Okruh č.9: sémantické metody dokazování v PL1

Pomocí metody *Vennových diagramů* a *relačních struktur* vytváříme grafický model situace, která je úsudkem vyjádřena. Ověřujeme, zda náš graficky znázorněný model vyjadřuje tu skutečnost, že závěr je pravdivý za všech okolností, za kterých jsou předpoklady pravdivé. Tedy závěr je pravdivý ve všech modelech předpokladů. (Pozn. Srovnej co je to **model formule**, předpoklad je pochopitelně premisa, tedy formule PL1, viz okruh č. 3)

Tradiční Aristotelova logika

Tradiční Aristotelova logika je fragment predikátové logiky 1. řádu, který je omezen pouze na jednomístné predikáty. Tato logika byla (v podstatě jako jediná) vyučována ještě v 19. století. Umožňuje kontrolovat správnost zvláštního typu jednoduchého úsudku, který se nazývá ***kategorický sylogismus***. Tyto úsudky zkoumal před více než 2000 lety řecký filosof a zakladatel logiky Aristoteles. Aristotelova logika vznikla kupodivu dříve než výroková logika, kterou zkoumali *stoici.*

Aristotelova logika zkoumá tzv. ***subjekt – predikátové* výroky** (S-P výroky), kde S i P jsou nějaké vlastnosti (formalizované jako predikáty). Tyto výroky dělí na obecné a částečné, kladné a záporné.
SaP – Všechna S jsou P
SeP – Žádné S není P
SiP – Některá S jsou P
SoP – Některá S nejsou P
Význam zkratek je odvozen z latinského ***a****ff****i****rmo* (tvrdím) a *n****e****g****o*** (popírám).

Platnost Aristotelových sylogismů ověřujeme na základě metody Vennových diagramů, která vychází z naivní teorie množin.
Obory pravdivosti predikátů S, P, M zakreslíme jako (vzájemně se protínající) množiny. Poté znázorníme situaci, kdy jsou premisy pravdivé, tj.

1) Vyšrafujeme plochy, které odpovídají prázdným třídám objektů
2) Označíme křížkem plochy, které jsou jistě neprázdné (křížek přitom klademe jen tehdy, když neexistuje jiná plocha, "kam by mohl přijít")

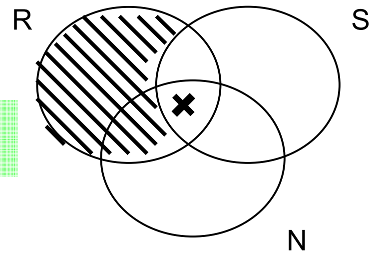
Nakonec ověříme, zda vzniklá situace znázorňuje pravdivost závěru.
Jinými slovy ověřujeme, zda při předpokladu pravdivosti premis se za žádných okolností nestane, aby závěr nebyl pravdivý. To je totiž jediná situace, kdy by úsudek byl neplatný. Viz definice logic.
vyplývání

Příklady:

- Všechny rodinné domy jsou soukromým vlastnictvím — $\forall x\,[R(x) \supset S(x)]$
- Některé nemovitosti jsou rodinné domy — $\exists x\,[N(x) \wedge R(x)]$

Z: Některé nemovitosti jsou soukromým vlastnictvím — $\exists x\,[N(x) \wedge S(x)]$

Dle 1. premisy je prázdná množina R / S



Dle druhé premisy je neprázdný průnik R a N – uděláme křížek

Důležité je ***pořadí***: ***nejdřív vyškrtáme*** *prázdné plochy*, ***pak klademe křížek***

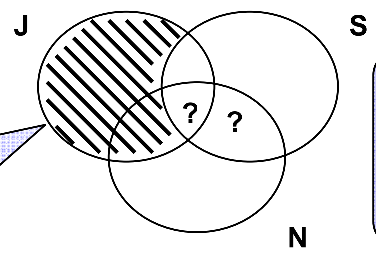
.

Všichni jezevci jsou sběratelé umění — $\forall x\,[J(x) \supset S(x)]$

Někteří sběratelé umění žijí v norách — $\exists x\,[S(x) \wedge N(x)]$

Z: Někteří jezevci žijí v norách — $\exists x\,[J(x) \wedge N(x)]$

Dle 1. premisy neexistuje jezevec, který není sběratel - šrafujeme



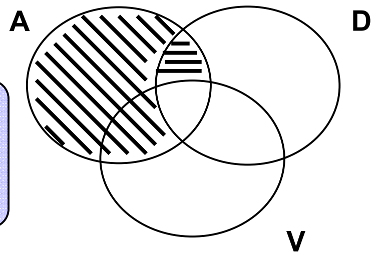
Jak však znázorníme pravdivost 2. premisy? Průnik S a N je neprázdný, ale nevíme, kam dát křížek!

Úsudek je neplatný

- Všechna auta jsou dopravní prostředky $\forall x\,[A(x) \supset D(x)]$
- Všechna auta mají volant $\forall x\,[A(x) \supset V(x)]$

Z: Některé dopravní prostředky mají volant $\exists x\,[D(x) \wedge V(x)]$

1. Premisa - Plocha A musí být podmnožinou plochy D: šrafujeme



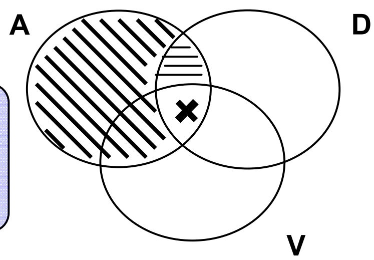
Dle 2. premisy je plocha A podmnožinou plochy V: šrafujeme

Vyhodnotíme závěr: pravdivost není zaručena, křížek v průniku D a V není! ***Úsudek je neplatný***

- Všechna auta jsou dopravní prostředky $\forall x\,[A(x) \supset D(x)]$
- Všechna auta mají volant $\forall x\,[A(x) \supset V(x)]$
- Existují auta (implicitní předpoklad) $\exists x\, A(x)$

Z: Některé dopravní prostředky mají volant $\exists x\,[D(x) \wedge V(x)]$

1. Premisa - Plocha A musí být podmnožinou plochy D: šrafujeme



Dle 2. premisy je plocha A podmnožinou plochy V: šrafujeme

Dle 3. premisy uděláme křížek na plochu A

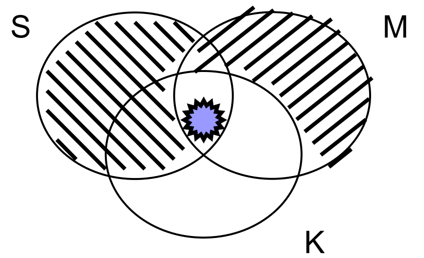
Vyhodnotíme závěr: pravdivost je zaručena, křížek v průniku D a V je, ***úsudek je platný***

p_1: Všichni studenti umějí logicky myslet. $\forall x\,[S(x) \supset M(x)]$

p_2: Pouze koumáci umějí logicky myslet. $\forall x\,[M(x) \supset K(x)]$

--- ----------------------

z: Všichni studenti jsou koumáci. $\forall x\,[S(x) \supset K(x)]$



Nyní otestujeme, zda nevyšrafované oblasti vystihují náš závěr.

Závěr říká, že všechny prvky ležící v množině S leží taktéž v množině K. To opravdu podle diagramu platí, tedy úsudek je **PLATNÝ.**

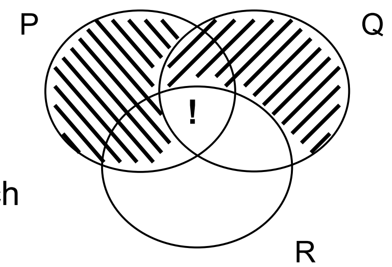
p_1: Všichni studenti logiky se učí logicky myslet. $\forall x\,[P(x) \supset Q(x)]$

p_2: Kdo se učí logicky myslet, ten se neztratí. $\forall x\,[Q(x) \supset R(x)]$

----

z: Někteří studenti logiky se neztratí. $\exists x\,[P(x) \wedge R(x)]$

Poznámka:
V tradiční Aristotelově logice je tento úsudek považován za platný. Avšak, ze všeobecných premis nemůžeme usuzovat na existenci! Nezapomeňte však, že dle Aristotela jsou zde všechny pojmy ***neprázdné.***



Nyní otestujeme, zda je opravdu úsudek platný či nikoliv.

Závěr říká, že existuje prvek v průniku množin P a R. Diagram ale toto nepotvrzuje (není křížek), proto úsudek je **NEPLATNÝ.**

Aristotelova logika předpokládá, že každý pojem (predikát) použitý v sylogismu je neprázdný, tedy že existuje aspoň jedno individuum daného universa, které má danou vlastnost vyjádřenou predikátem.

Relační struktury

Sémantické ověření správnosti úsudku je v predikátové logice rovněž obtížnější než ve VL. Podle definice je úsudek správný, pokud je závěr pravdivý ve všech modelech předpokladů. Problémem v PL^1 je ovšem to, že takovýchto modelů je obecně nekonečně mnoho. Přesto je možno sémanticky ověřit platnost úsudku, a to přímo, nebo nejčastěji sporem (předpokládáme, že může nastat případ, kdy v nějaké interpretaci budou předpoklady pravdivé a závěr nepravdivý a ukážeme, že to možné není).

a) Marie má ráda pouze vítěze.
Karel je vítěz.

Marie má ráda Karla.

$\forall x\ [R(M,x) \supset V(x)]$
$V(K)$

$R(M,K)$

Aby byly předpoklady pravdivé, pak možné interpretace nad množinou individuí D musí mít tvar:

M_D : Marie, K_D : Karel (<u>Pozor</u>! realizací těchto konstant mohou být kterékoli jiné prvky D, třeba α, β, avšak celková úvaha se tím nijak nemění.)
$R_D \subset D \times D$: {… <Marie, i_1>, <Marie, i_2>, …, <Marie, i_n> …}
$V_D \subset D$: {…i_1, i_2, …, Karel,…, i_n…}

Vidíme, že závěr nevyplývá, neboť není zaručeno, že relace R_D bude obsahovat dvojici <Marie, Karel>.

Úsudek ilustruje poměrně častou chybu, které se můžeme v argumentaci dopustit. Z platnosti nutné podmínky nějakého tvrzení usuzujeme na pravdivost tohoto tvrzení. V našem příkladě je podmínka "být vítězem" pouze ***nutná***, ne však ***dostatečná*** pro to, aby Marie měla dané individuum ráda (vítězové tedy mohou být i taková individua, která Marie nemá ráda).

b) Marie má ráda pouze vítěze.
Karel není vítěz.

Marie nemá ráda Karla.

$\forall x\ [R(M,x) \supset V(x)]$
$\neg V(K)$

$\neg R(M,K)$

Aby byly předpoklady pravdivé, pak možné interpretace nad množinou individuí D musí mít tvar:

$R_D \subset D \times D$: $\{\dots <\text{Marie}, i_1>, <\text{Marie}, i_2>, \dots, <\text{Marie}, i_n> \dots\}$

$V_D \subset D$: $\{\dots i_1, i_2, \dots, \cancel{\text{Karel}}, \dots, i_n \dots\}$ – individuum Karel neleží v množině V_D,

tedy Karel se nerovná žádnému z individuí i_1, $i_2,\dots,i_n$, které jsou v relaci R_D s individuem Marie.

Vidíme, že závěr vyplývá, neboť je zaručeno, že relace R_D nemůže obsahovat dvojici <Marie, Karel>.

Kdo zná Marii i Pavla, ten Marii lituje.
Někteří nelitují Marii, ačkoliv ji znají.

Někdo zná Marii, ale ne Pavla.

$\forall x\ ([Z(x,M) \wedge Z(x,P)] \supset L(x,M))$
$\exists x\ [\neg L(x,M) \wedge Z(x,M)]$

$\exists x\ [Z(x,M) \wedge \neg Z(x,P)]$

Provedeme důkaz sporem, tedy budeme předpokládat, že nastane v nějaké interpretaci případ, kdy jsou předpoklady pravdivé a závěr nepravdivý, tedy je pravdivá formule $\forall x\ [Z(x,M) \supset Z(x,P)]$.

Aby byly předpoklady pravdivé, pak možné interpretace nad množinou individuí D musí mít tvar:

$Z_D \subset D \times D$: $\{\dots <i_1,\text{Marie}>, <i_2,\text{Marie}>, \dots, <i_n,\text{Marie}>, \dots, <\alpha,\text{Marie}>$
$<i_1,\text{Pavel}>, <i_2,\text{Pavel}>, \dots, <i_n,\text{Pavel}> \dots\}$

c) $L_D \subset D \times D$: $\{\dots <i_1,\text{Marie}>, <i_2,\text{Marie}>, \dots, <i_n,\text{Marie}>, \dots, \cancel{<\alpha,\text{Marie}>} \dots\}$

První předpoklad tvrdí, že všechna individua, která jsou v relaci Z_D s individui Marie i Pavel, nechť to jsou i_1, $i_2,\dots,i_n$, jsou také v relaci L_D s individuem Marie.

Dle druhého předpokladu existuje nějaké individuum, nechť je to α, které je v relaci Z_D spolu s Marií, ale tato dvojice není v relaci L_D. Tedy α nemůže být jedno z individuí $i_1,\dots,i_n$.

Je-li nyní pravdivá formule $\forall x\ [Z(x,M) \supset Z(x,P)]$, pak to znamená, že všechna taková individua i_j, která tvoří dvojici $<i_j,\text{Marie}>$ v Z_D (tj. také individuum α), musí tvořit dvojici $<i_j,\text{Pavel}>$, která rovněž leží v Z_D. To však není možné, protože $<\alpha,\text{Pavel}>$ neleží v Z_D.