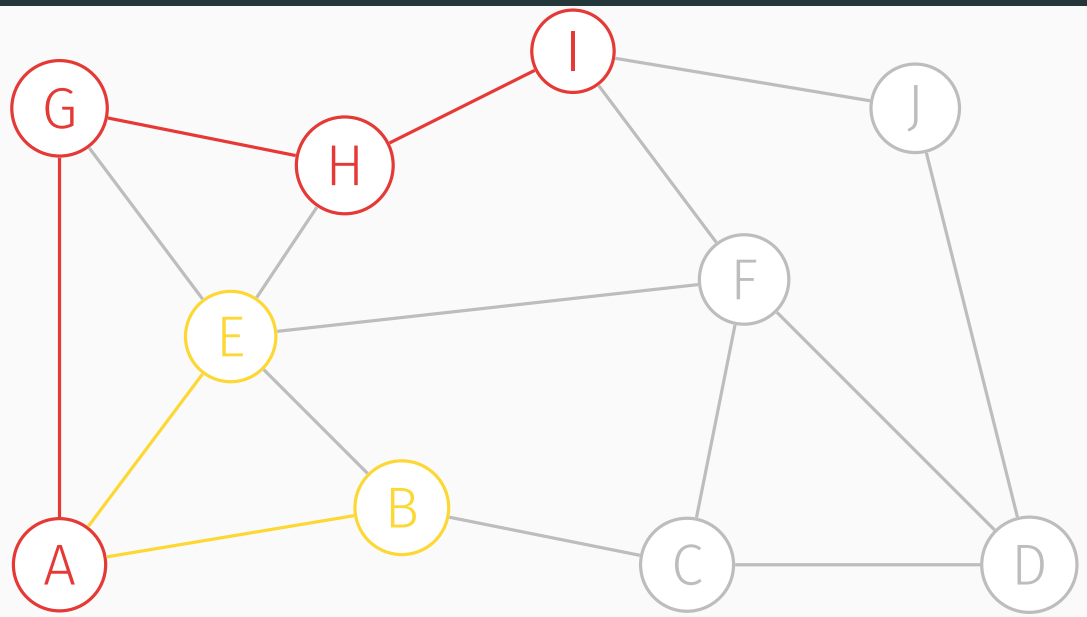


v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
A	1	∞	/
B	∞	∞	A
C	∞	∞	/
D	∞	∞	/
E	∞	∞	A

v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
F	∞	∞	/
G	2	∞	A
H	3	∞	G
I	∞	∞	H
J	∞	∞	/

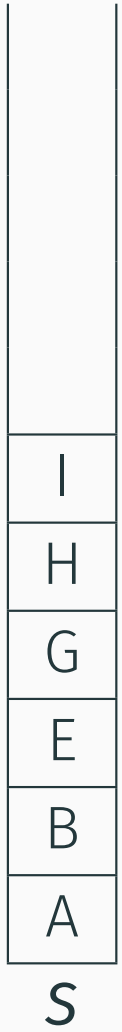


Průchod grafem do hloubky, krok 11

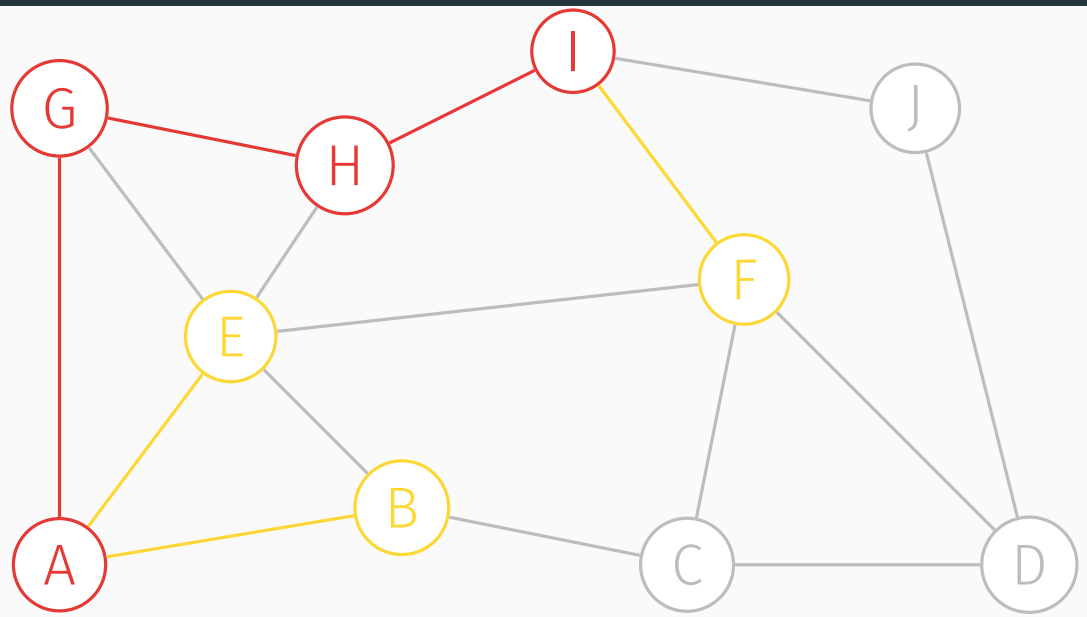


v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
A	1	∞	/
B	∞	∞	A
C	∞	∞	/
D	∞	∞	/
E	∞	∞	A

v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
F	∞	∞	/
G	2	∞	A
H	3	∞	G
I	4	∞	H
J	∞	∞	/

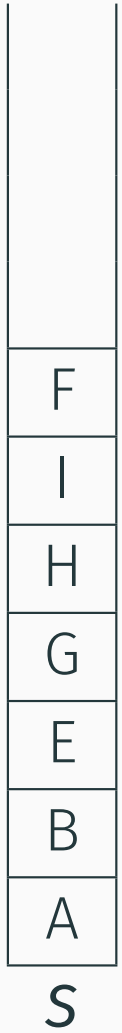


Průchod grafem do hloubky, krok 12

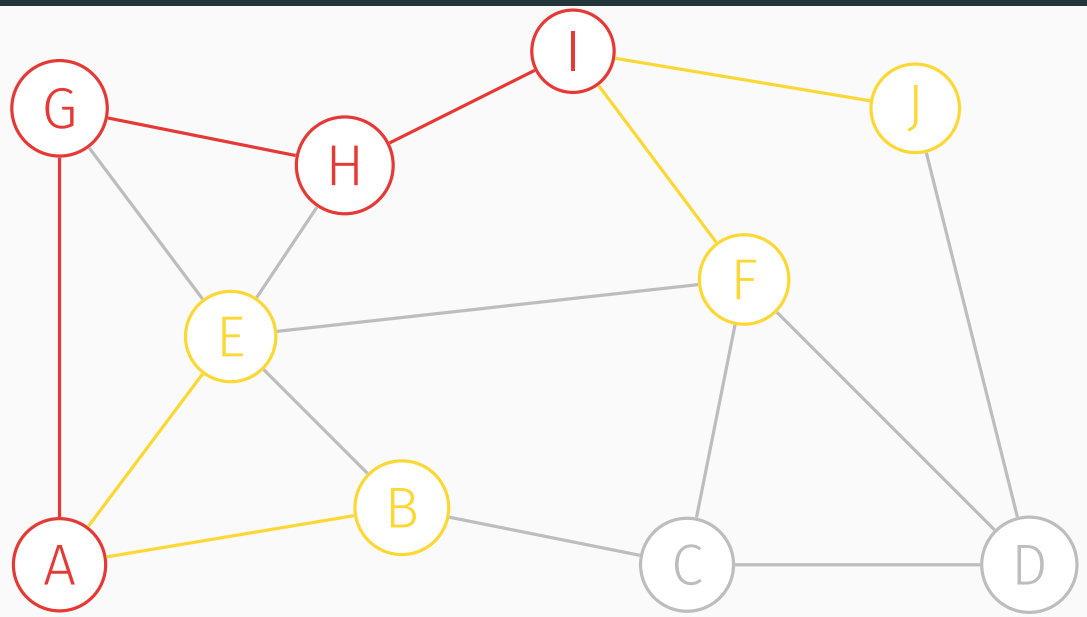


v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
A	1	∞	/
B	∞	∞	A
C	∞	∞	/
D	∞	∞	/
E	∞	∞	A

v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
F	∞	∞	I
G	2	∞	A
H	3	∞	G
I	4	∞	H
J	∞	∞	/

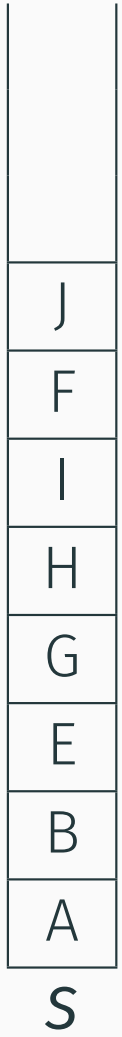


Průchod grafem do hloubky, krok 13

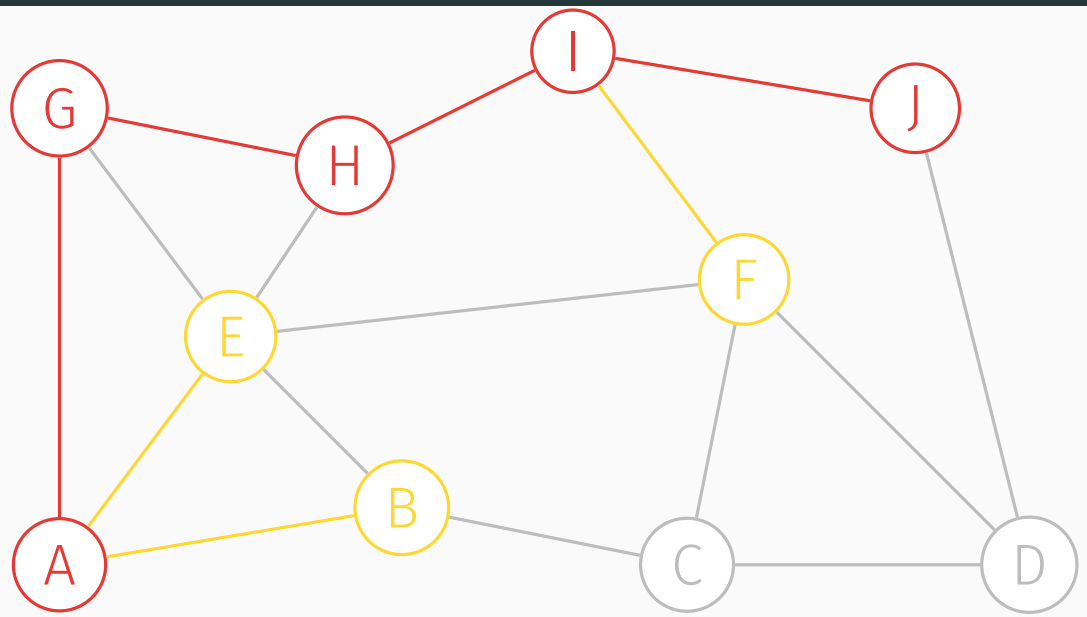


v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
A	1	∞	/
B	∞	∞	A
C	∞	∞	/
D	∞	∞	/
E	∞	∞	A

v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
F	∞	∞	I
G	2	∞	A
H	3	∞	G
I	4	∞	H
J	∞	∞	I

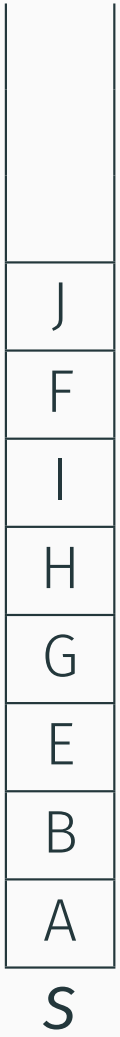


Průchod grafem do hloubky, krok 14

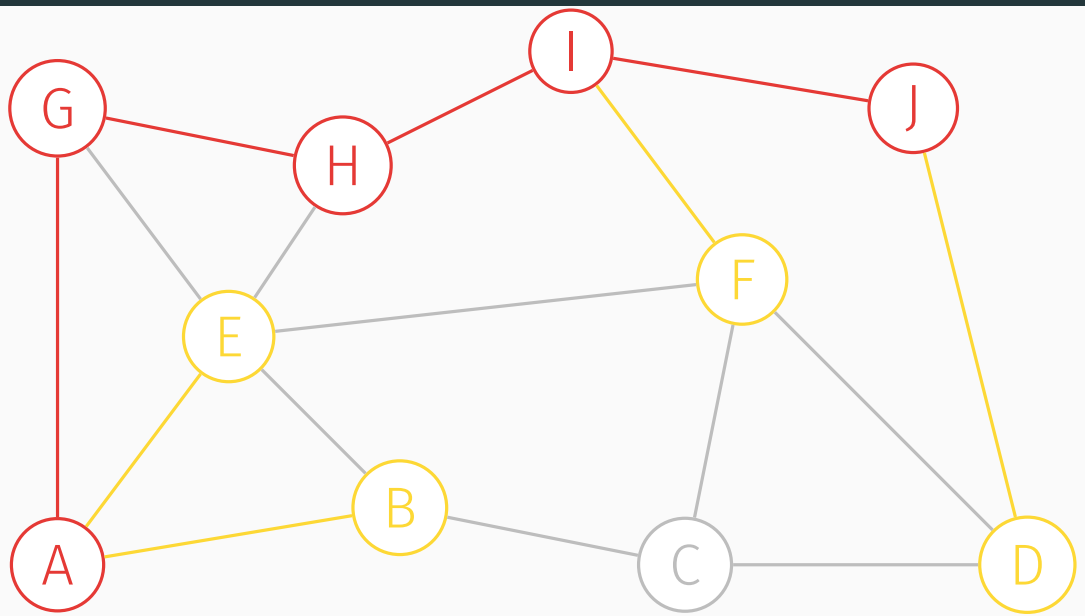


v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
A	1	∞	/
B	∞	∞	A
C	∞	∞	/
D	∞	∞	/
E	∞	∞	A

v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
F	∞	∞	I
G	2	∞	A
H	3	∞	G
I	4	∞	H
J	5	∞	I

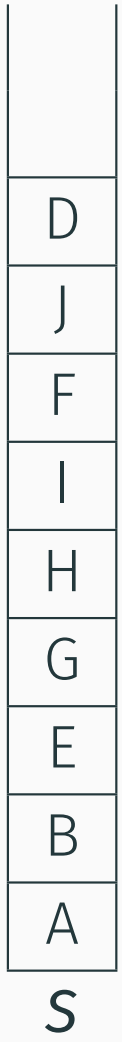


Průchod grafem do hloubky, krok 15

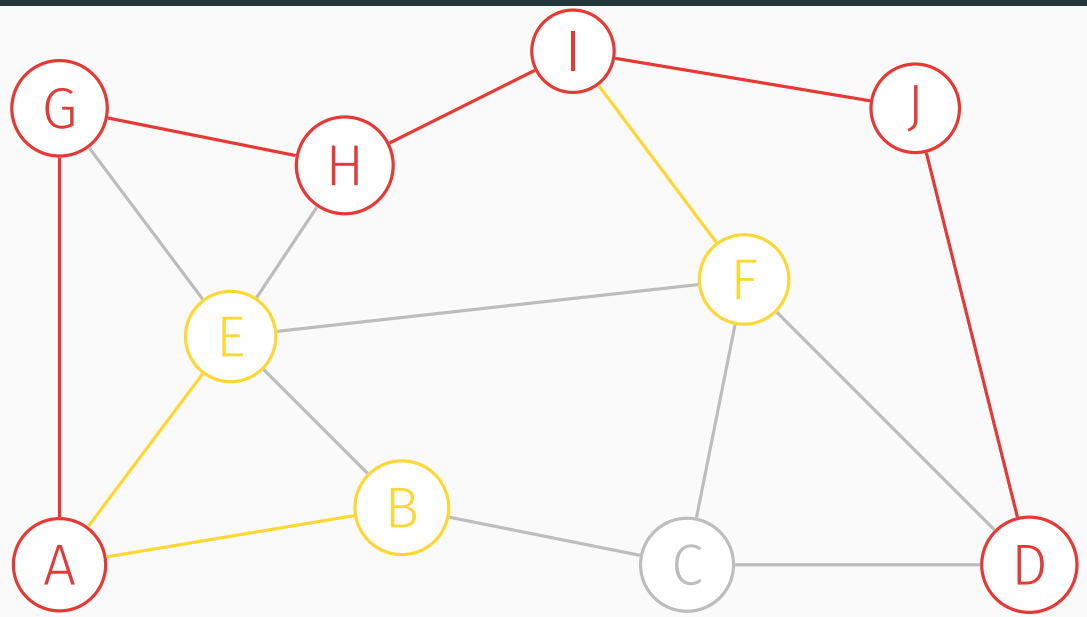


v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
A	1	∞	/
B	∞	∞	A
C	∞	∞	/
D	∞	∞	J
E	∞	∞	A

v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
F	∞	∞	I
G	2	∞	A
H	3	∞	G
I	4	∞	H
J	5	∞	I

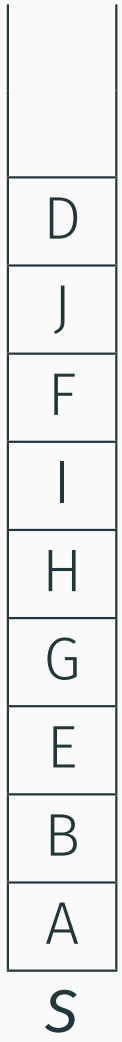


Průchod grafem do hloubky, krok 16

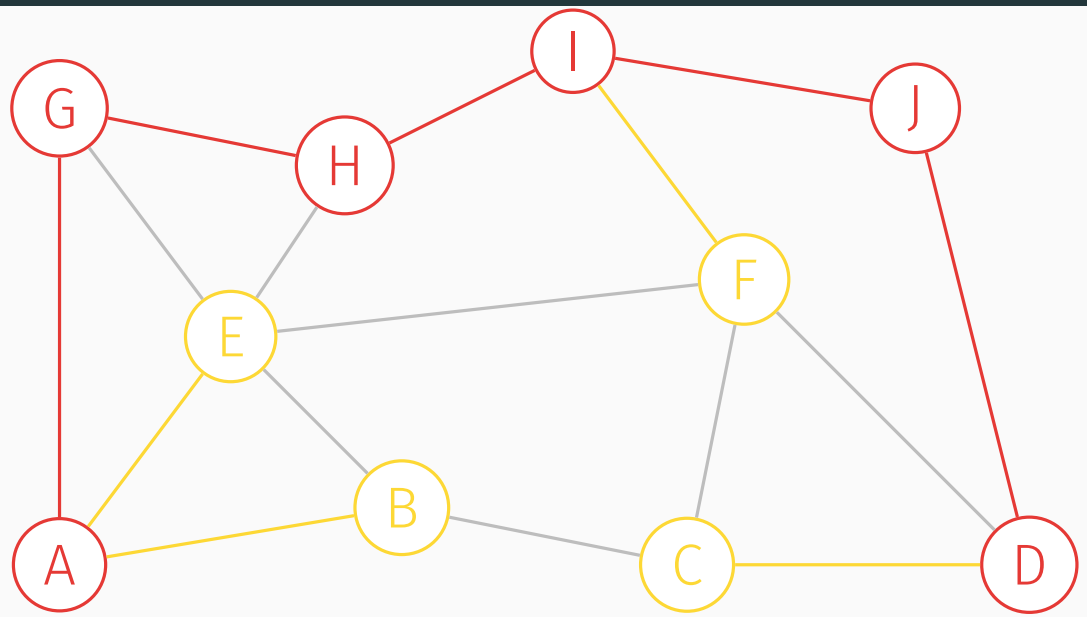


v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
A	1	∞	/
B	∞	∞	A
C	∞	∞	/
D	6	∞	J
E	∞	∞	A

v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
F	∞	∞	I
G	2	∞	A
H	3	∞	G
I	4	∞	H
J	5	∞	I

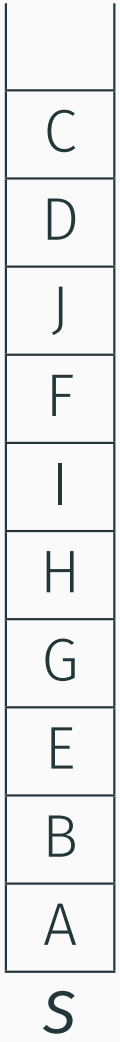


Průchod grafem do hloubky, krok 17

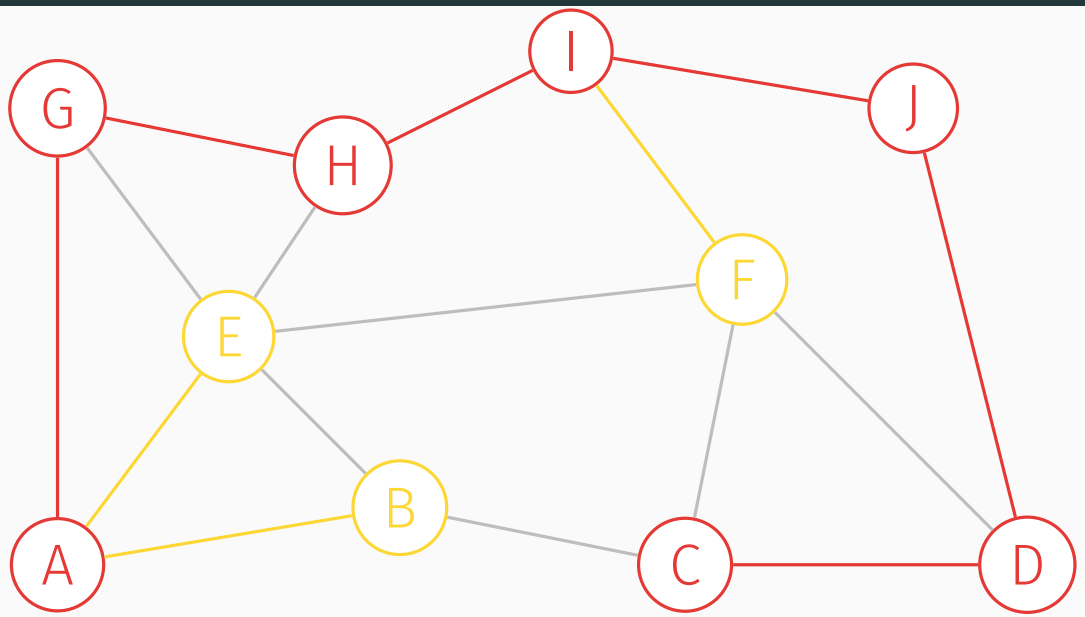


v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
A	1	∞	/
B	∞	∞	A
C	∞	∞	D
D	6	∞	J
E	∞	∞	A

v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
F	∞	∞	I
G	2	∞	A
H	3	∞	G
I	4	∞	H
J	5	∞	I

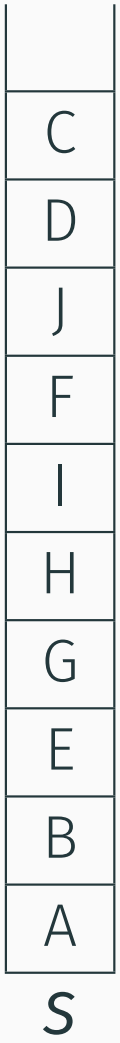


Průchod grafem do hloubky, krok 18

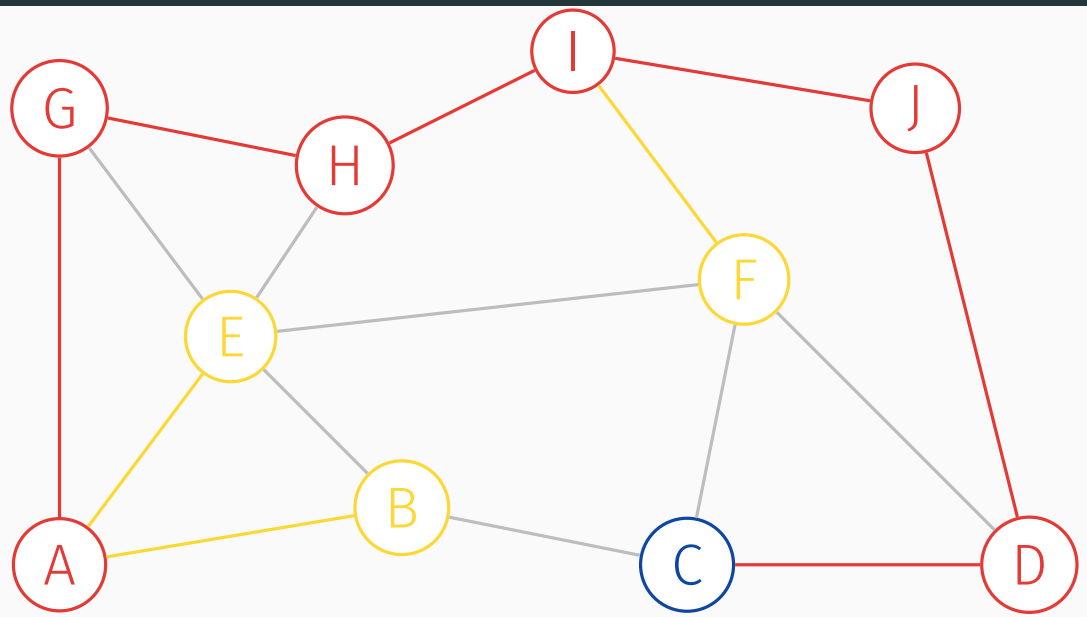


v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
A	1	∞	/
B	∞	∞	A
C	7	∞	D
D	6	∞	J
E	∞	∞	A

v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
F	∞	∞	I
G	2	∞	A
H	3	∞	G
I	4	∞	H
J	5	∞	I

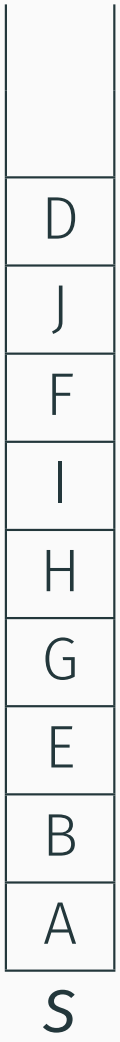


Průchod grafem do hloubky, krok 19

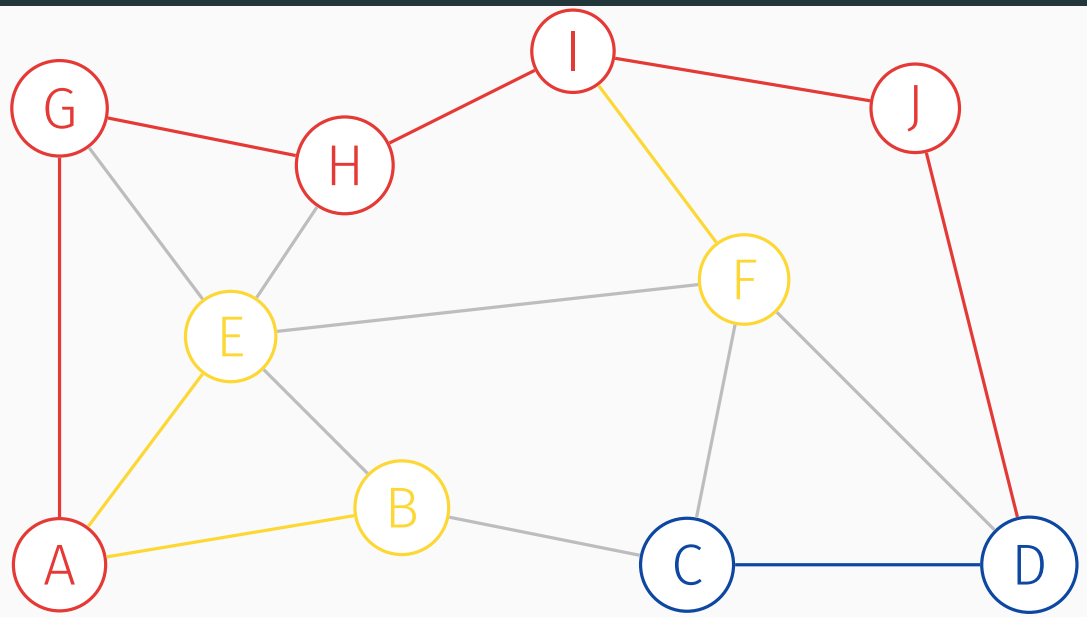


v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
A	1	∞	/
B	∞	∞	A
C	7	8	D
D	6	∞	J
E	∞	∞	A

v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
F	∞	∞	I
G	2	∞	A
H	3	∞	G
I	4	∞	H
J	5	∞	I

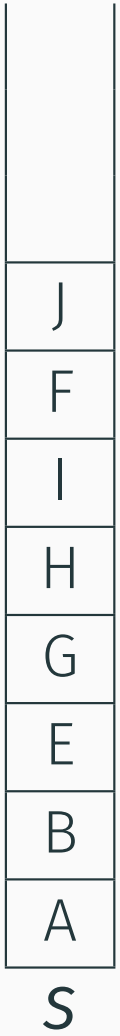


Průchod grafem do hloubky, krok 20

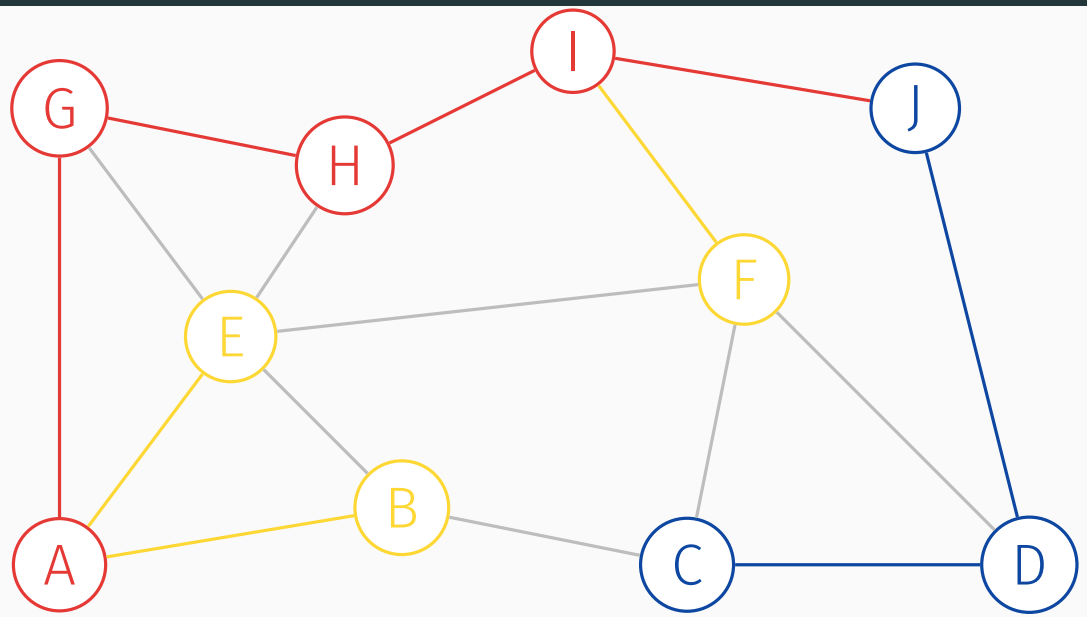


v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
A	1	∞	/
B	∞	∞	A
C	7	8	D
D	6	9	J
E	∞	∞	A

v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
F	∞	∞	I
G	2	∞	A
H	3	∞	G
I	4	∞	H
J	5	∞	I

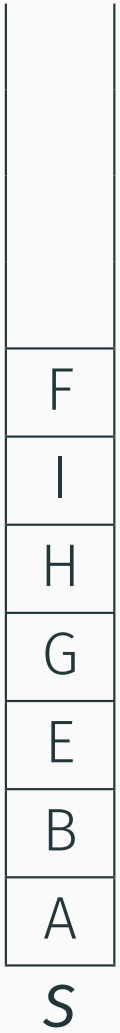


Průchod grafem do hloubky, krok 21

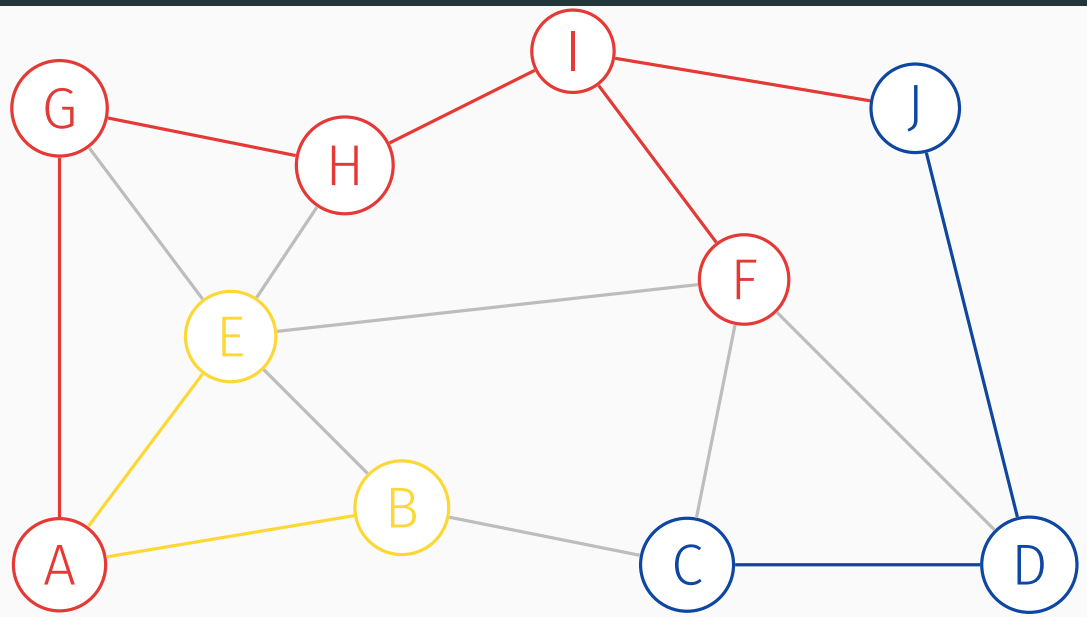


v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
A	1	∞	/
B	∞	∞	A
C	7	8	D
D	6	9	J
E	∞	∞	A

v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
F	∞	∞	I
G	2	∞	A
H	3	∞	G
I	4	∞	H
J	5	10	I

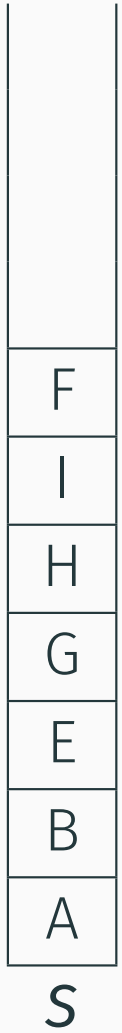


Průchod grafem do hloubky, krok 22

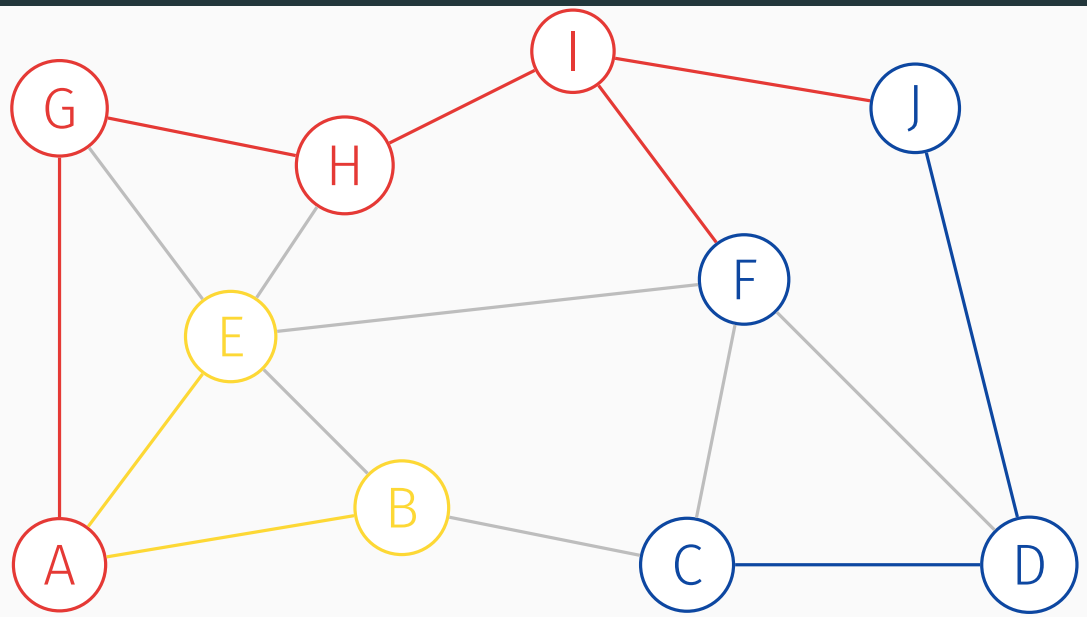


v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
A	1	∞	/
B	∞	∞	A
C	7	8	D
D	6	9	J
E	∞	∞	A

v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
F	11	∞	I
G	2	∞	A
H	3	∞	G
I	4	∞	H
J	5	10	I

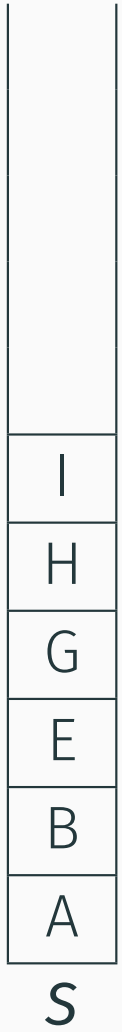


Průchod grafem do hloubky, krok 23

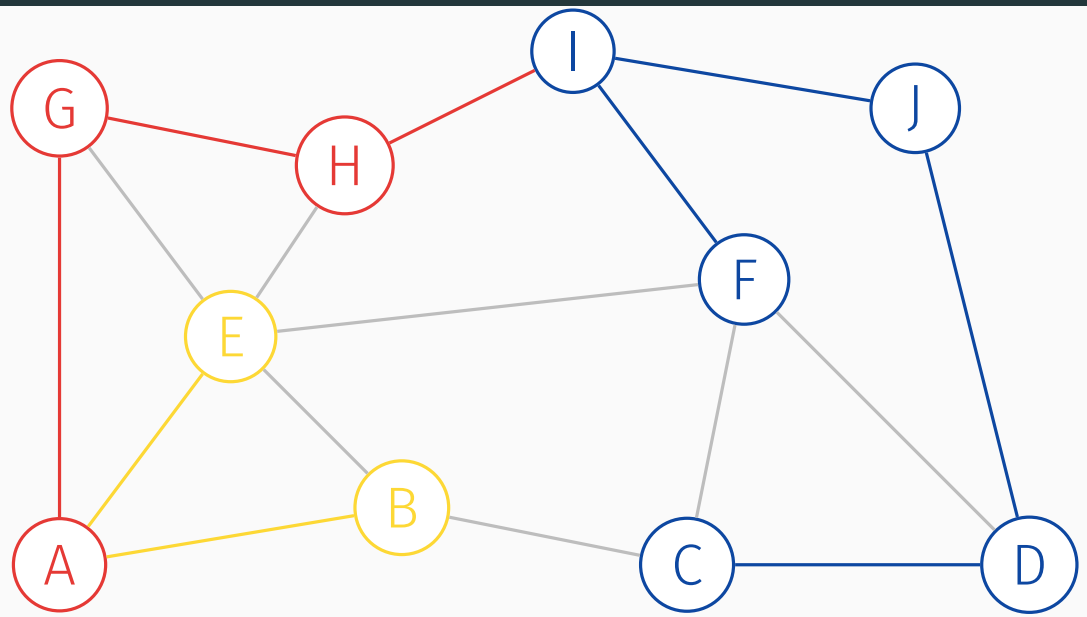


v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
A	1	∞	/
B	∞	∞	A
C	7	8	D
D	6	9	J
E	∞	∞	A

v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
F	11	12	I
G	2	∞	A
H	3	∞	G
I	4	∞	H
J	5	10	I

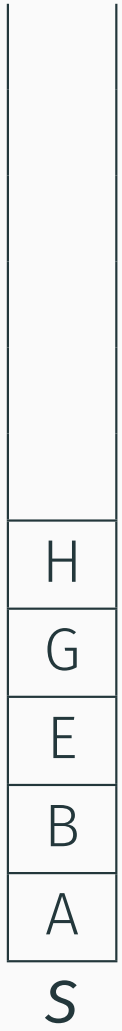


Průchod grafem do hloubky, krok 24

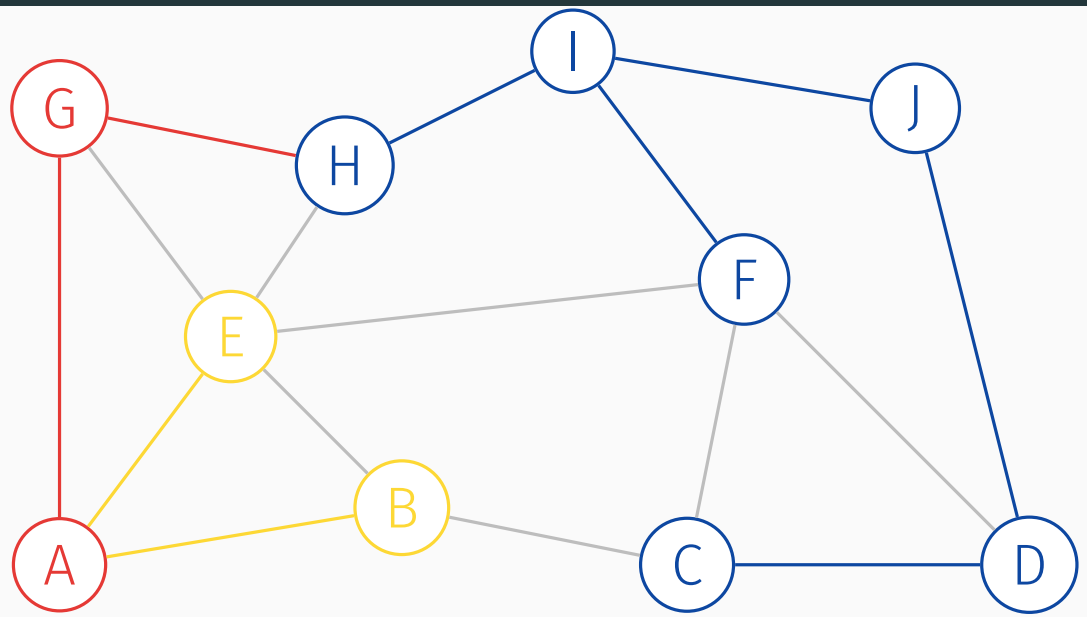


v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
A	1	∞	/
B	∞	∞	A
C	7	8	D
D	6	9	J
E	∞	∞	A

v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
F	11	12	I
G	2	∞	A
H	3	∞	G
I	4	13	H
J	5	10	I



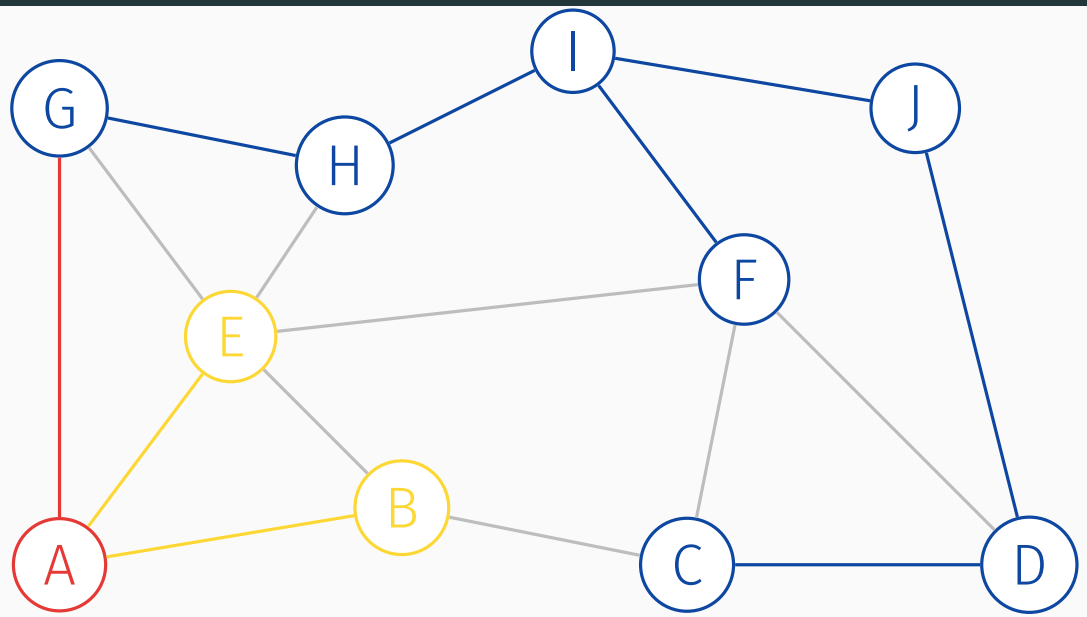
Průchod grafem do hloubky, krok 25



v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
A	1	∞	/
B	∞	∞	A
C	7	8	D
D	6	9	J
E	∞	∞	A

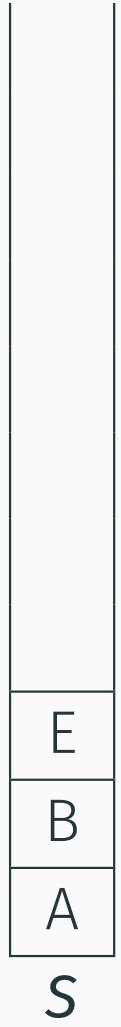
v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
F	11	12	I
G	2	∞	A
H	3	14	G
I	4	13	H
J	5	10	I

Průchod grafem do hloubky, krok 26

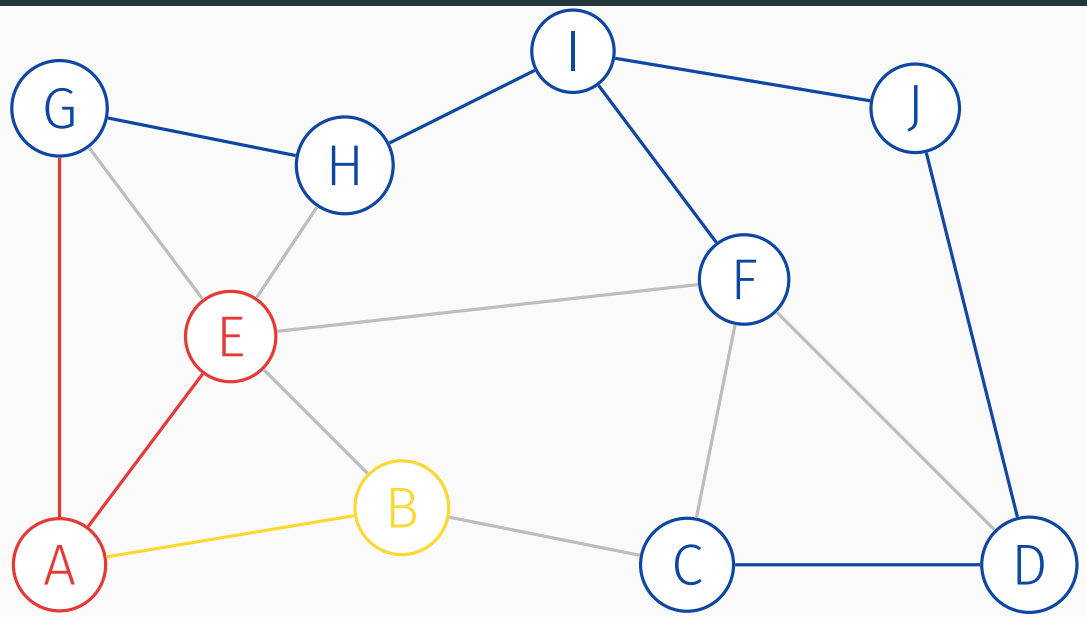


v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
A	1	∞	/
B	∞	∞	A
C	7	8	D
D	6	9	J
E	∞	∞	A

v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
F	11	12	I
G	2	15	A
H	3	14	G
I	4	13	H
J	5	10	I

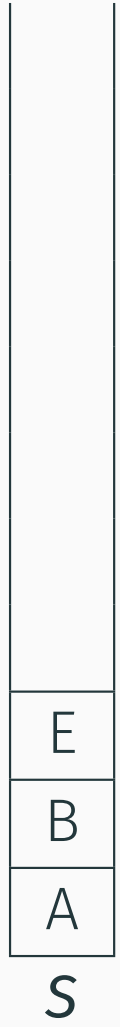


Průchod grafem do hloubky, krok 27

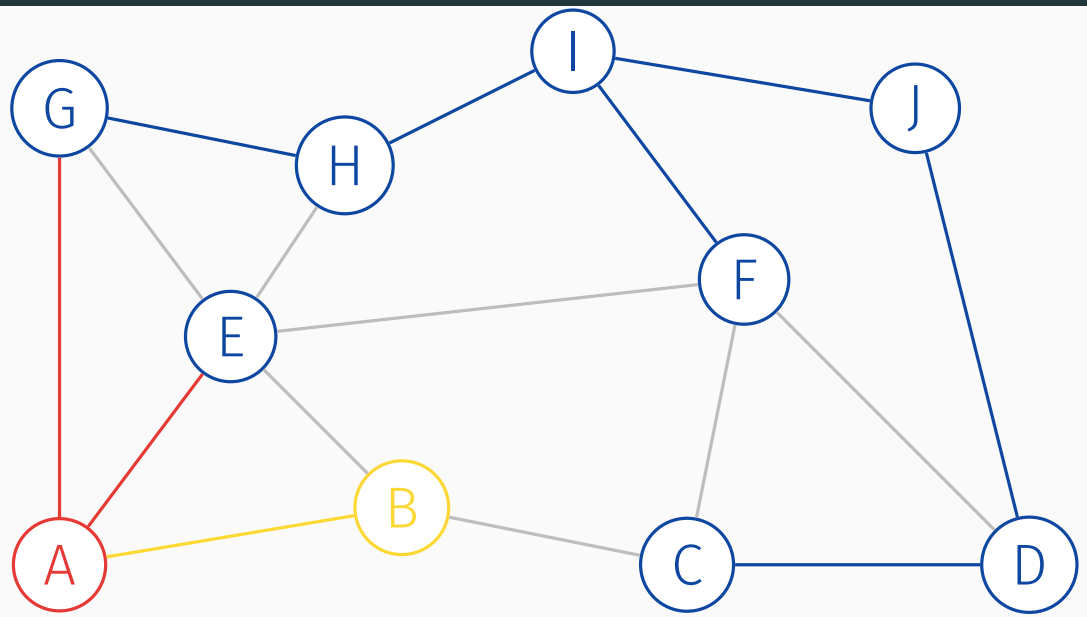


v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
A	1	∞	/
B	∞	∞	A
C	7	8	D
D	6	9	J
E	16	∞	A

v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
F	11	12	I
G	2	15	A
H	3	14	G
I	4	13	H
J	5	10	I

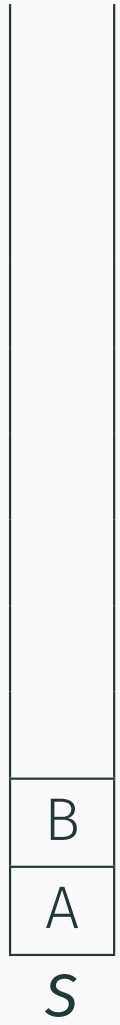


Průchod grafem do hloubky, krok 28

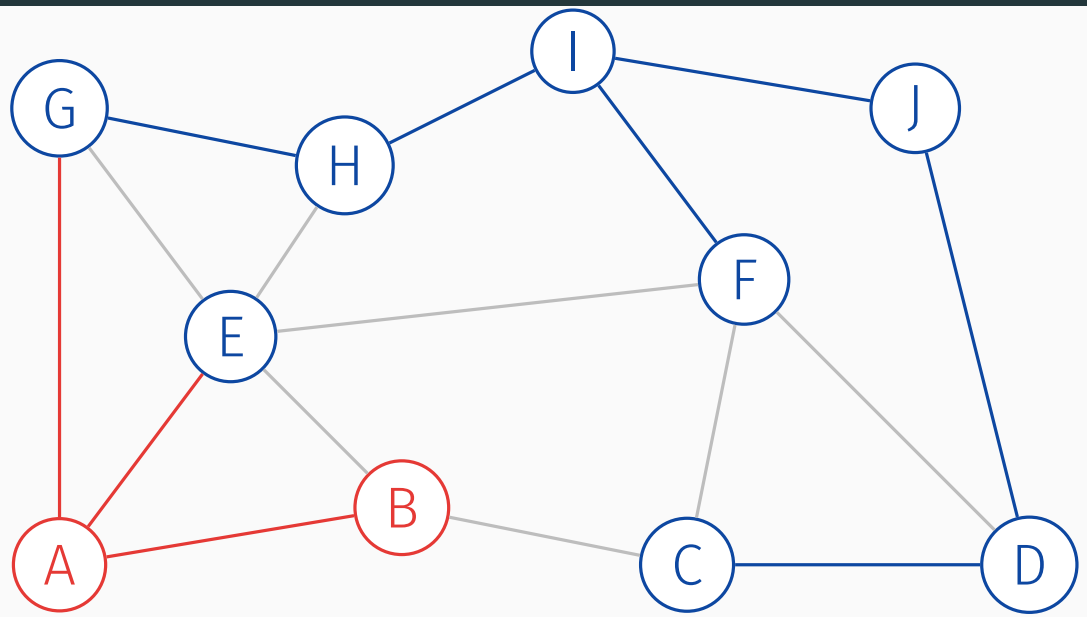


v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
A	1	∞	/
B	∞	∞	A
C	7	8	D
D	6	9	J
E	16	17	A

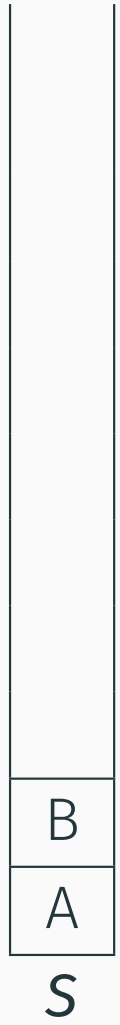
v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
F	11	12	I
G	2	15	A
H	3	14	G
I	4	13	H
J	5	10	I



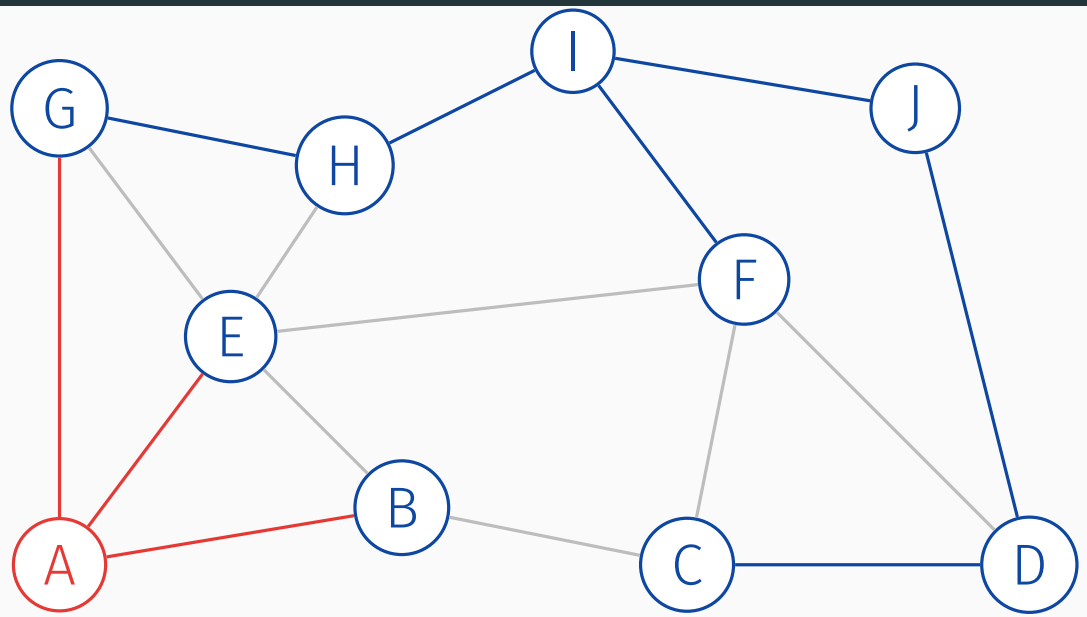
Průchod grafem do hloubky, krok 29



v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
A	1	∞	/
B	18	∞	A
C	7	8	D
D	6	9	J
E	16	17	A
F	11	12	I
G	2	15	A
H	3	14	G
I	4	13	H
J	5	10	I



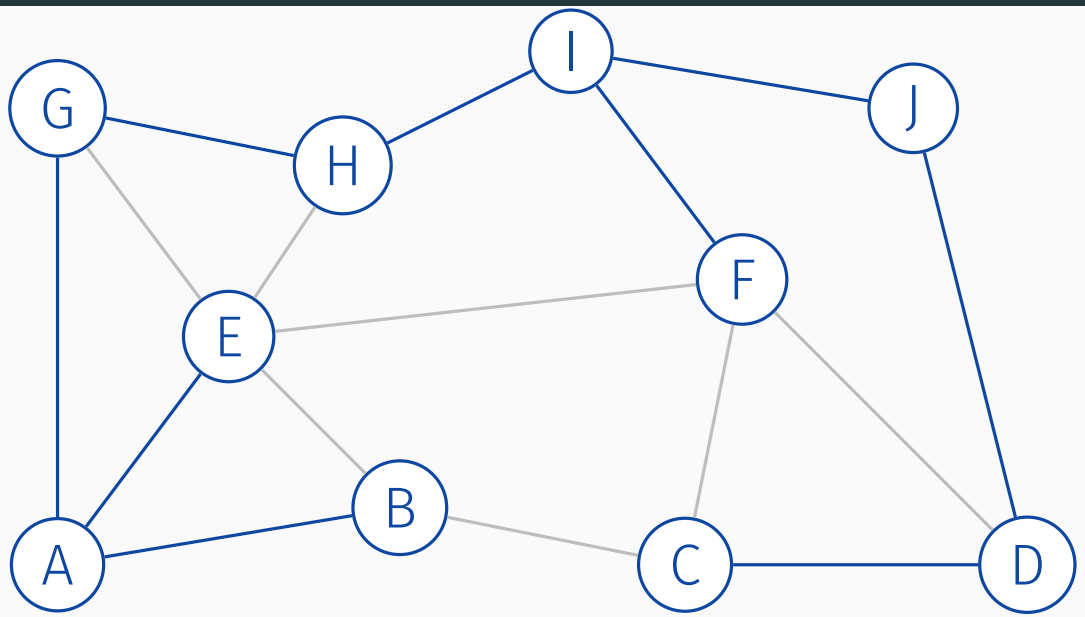
Průchod grafem do hloubky, krok 30



v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
A	1	∞	/
B	18	19	A
C	7	8	D
D	6	9	J
E	16	17	A

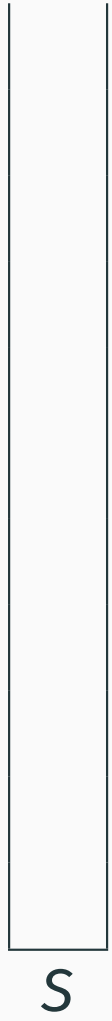
v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
F	11	12	I
G	2	15	A
H	3	14	G
I	4	13	H
J	5	10	I

Průchod grafem do hloubky, krok 31



v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
A	1	20	/
B	18	19	A
C	7	8	D
D	6	9	J
E	16	17	A

v	$d[v]$	$f[v]$	$\pi[v]$
F	11	12	I
G	2	15	A
H	3	14	G
I	4	13	H
J	5	10	I



Algoritmus průchodu grafem do šířky

Input : Graf $G(V, E)$, počáteční vrchol $s \in V$
Output: BF-strom

```
1  foreach u ∈ V/{s} do
2  |   state [u] ← unknown;
3  |   d [u] ← ∞;
4  |   π [u] ← nothing;
5  end
6  Q ← ∅;
7  state [s] ← discovered;
8  d [s] ← 0;
9  π [s] ← nothing;
10 Enqueue(Q, s);
```

Algoritmus průchodu grafem do šířky (pokrač.)

```
11 while Q ≠ ∅ do
12 |   u ← Dequeue(Q);
13 |   foreach v ∈ Adj(G, u) do
14 |   |   if state [v] = unknown then
15 |   |   |   state [v] ← discovered;
16 |   |   |   d [v] ← d [u] + 1;
17 |   |   |   π [v] ← u;
18 |   |   |   Enqueue (Q,v);
19 |   |   end
20 |   end
21 |   state [u] ← finished;
22 end
```

Animace průchodu grafem do šířky – legenda

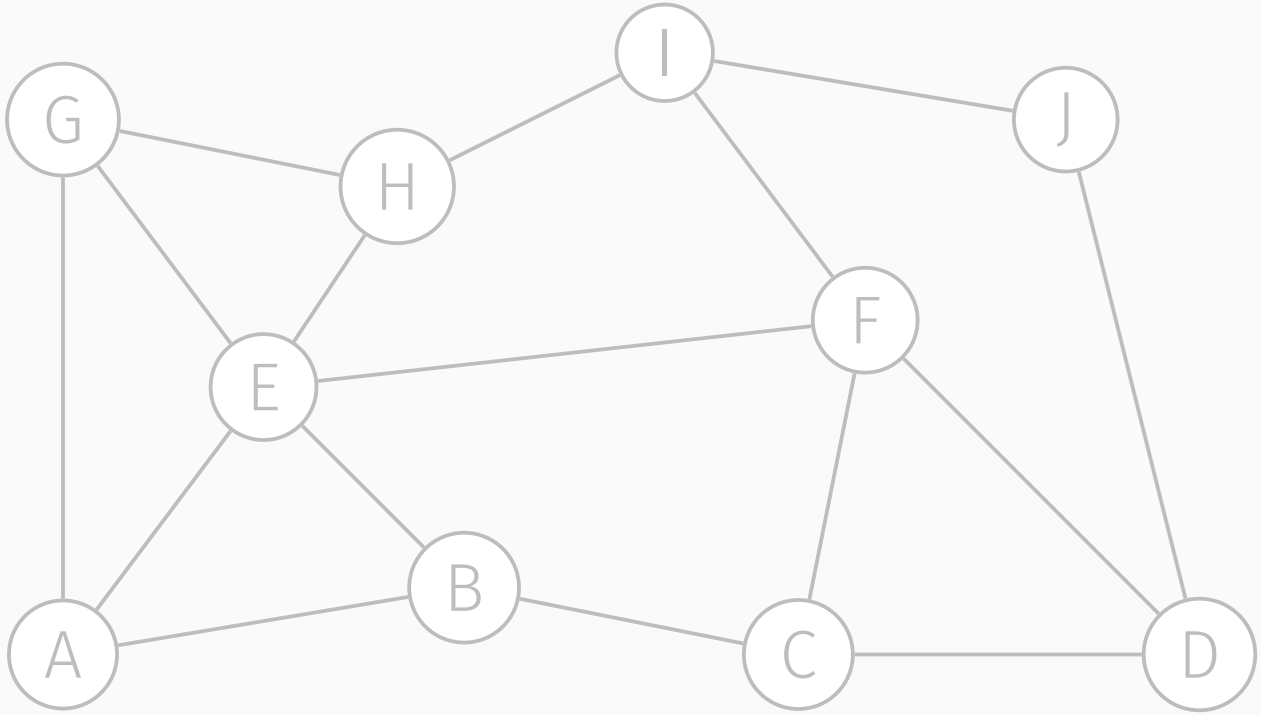
Vrcholy grafu

šedá	vrchol ve stavu unknown
žlutá	vrchol ve stavu discovered
červená	právě zpracovávaný vrchol
modrá	vrchol ve stavu finished

Hrany grafu

šedá	hrana mezi vrcholy ve stavu unknown nebo hrana nepatřící do BF-stromu
žlutá	hrana incidentní s vrcholy ve stavu discovered
červená	hrana incidentní s právě zpracovávaným vrcholem
modrá	hrana mezi vrcholy ve stavu finished

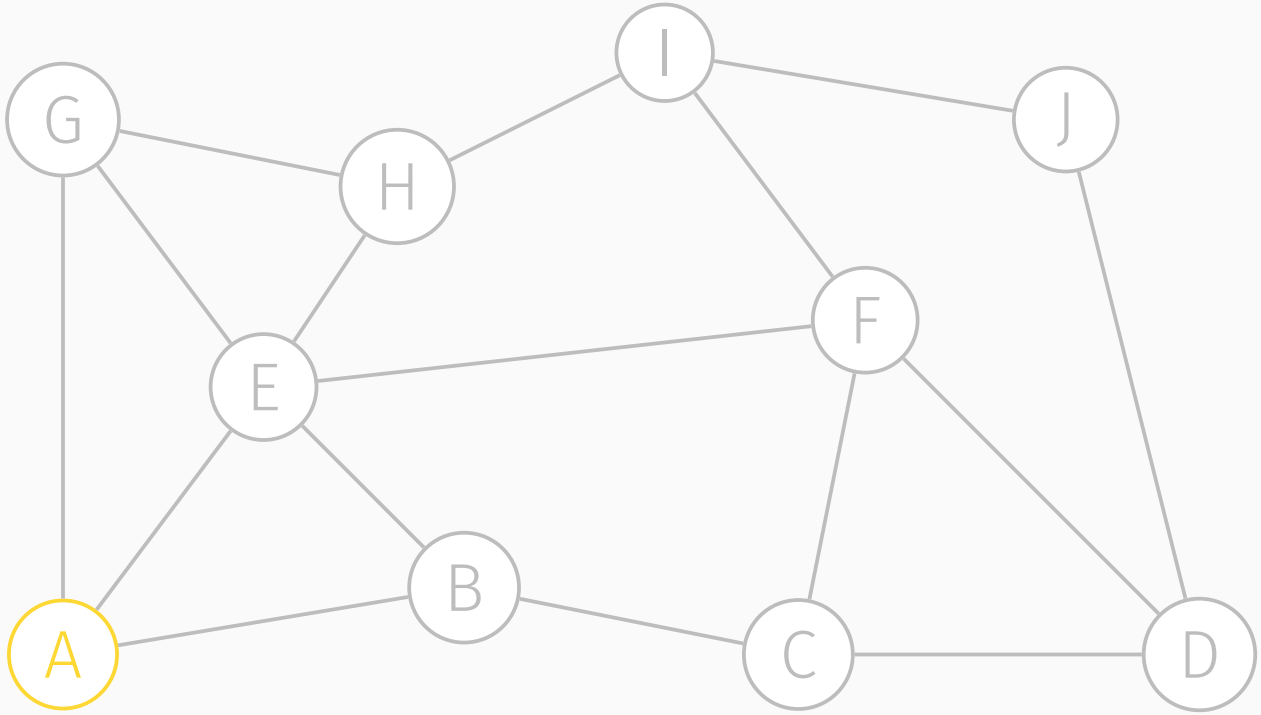
Průchod grafem do šířky, krok 1



Q 

v	$d[v]$	$\pi[v]$
A	∞	/
B	∞	/
C	∞	/
D	∞	/
E	∞	/
F	∞	/
G	∞	/
H	∞	/
I	∞	/
J	∞	/

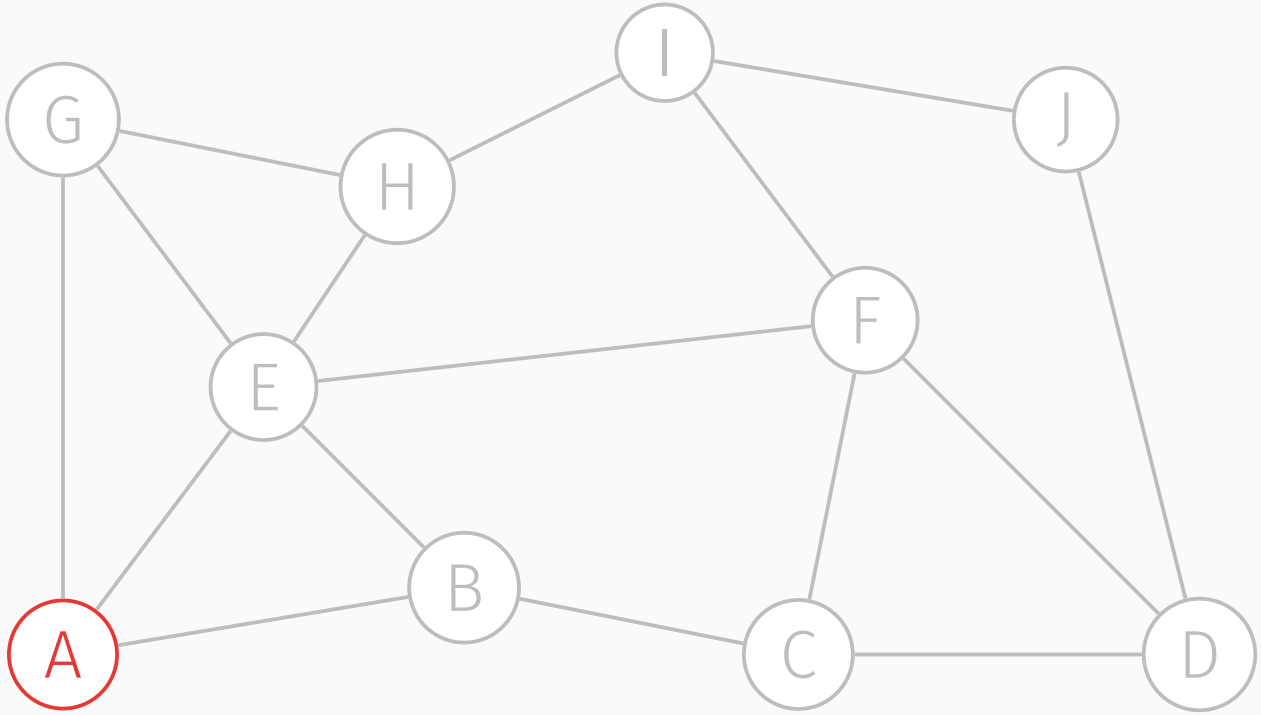
Průchod grafem do šířky, krok 2



Q | A |

v	$d[v]$	$\pi[v]$
A	0	/
B	∞	/
C	∞	/
D	∞	/
E	∞	/
F	∞	/
G	∞	/
H	∞	/
I	∞	/
J	∞	/

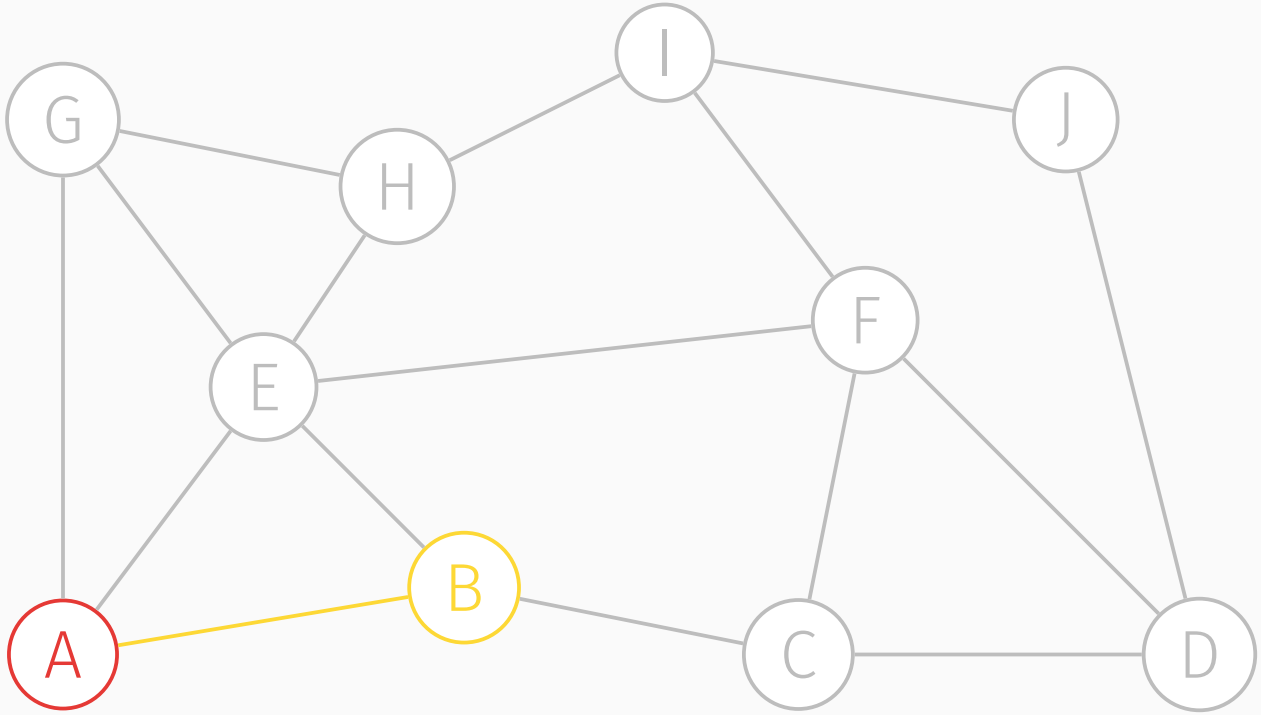
Průchod grafem do šířky, krok 3



Q 

v	$d[v]$	$\pi[v]$
A	0	/
B	∞	/
C	∞	/
D	∞	/
E	∞	/
F	∞	/
G	∞	/
H	∞	/
I	∞	/
J	∞	/

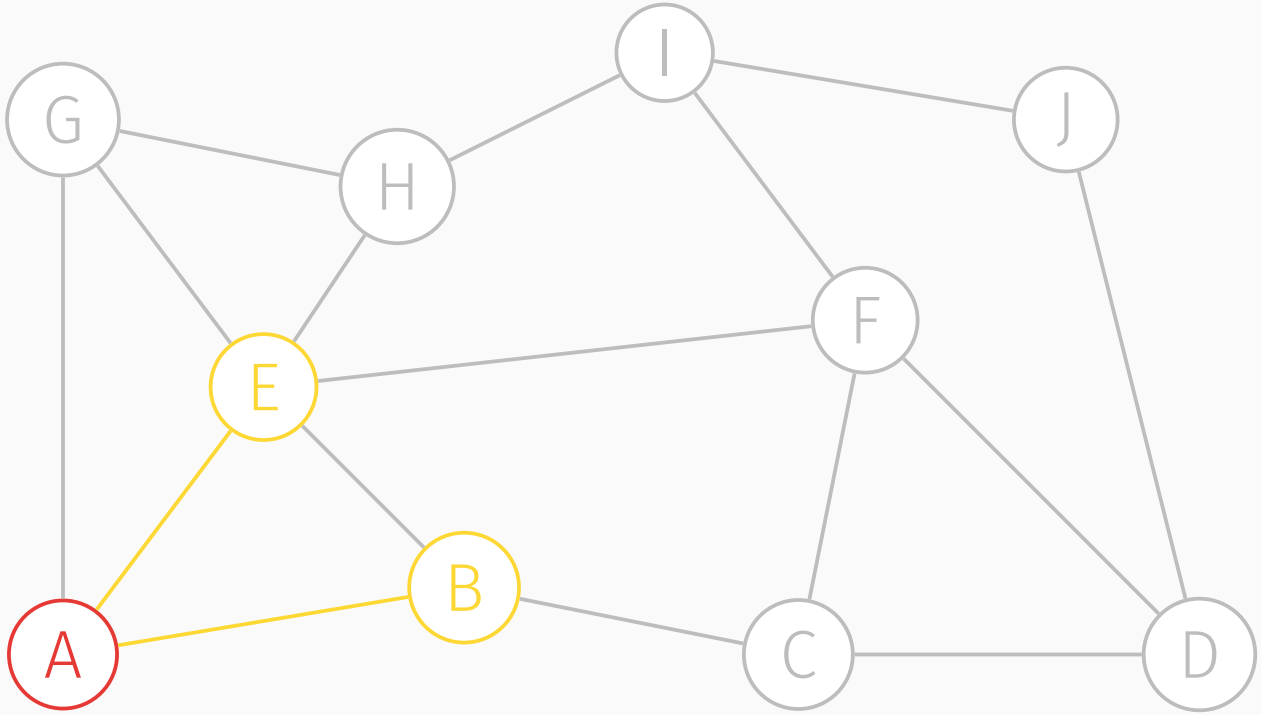
Průchod grafem do šířky, krok 4



Q | B |

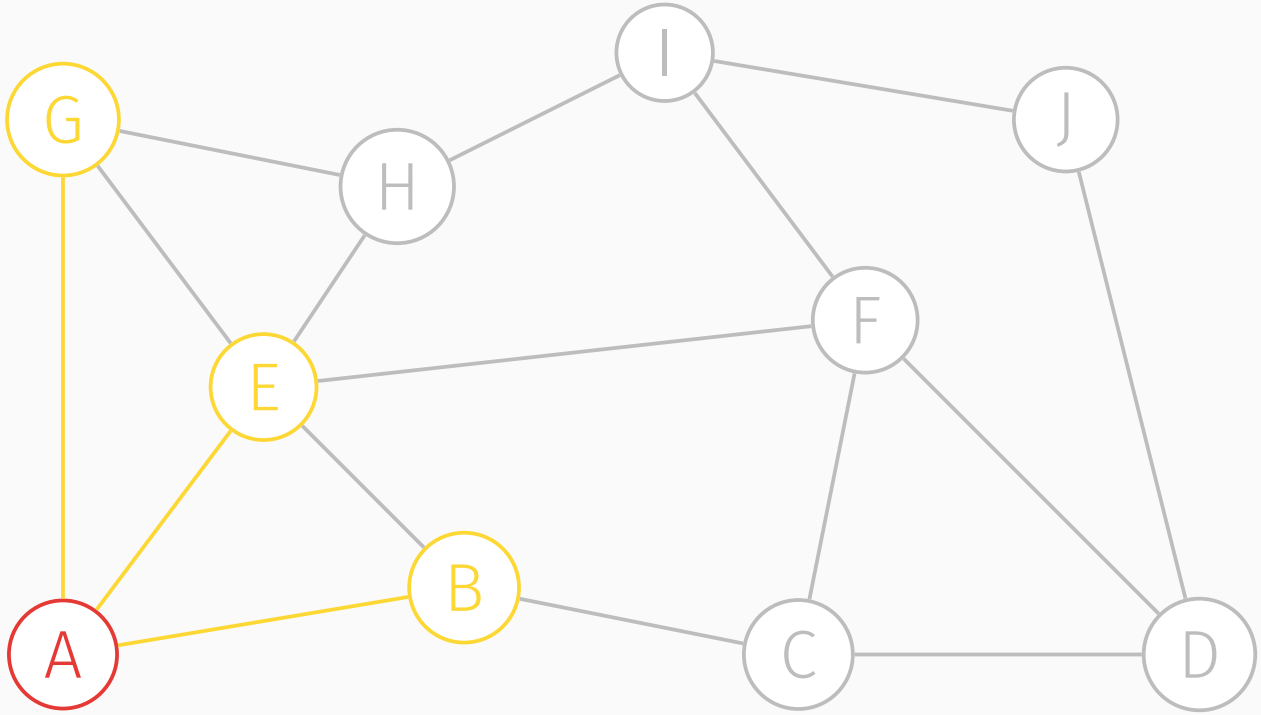
v	$d[v]$	$\pi[v]$
A	0	/
B	1	A
C	∞	/
D	∞	/
E	∞	/
F	∞	/
G	∞	/
H	∞	/
I	∞	/
J	∞	/

Průchod grafem do šířky, krok 5



v	$d[v]$	$\pi[v]$
A	0	/
B	1	A
C	∞	/
D	∞	/
E	1	A
F	∞	/
G	∞	/
H	∞	/
I	∞	/
J	∞	/

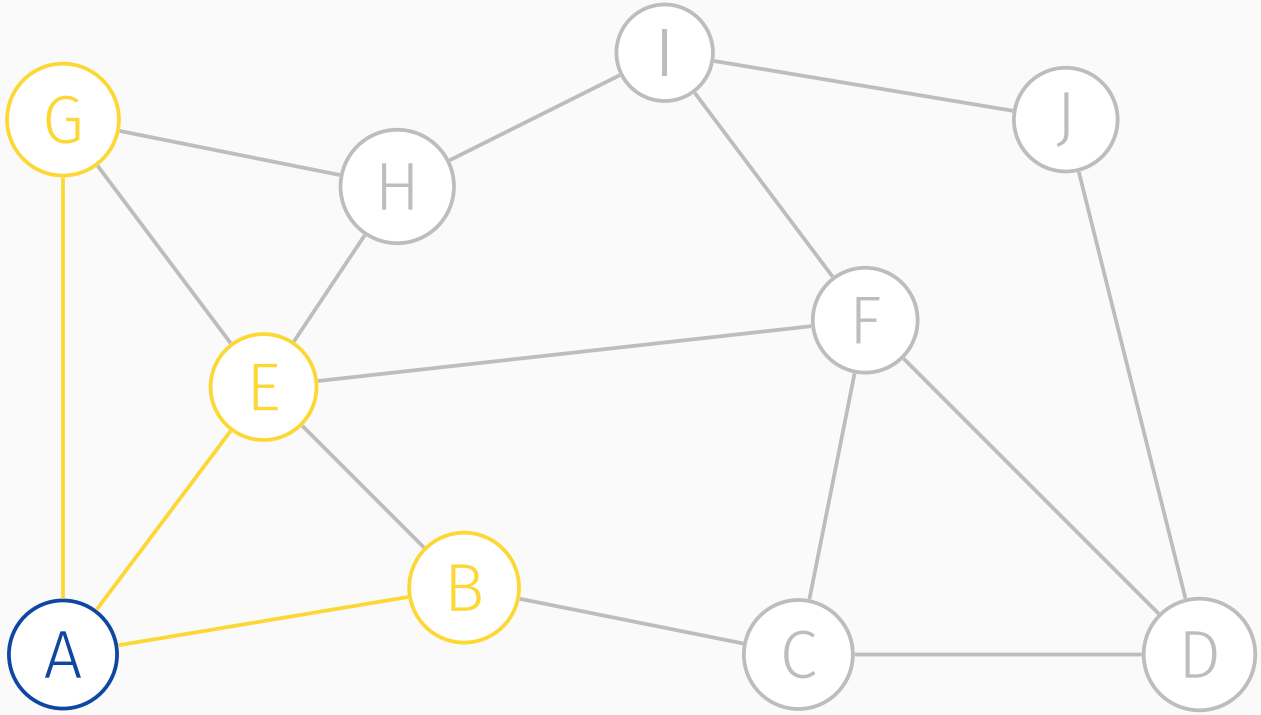
Průchod grafem do šířky, krok 6



Q | B | E | G |

v	$d[v]$	$\pi[v]$
A	0	/
B	1	A
C	∞	/
D	∞	/
E	1	A
F	∞	/
G	1	A
H	∞	/
I	∞	/
J	∞	/

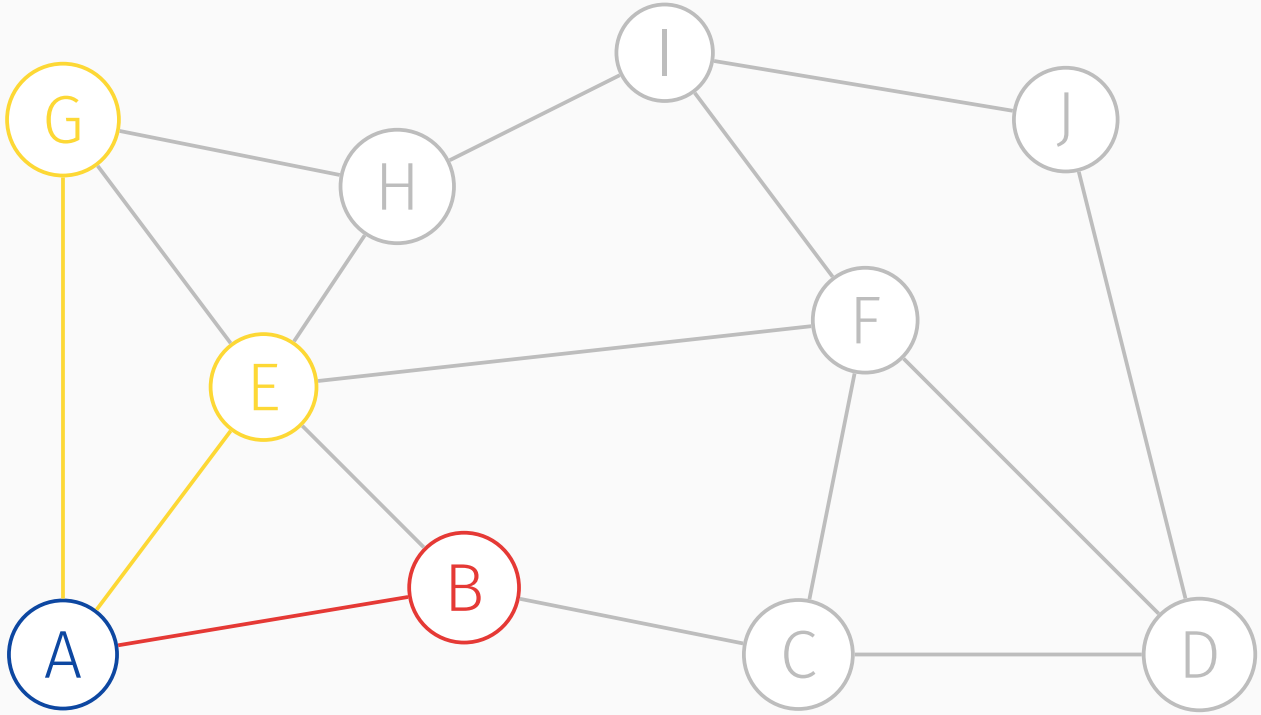
Průchod grafem do šířky, krok 7



Q | B | E | G |

v	$d[v]$	$\pi[v]$
A	0	/
B	1	A
C	∞	/
D	∞	/
E	1	A
F	∞	/
G	1	A
H	∞	/
I	∞	/
J	∞	/

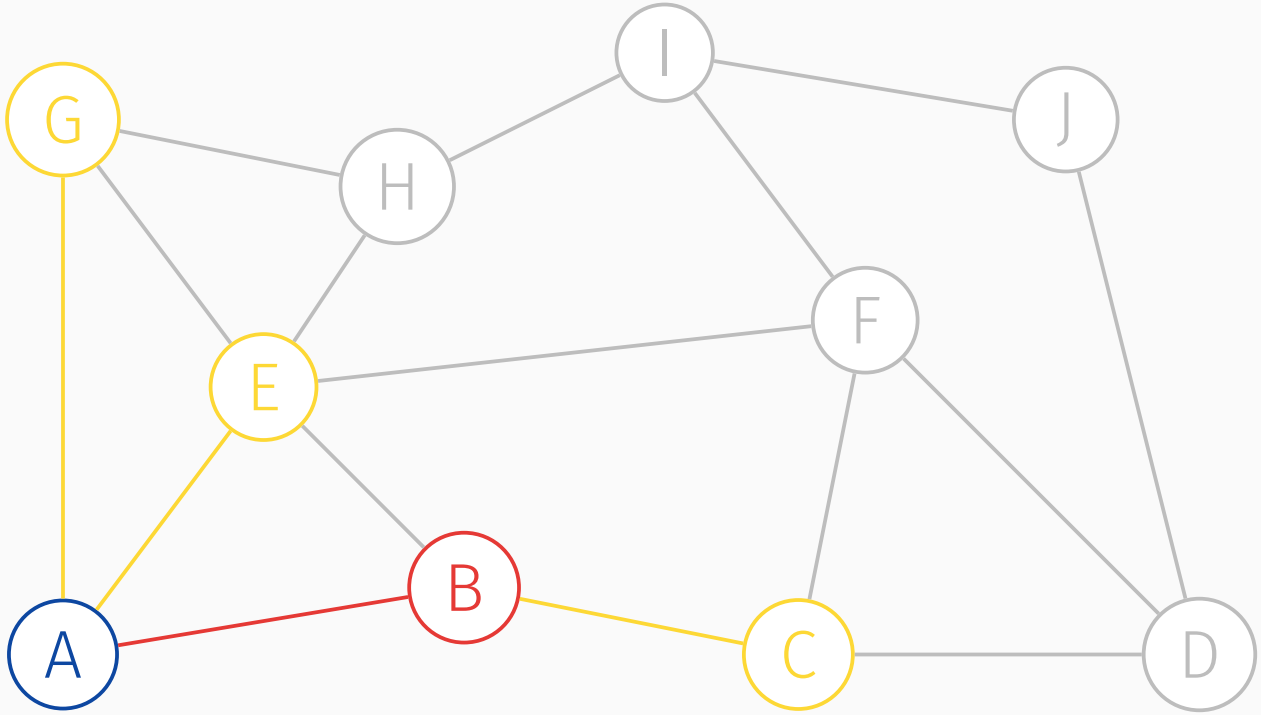
Průchod grafem do šířky, krok 8



Q | E | G |

v	$d[v]$	$\pi[v]$
A	0	/
B	1	A
C	∞	/
D	∞	/
E	1	A
F	∞	/
G	1	A
H	∞	/
I	∞	/
J	∞	/

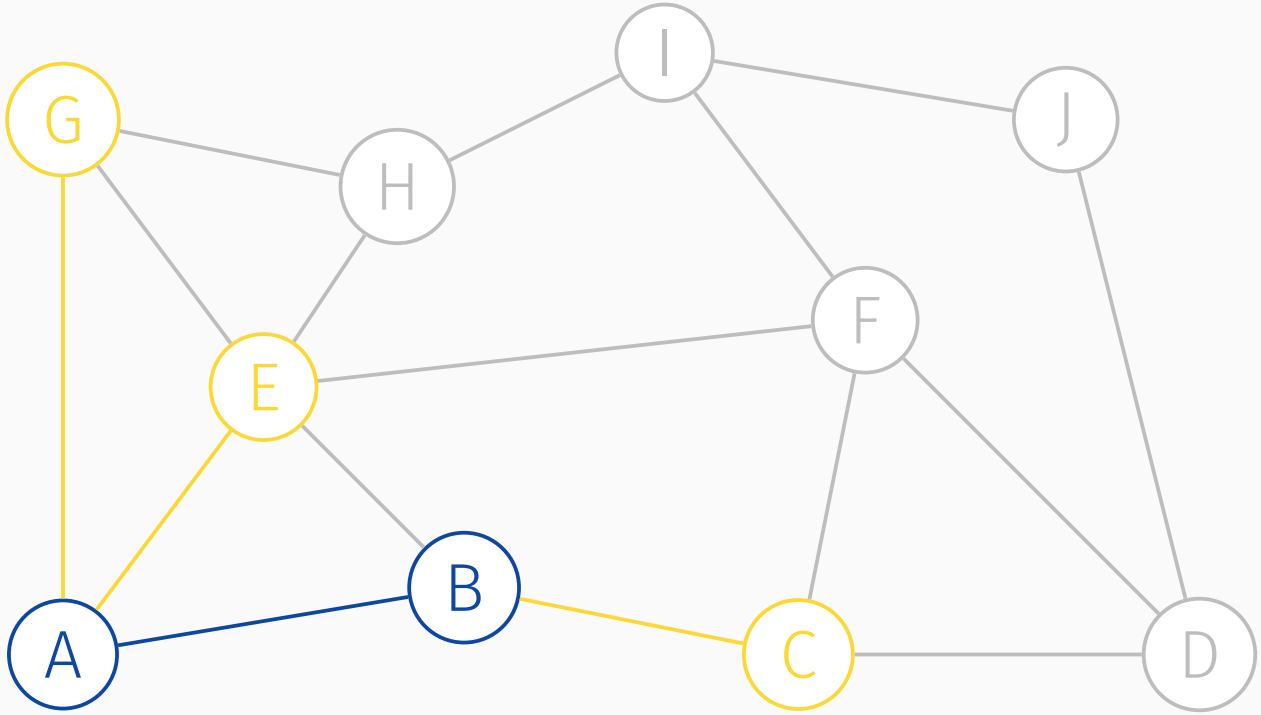
Průchod grafem do šířky, krok 9



Q | E | G | C |

v	$d[v]$	$\pi[v]$
A	0	/
B	1	A
C	2	B
D	∞	/
E	1	A
F	∞	/
G	1	A
H	∞	/
I	∞	/
J	∞	/

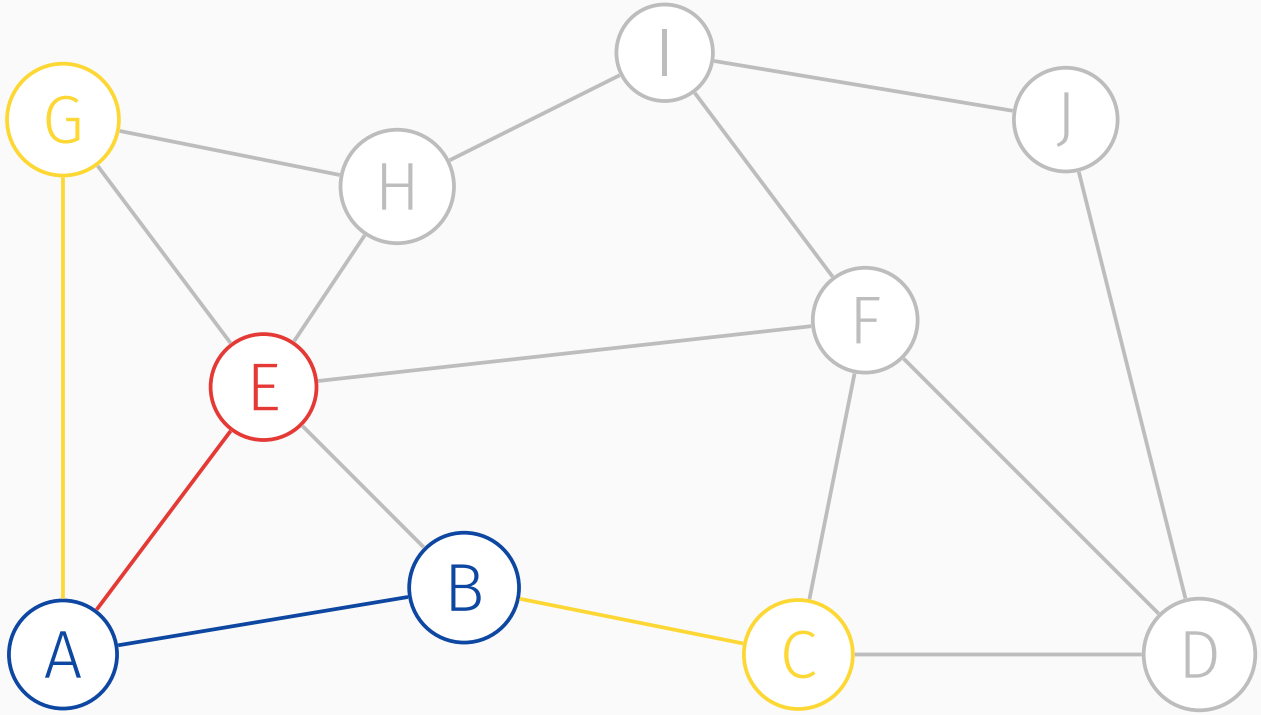
Průchod grafem do šířky, krok 10



Q | E | G | C |

v	$d[v]$	$\pi[v]$
A	0	/
B	1	A
C	2	B
D	∞	/
E	1	A
F	∞	/
G	1	A
H	∞	/
I	∞	/
J	∞	/

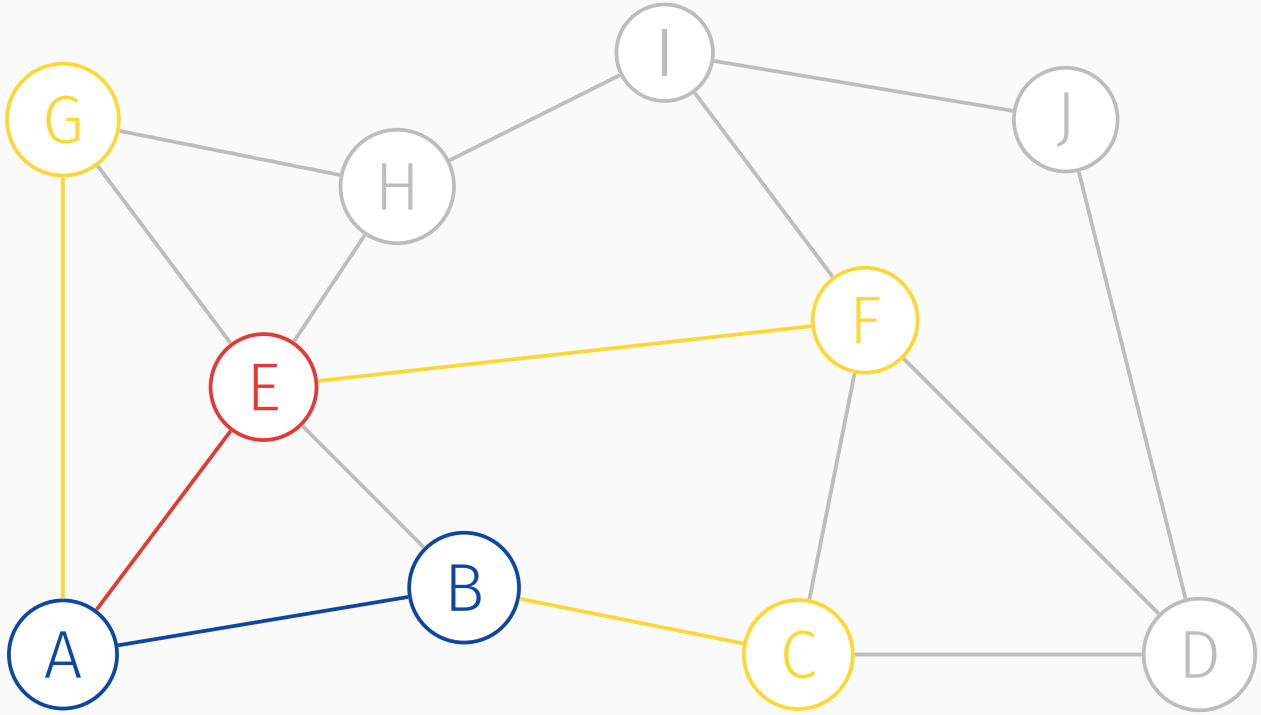
Průchod grafem do šířky, krok 11



Q | G | C |

v	$d[v]$	$\pi[v]$
A	0	/
B	1	A
C	2	B
D	∞	/
E	1	A
F	∞	/
G	1	A
H	∞	/
I	∞	/
J	∞	/

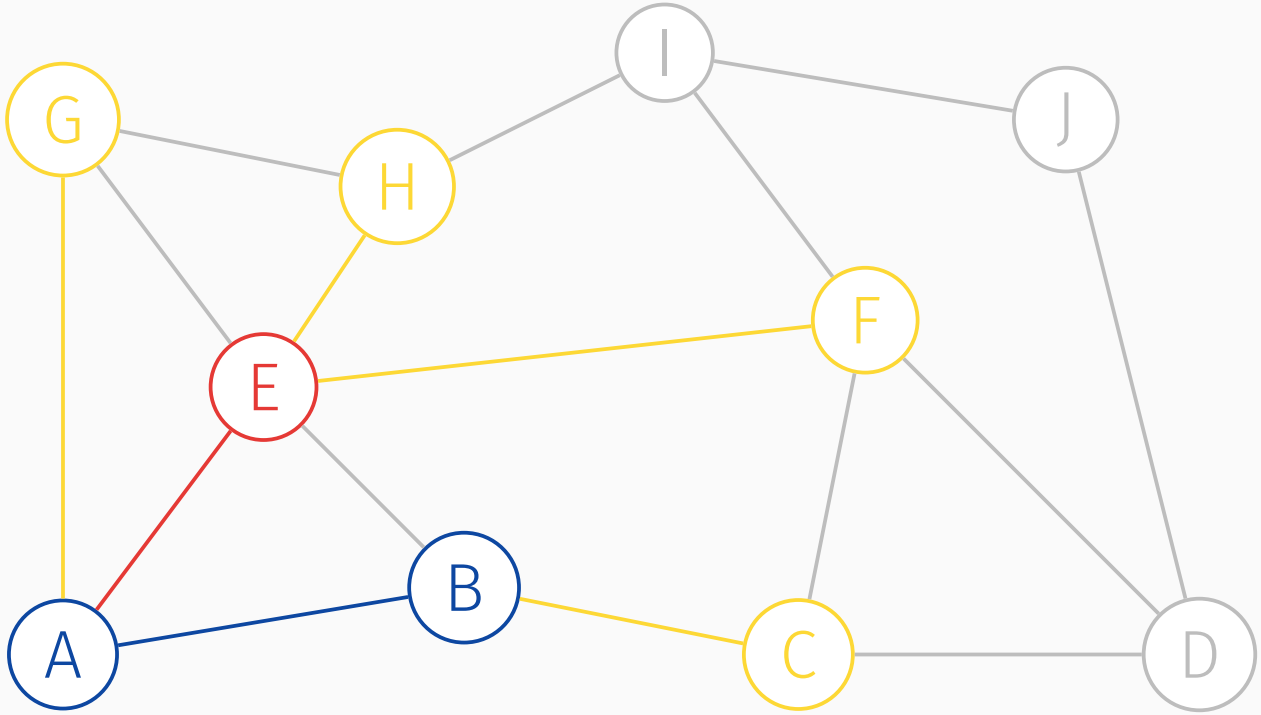
Průchod grafem do šířky, krok 12



v	$d[v]$	$\pi[v]$
A	0	/
B	1	A
C	2	B
D	∞	/
E	1	A
F	2	E
G	1	A
H	∞	/
I	∞	/
J	∞	/

Q | G | C | F |

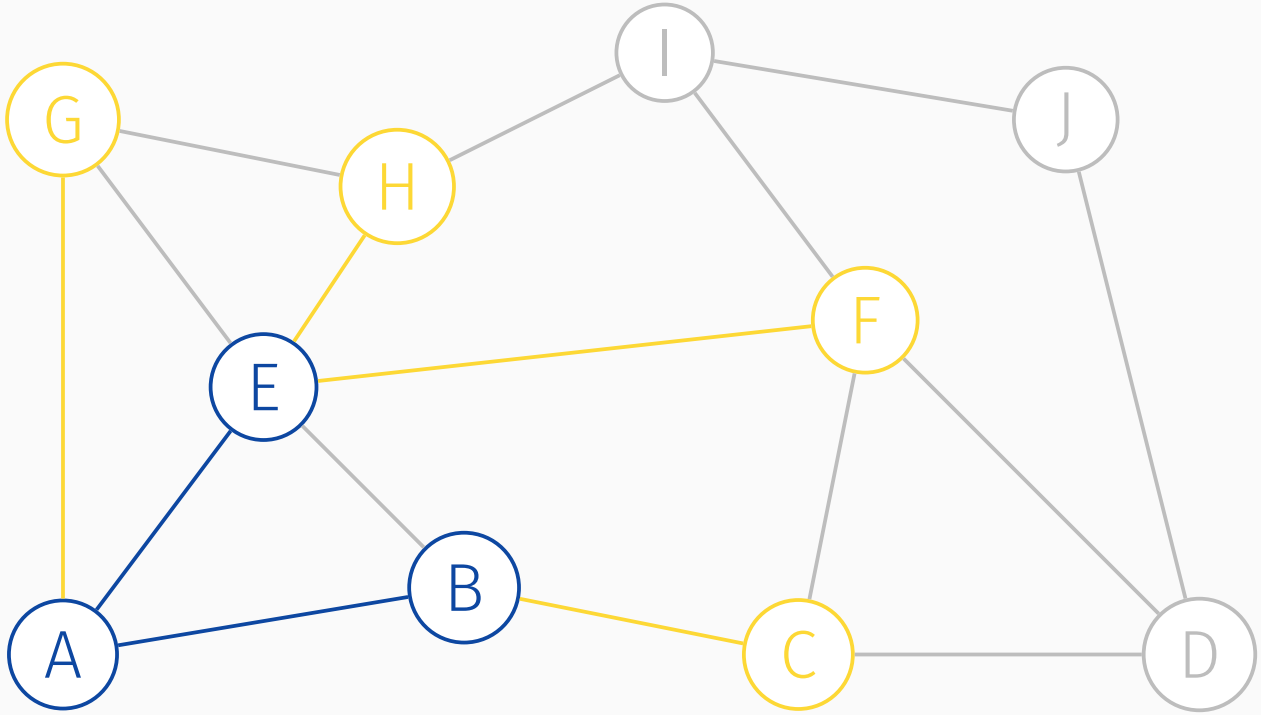
Průchod grafem do šířky, krok 13



v	$d[v]$	$\pi[v]$
A	0	/
B	1	A
C	2	B
D	∞	/
E	1	A
F	2	E
G	1	A
H	2	E
I	∞	/
J	∞	/

Q | G | C | F | H |

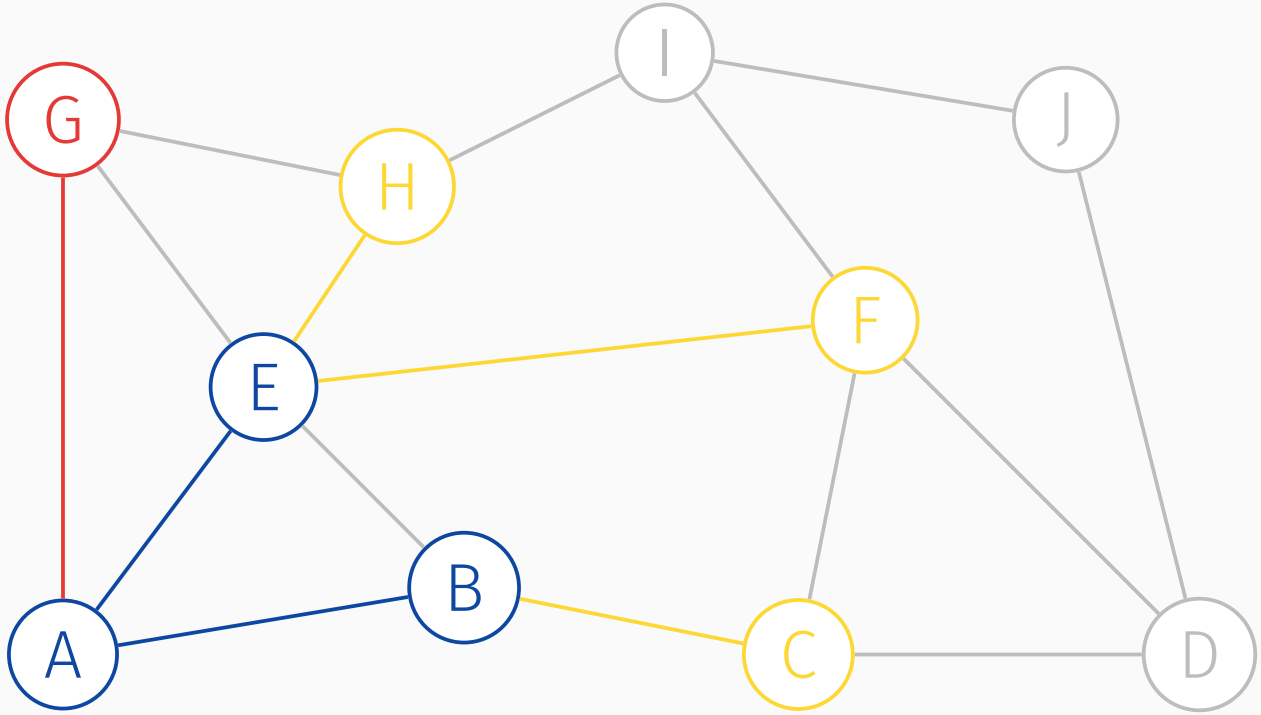
Průchod grafem do šířky, krok 14



v	$d[v]$	$\pi[v]$
A	0	/
B	1	A
C	2	B
D	∞	/
E	1	A
F	2	E
G	1	A
H	2	E
I	∞	/
J	∞	/

Q | G | C | F | H |

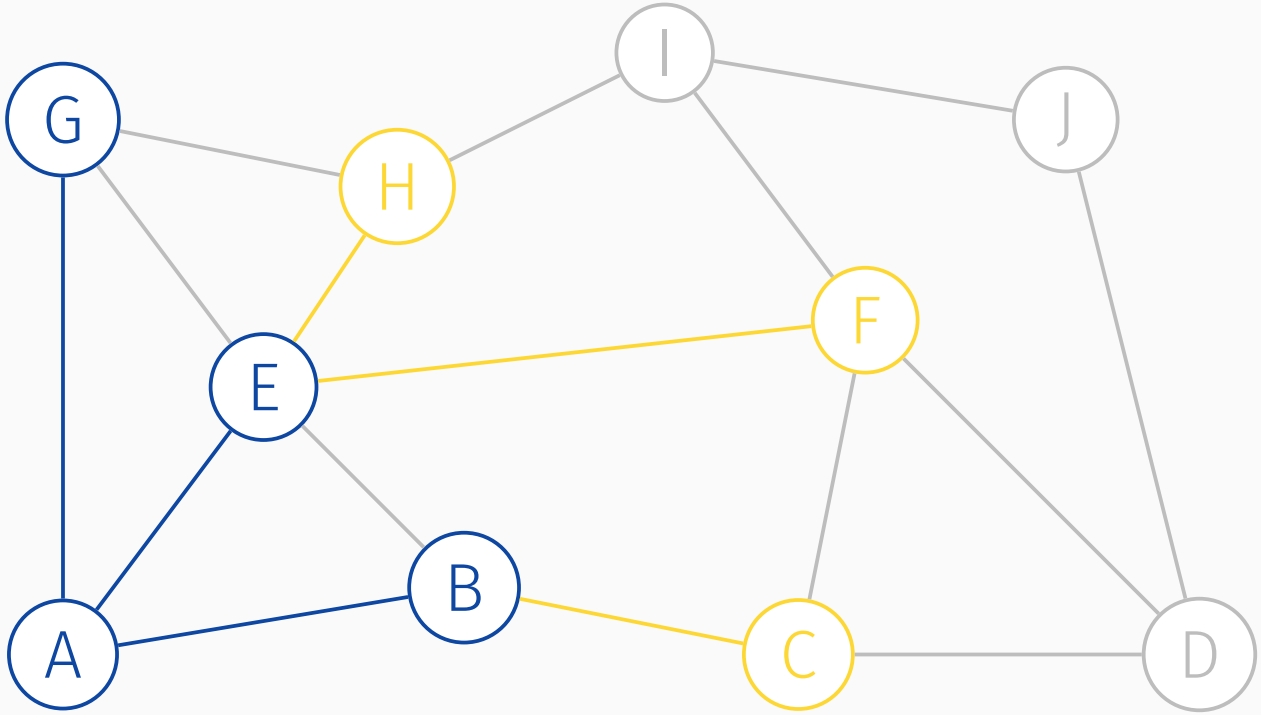
Průchod grafem do šířky, krok 15



Q | C | F | H |

v	$d[v]$	$\pi[v]$
A	0	/
B	1	A
C	2	B
D	∞	/
E	1	A
F	2	E
G	1	A
H	2	E
I	∞	/
J	∞	/

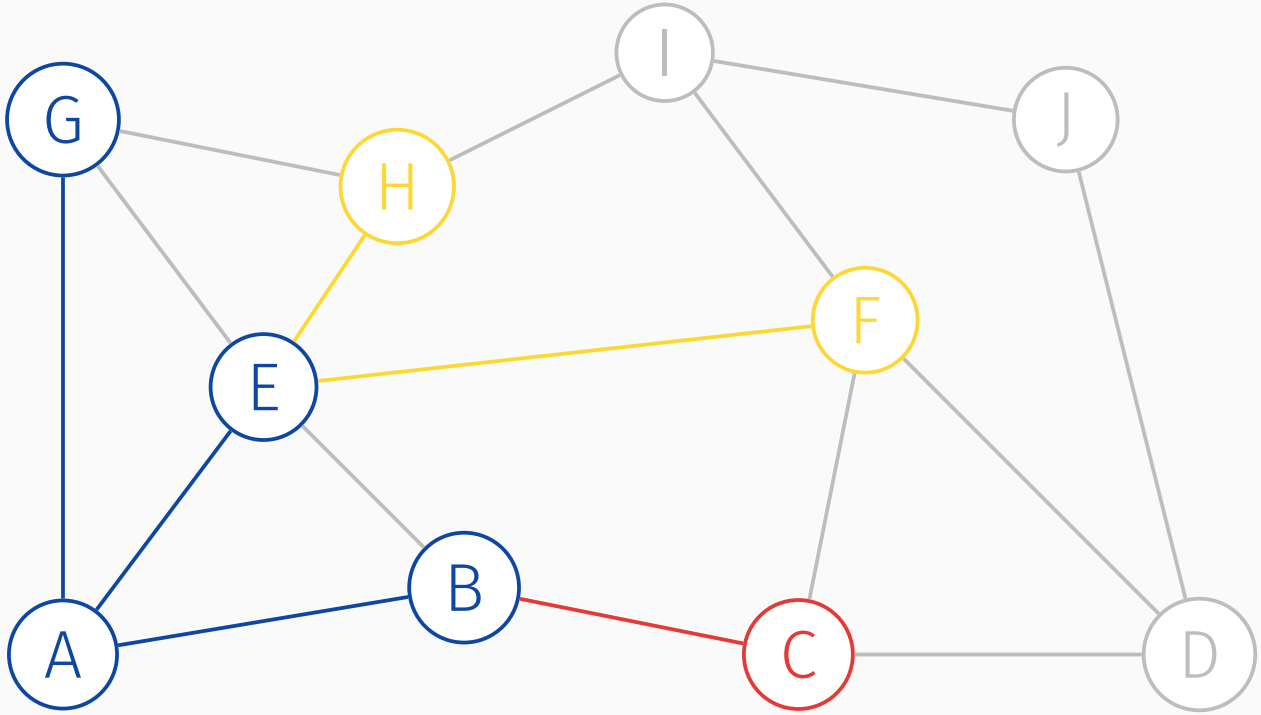
Průchod grafem do šířky, krok 16



Q | C | F | H |

v	$d[v]$	$\pi[v]$
A	0	/
B	1	A
C	2	B
D	∞	/
E	1	A
F	2	E
G	1	A
H	2	E
I	∞	/
J	∞	/

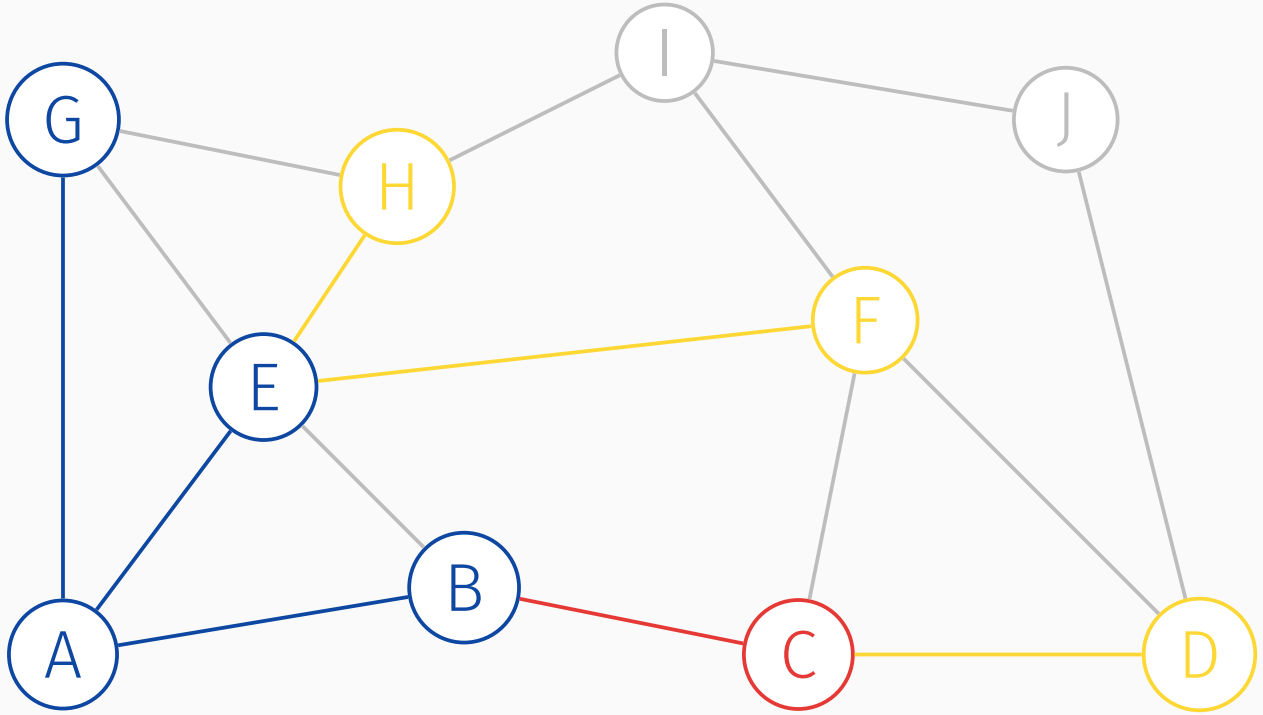
Průchod grafem do šířky, krok 17



Q | F | H |

v	$d[v]$	$\pi[v]$
A	0	/
B	1	A
C	2	B
D	∞	/
E	1	A
F	2	E
G	1	A
H	2	E
I	∞	/
J	∞	/

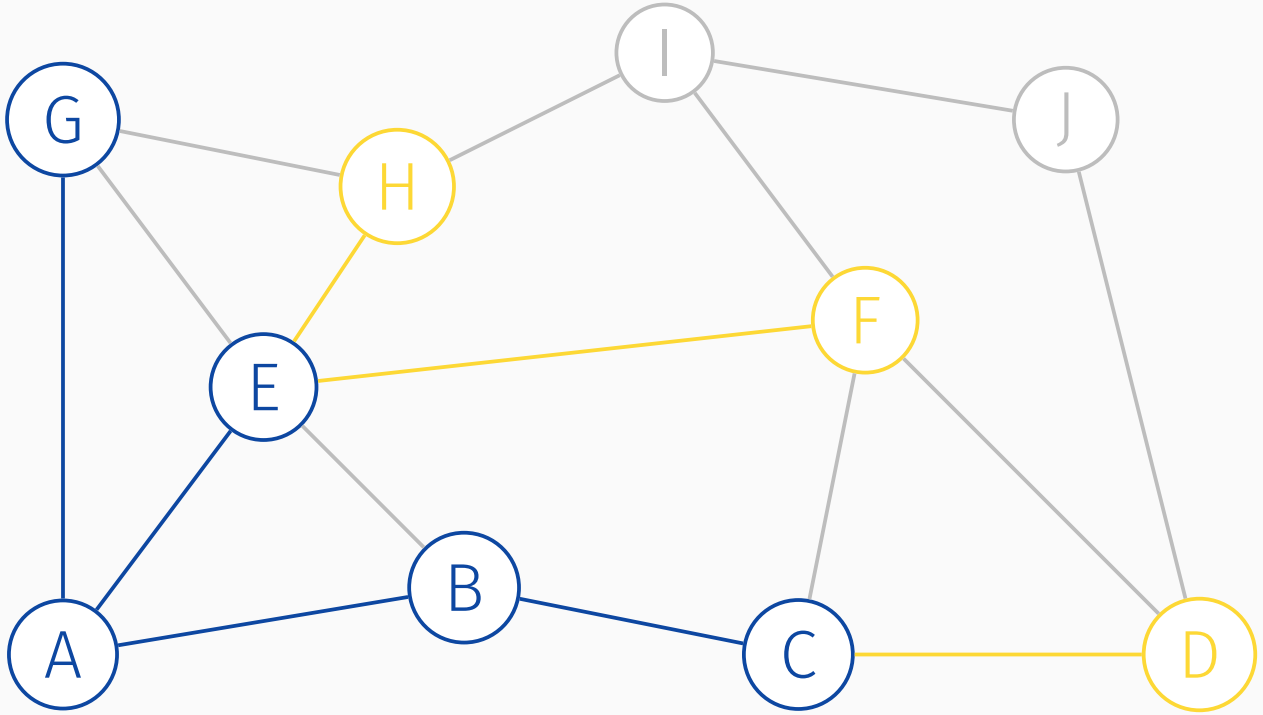
Průchod grafem do šířky, krok 18



Q | F | H | D |

v	$d[v]$	$\pi[v]$
A	0	/
B	1	A
C	2	B
D	3	C
E	1	A
F	2	E
G	1	A
H	2	E
I	∞	/
J	∞	/

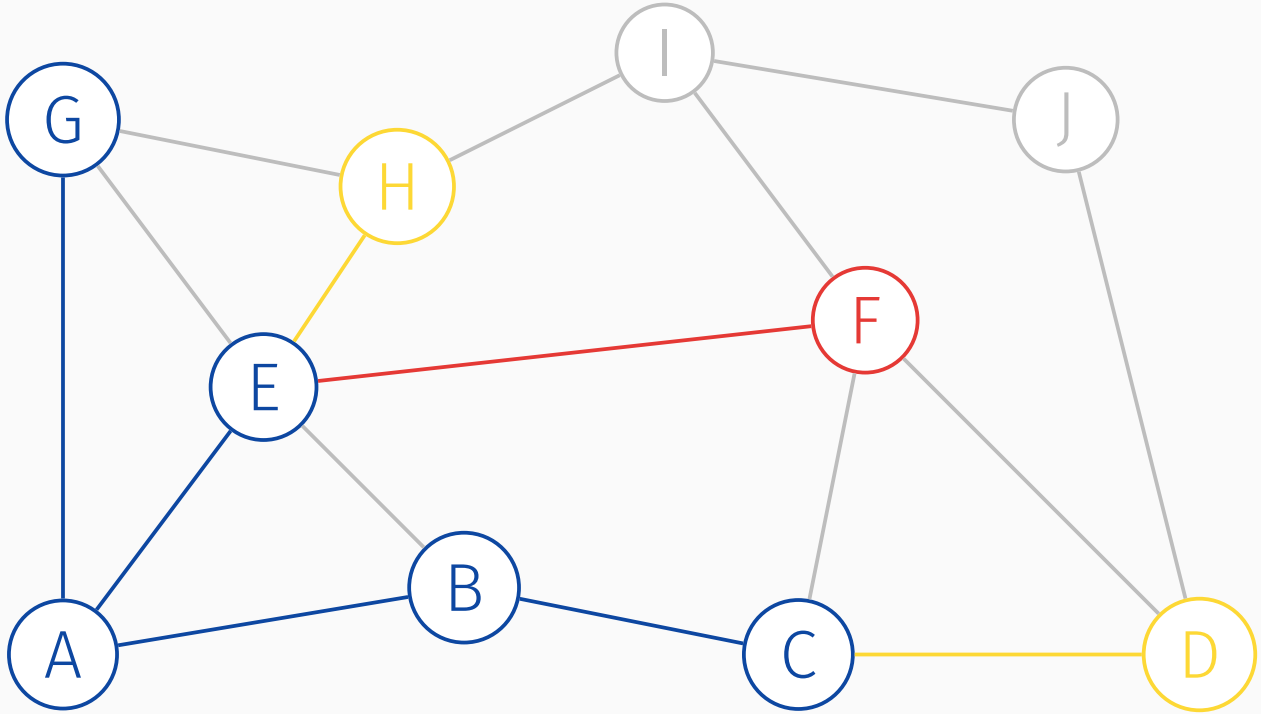
Průchod grafem do šířky, krok 19



Q | F | H | D |

v	$d[v]$	$\pi[v]$
A	0	/
B	1	A
C	2	B
D	3	C
E	1	A
F	2	E
G	1	A
H	2	E
I	∞	/
J	∞	/

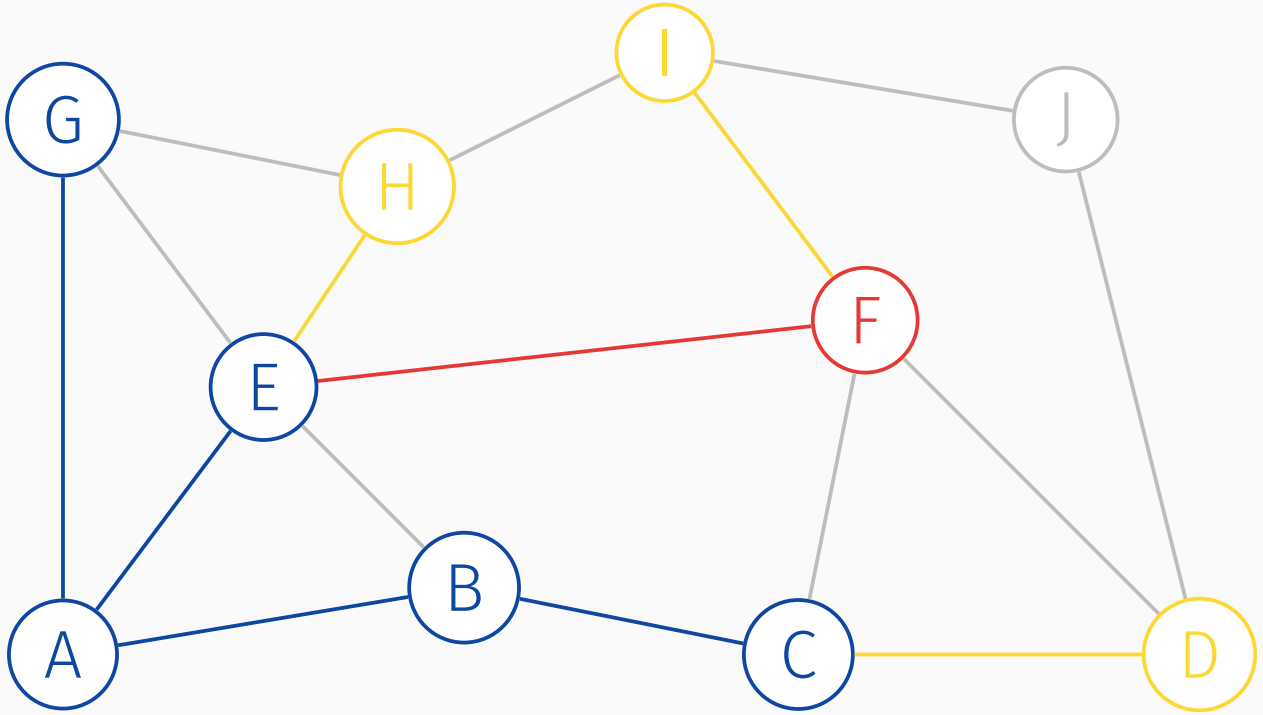
Průchod grafem do šířky, krok 20



Q | H | D |

v	$d[v]$	$\pi[v]$
A	0	/
B	1	A
C	2	B
D	3	C
E	1	A
F	2	E
G	1	A
H	2	E
I	∞	/
J	∞	/

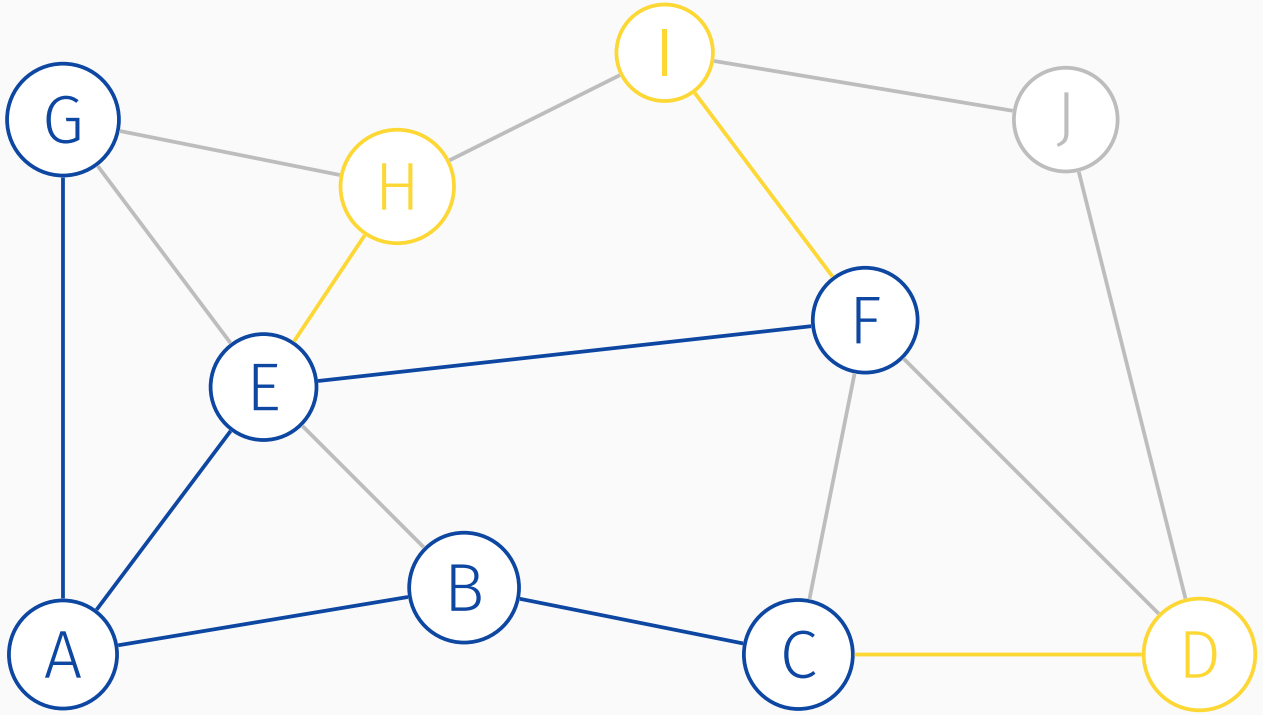
Průchod grafem do šířky, krok 21



Q | H | D | I |

v	$d[v]$	$\pi[v]$
A	0	/
B	1	A
C	2	B
D	3	C
E	1	A
F	2	E
G	1	A
H	2	E
I	3	F
J	∞	/

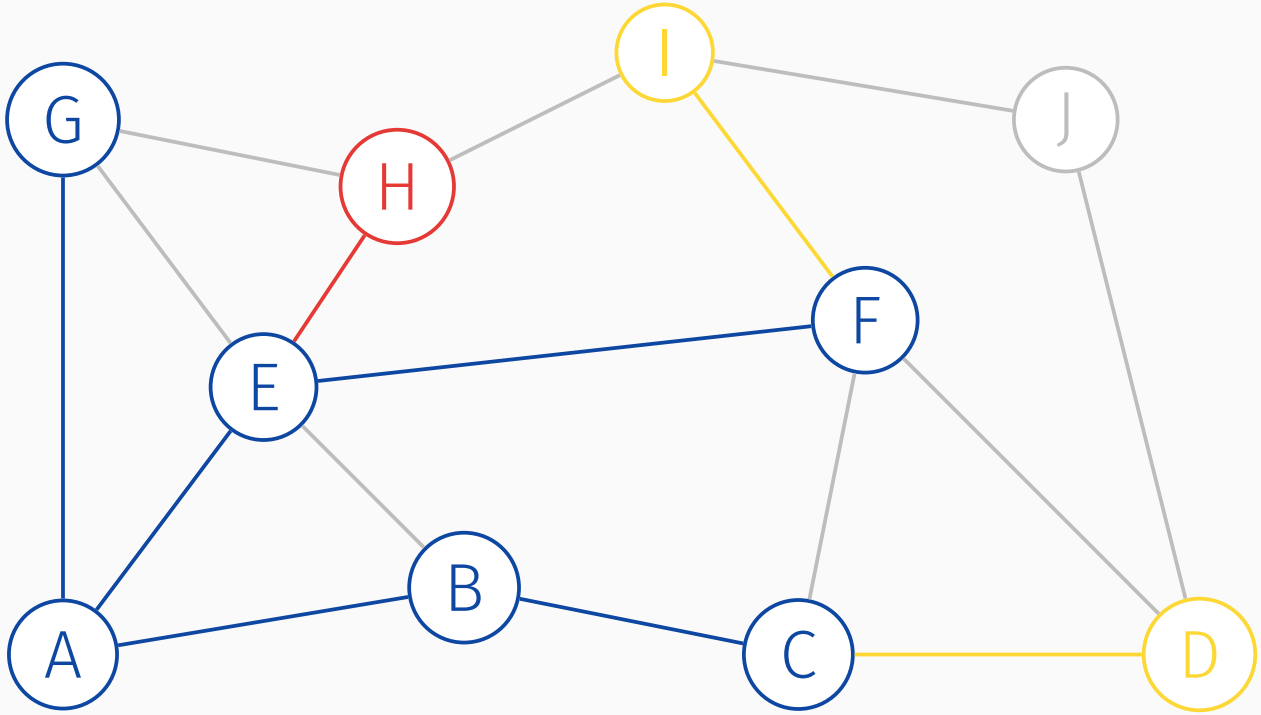
Průchod grafem do šířky, krok 22



v	$d[v]$	$\pi[v]$
A	0	/
B	1	A
C	2	B
D	3	C
E	1	A
F	2	E
G	1	A
H	2	E
I	3	F
J	∞	/

Q | H | D | I |

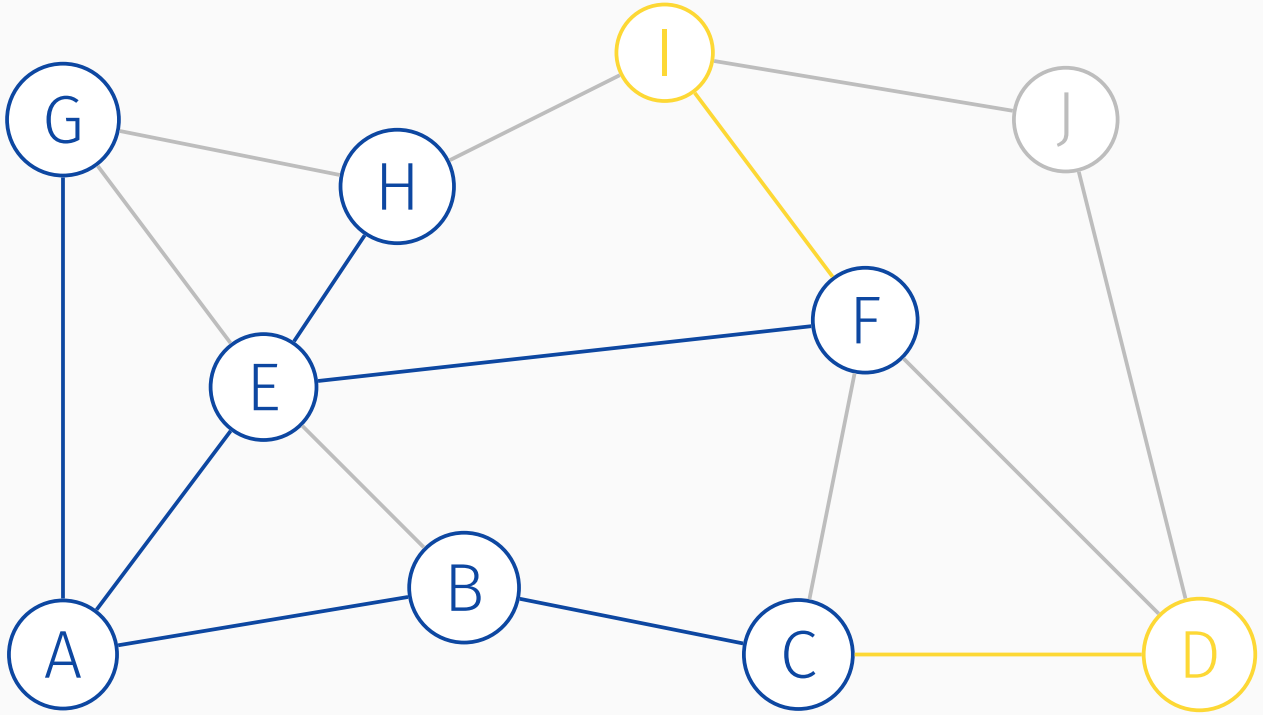
Průchod grafem do šířky, krok 23



Q | D | I |

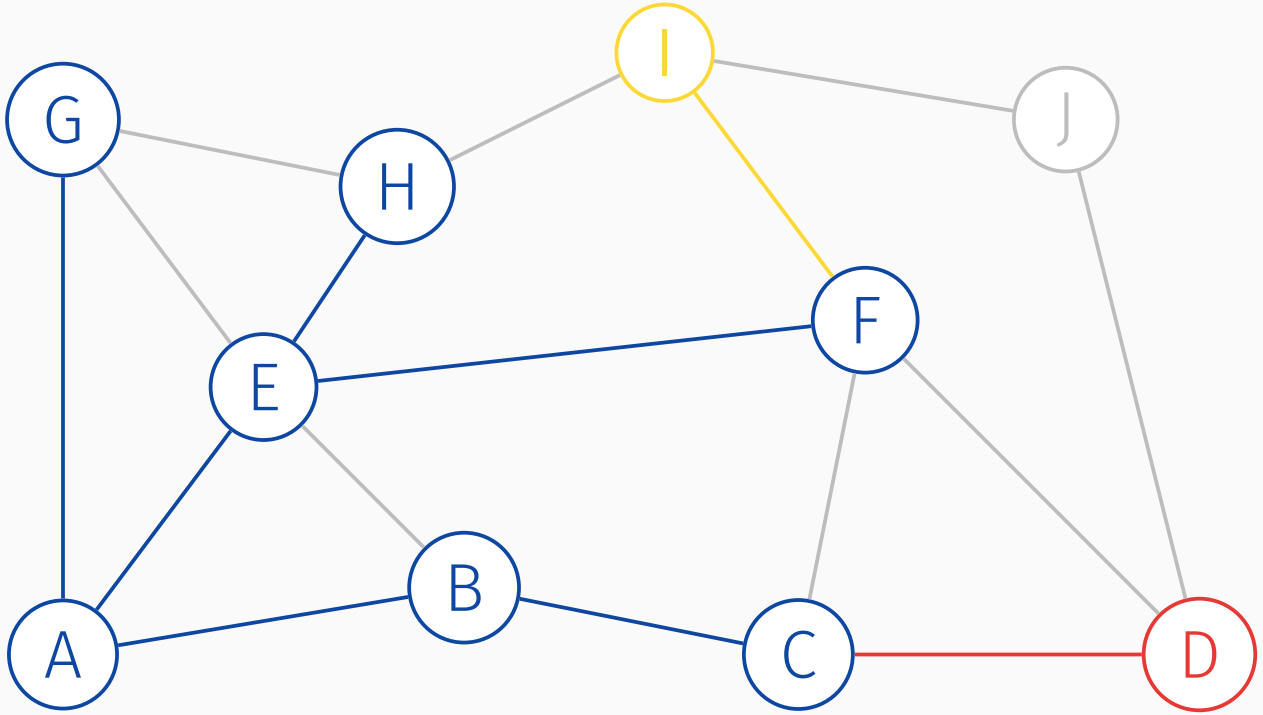
v	$d[v]$	$\pi[v]$
A	0	/
B	1	A
C	2	B
D	3	C
E	1	A
F	2	E
G	1	A
H	2	E
I	3	F
J	∞	/

Průchod grafem do šířky, krok 24



v	$d[v]$	$\pi[v]$
A	0	/
B	1	A
C	2	B
D	3	C
E	1	A
F	2	E
G	1	A
H	2	E
I	3	F
J	∞	/

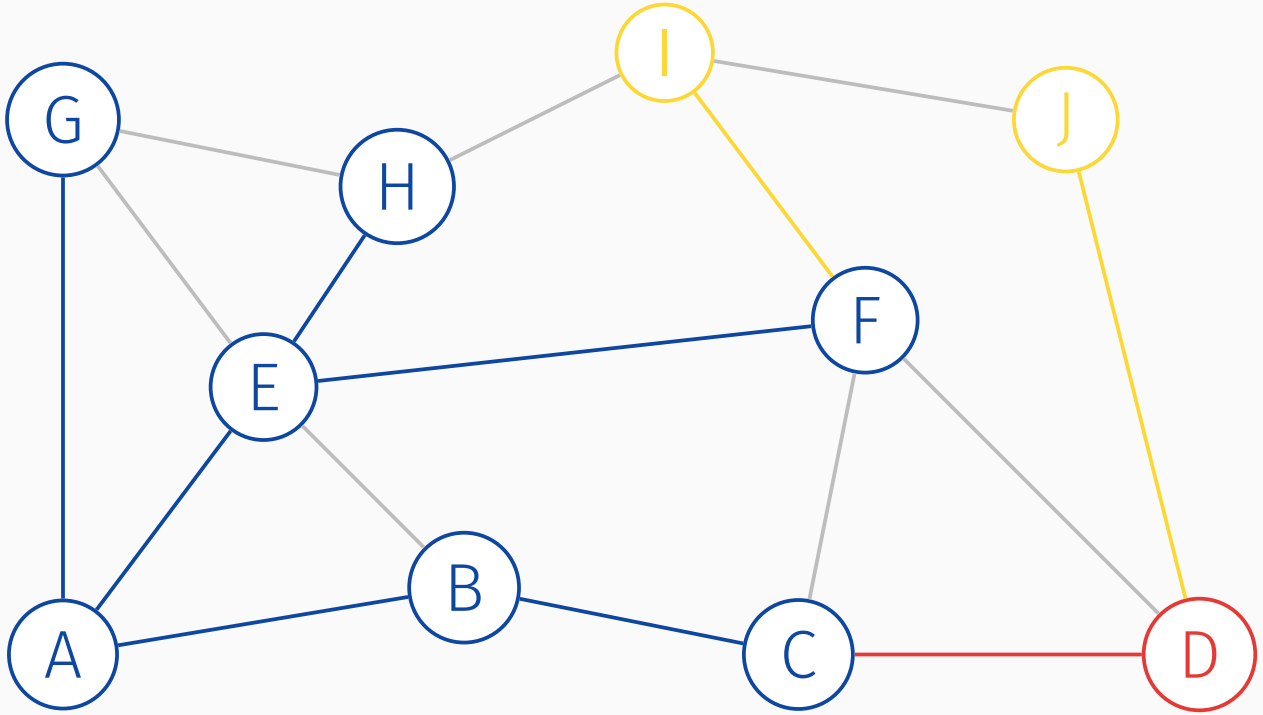
Průchod grafem do šířky, krok 25



Q | I |

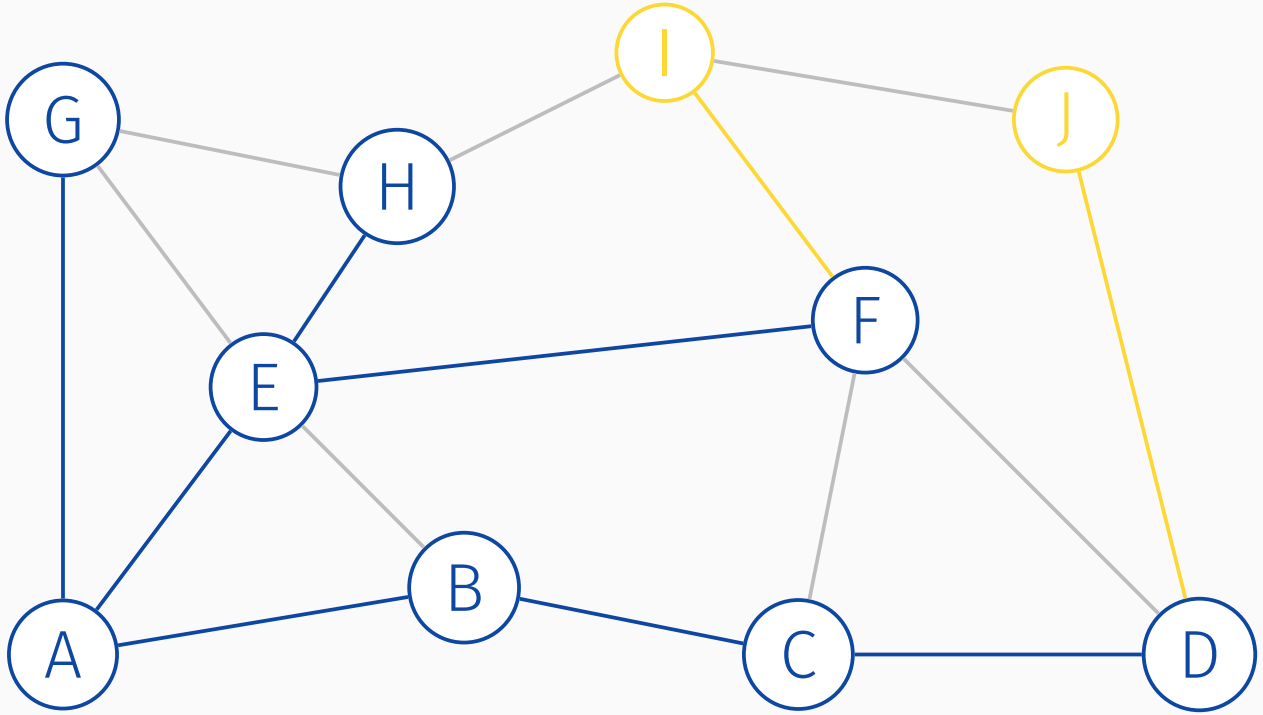
v	$d[v]$	$\pi[v]$
A	0	/
B	1	A
C	2	B
D	3	C
E	1	A
F	2	E
G	1	A
H	2	E
I	3	F
J	∞	/

Průchod grafem do šířky, krok 26



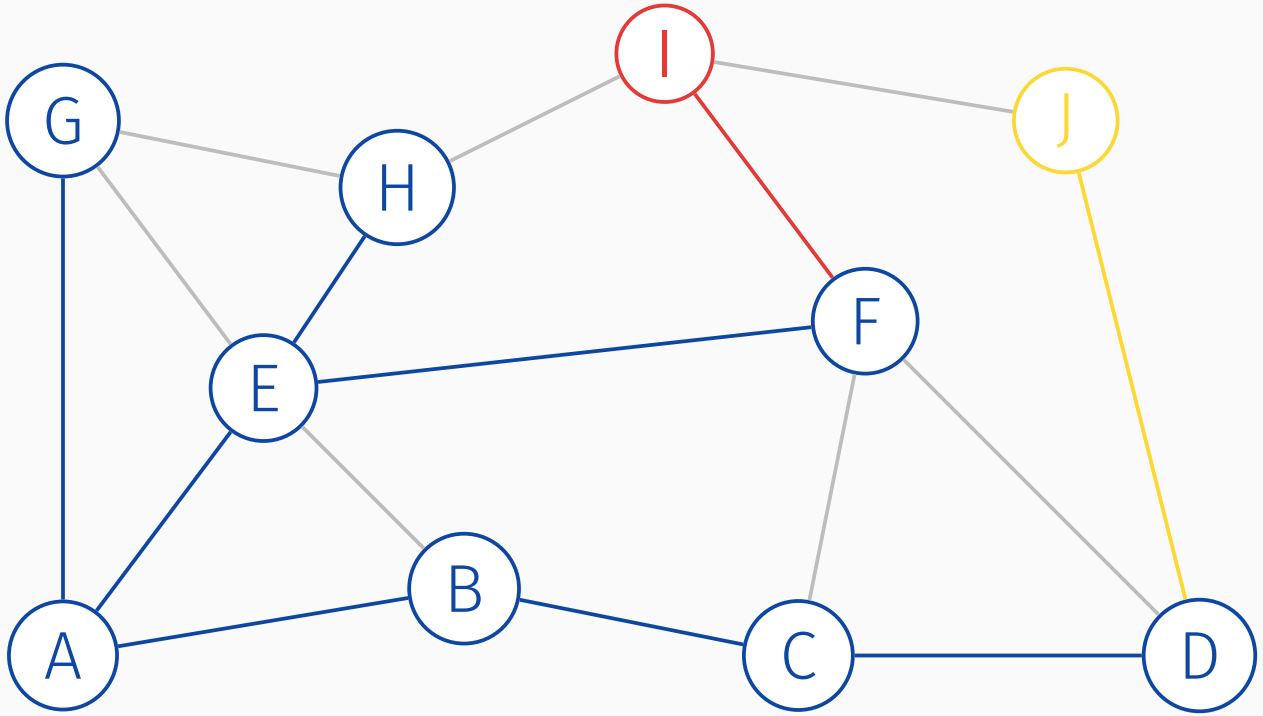
v	$d[v]$	$\pi[v]$
A	0	/
B	1	A
C	2	B
D	3	C
E	1	A
F	2	E
G	1	A
H	2	E
I	3	F
J	4	D

Průchod grafem do šířky, krok 27



v	$d[v]$	$\pi[v]$
A	0	/
B	1	A
C	2	B
D	3	C
E	1	A
F	2	E
G	1	A
H	2	E
I	3	F
J	4	D

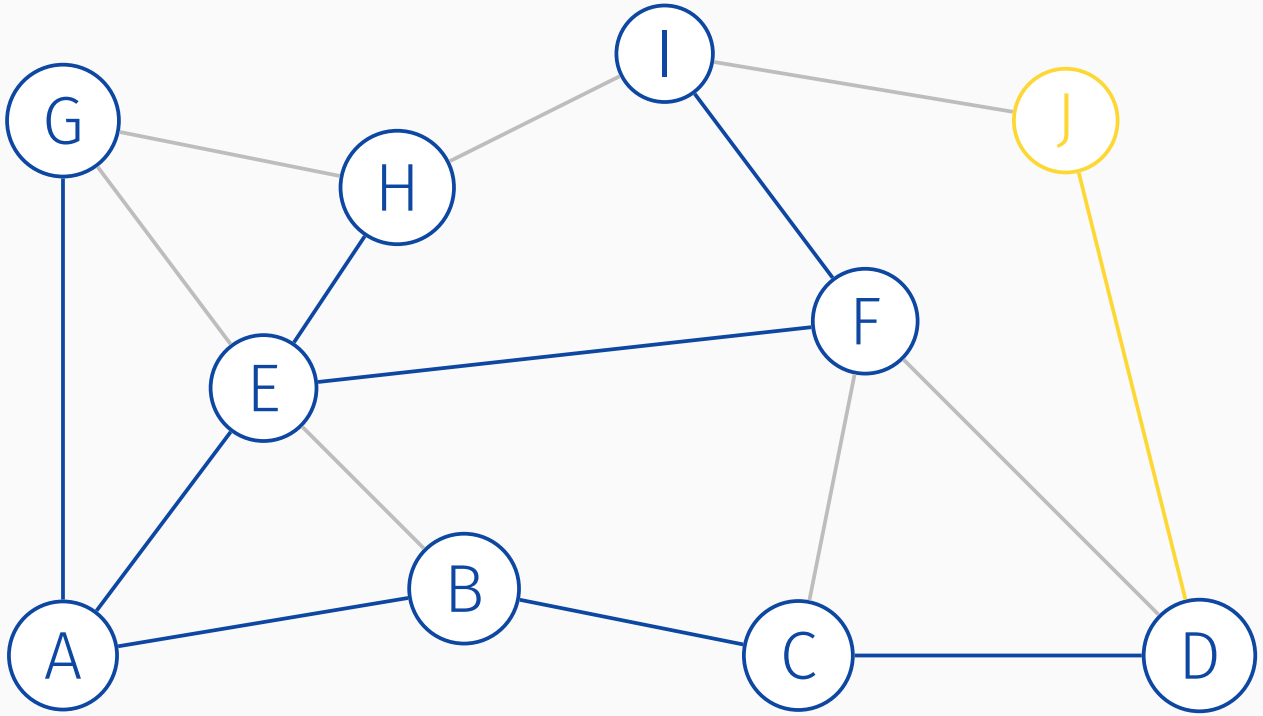
Průchod grafem do šířky, krok 28



Q | J |

v	$d[v]$	$\pi[v]$
A	0	/
B	1	A
C	2	B
D	3	C
E	1	A
F	2	E
G	1	A
H	2	E
I	3	F
J	4	D

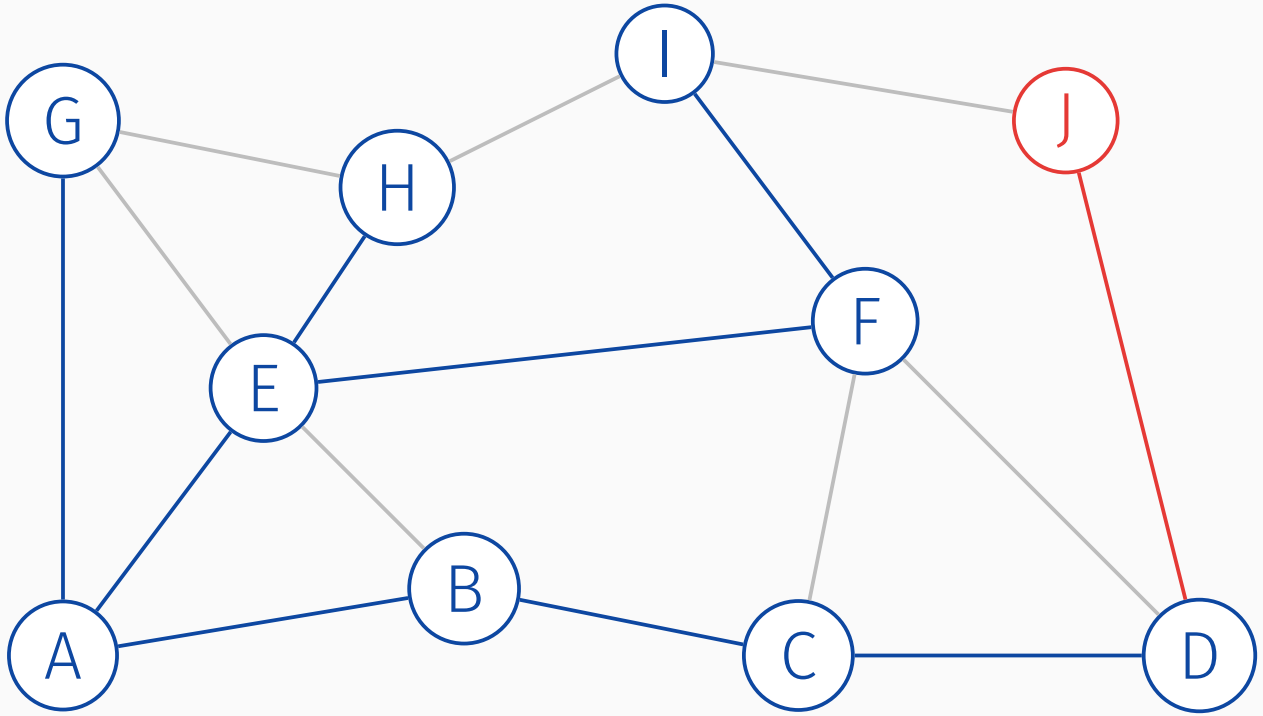
Průchod grafem do šířky, krok 29



Q | J |

v	$d[v]$	$\pi[v]$
A	0	/
B	1	A
C	2	B
D	3	C
E	1	A
F	2	E
G	1	A
H	2	E
I	3	F
J	4	D

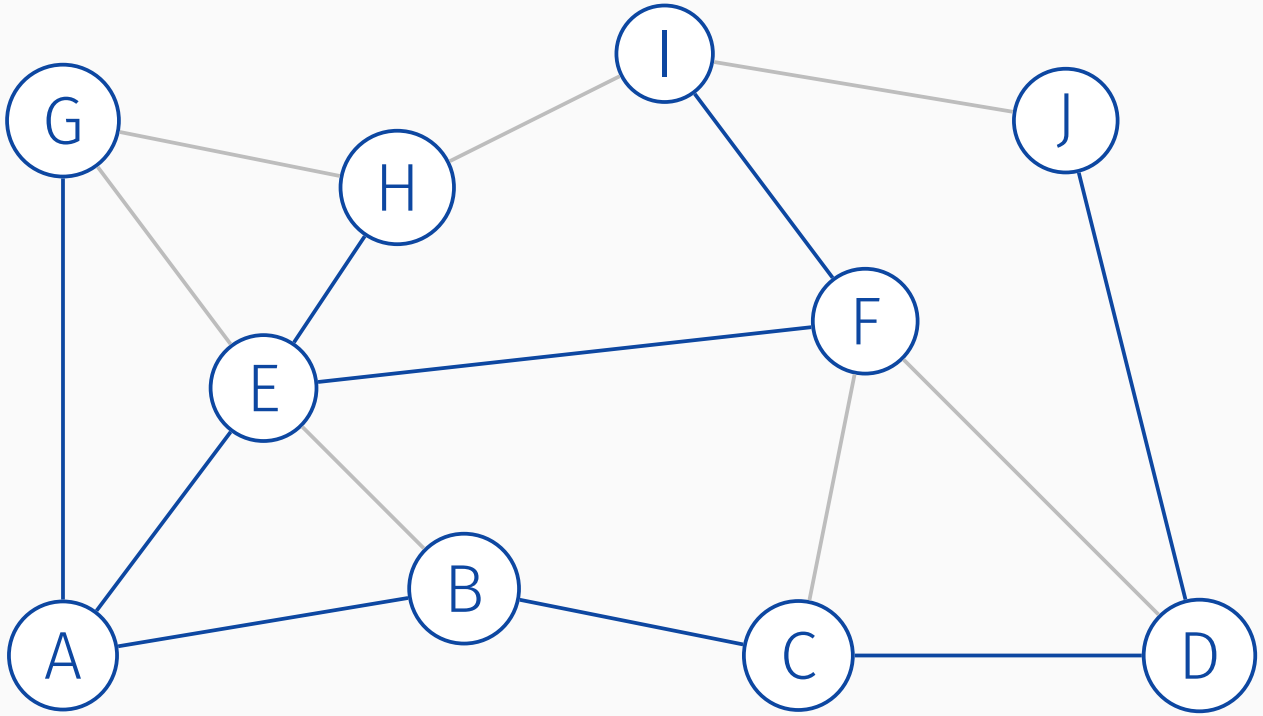
Průchod grafem do šířky, krok 30



Q

v	$d[v]$	$\pi[v]$
A	0	/
B	1	A
C	2	B
D	3	C
E	1	A
F	2	E
G	1	A
H	2	E
I	3	F
J	4	D

Průchod grafem do šířky, krok 31



Q

v	$d[v]$	$\pi[v]$
A	0	/
B	1	A
C	2	B
D	3	C
E	1	A
F	2	E
G	1	A
H	2	E
I	3	F
J	4	D

Průchod grafem do hloubky a do šířky

Animace

K oběma algoritmům průchodu grafem jsou dostupné dvě animace:

- vyhledání cesty v bludišti a
- aplikace v počítačové grafice – vyplňování oblasti.

Animace jsou k dispozici animace v samostatných souborech.

Zdroje pro samostatné studium

- Strategie řešení problémů hrubou silou
  - kniha [2], kapitola 3, strany 97 – 98
- Třídění výběrem
  - kniha [2], kapitola 3.1, strany 98 – 100
- Bublinové třídění
  - kniha [2], kapitola 3.1, strany 100 – 101
- Třídění přetřásáním
  - kniha [4], kapitola 4, strany 78 – 79
- Sekvenční vyhledávání
  - kniha [2], kapitola 3.2, strany 104 – 104
- Vyhledávání podřetězce hrubou silou
  - kniha [2], kapitola 3.2, strany 105 – 106

Zdroje pro samostatné studium (pokrač.)

- Problém nejbližší dvojice bodů
  - kniha [2], kapitola 3.3, strany 108 – 109
- Konvexní obal množiny
  - kniha [2], kapitola 3.3, strany 109 – 113
- Úplné prohledávání
  - kniha [2], kapitola 3.4, strany 115
- Problém obchodního cestujícího
  - kniha [2], kapitola 3.4, strany 116
- Problém batohu
  - kniha [2], kapitola 3.4, strany 116 – 117
- Průchod grafem do hloubky
  - kniha [2], kapitola 3.5, strany 122 – 125
- Průchod grafem do šířky
  - kniha [2], kapitola 3.5, strany 125 – 128

Děkuji za pozornost