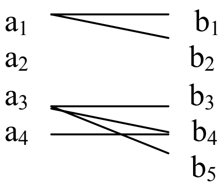
RELACE, ZOBRAZENÍ, FUNKCE

Relace R nad množinami A, B je podmnožina kartézského součinu: $R \subseteq A \times B$

Kartézský součin $A \times B$ je množina všech uspořádaných dvojic $\langle a, b \rangle$, kde $a \in A$, $b \in B$
Př.: kartézský součin množin A = $\{a_1, a_2, \ldots, a_4\}$, B = $\{b_1, b_2, \ldots, b_5\}$
se rovná:

$$A \times B = \{<a_1, b_1>, <a_1, b_2>, <a_1, b_3>, <a_1, b_4>, <a_1, b_5>, <a_2, b_1>, <a_2, b_2>, <a_2, b_3>, <a_2, b_4>, <a_2, b_5>, \ldots, <a_4, b_5>\}$$



Relace je podmnožinou kartézského součinu AxB

$R \subseteq A \times B = \{<a_1, b_1>, <a_1, b_2>, <a_3, b_3>, <a_3, b_4>, <a_3, b_5>, <a_4, b_5>$

Pozor:
dvojice $\langle a,b \rangle \neq \langle b,a \rangle$, ale množina $\{a,b\} = \{b,a\}$
$\langle a,a \rangle \neq \langle a \rangle$, ale $\{a,a\} = \{a\}$
U *n-tic* **záleží na pořadí**, prvky se mohou opakovat, na rozdíl od množin
Notace: $\langle a,b \rangle \in R$ značíme také prefixně R(a,b), nebo infixně a R b. Např. $1 \leq 3$.

Příklad: Relace na N
$\{\langle\langle 1,1\rangle,1\rangle, \langle\langle 2,1\rangle,2\rangle, \langle\langle 2,2\rangle,1\rangle, \ldots, \langle\langle 4,2\rangle,2\rangle, \ldots, \langle\langle 9,3\rangle,3\rangle, \ldots, \langle\langle 27,9\rangle,3\rangle, \ldots\}$
je parciální funkce *dělení* beze zbytku.
Také relace *minus na N* je na N parciální funkcí: např. dvojice $\langle 2,4 \rangle$ nemá v N obraz. Aby byla totální, museli bychom rozšířit její definiční obor na celá čísla.

Základní vlastnosti binárních relací:

a) Relace R je ***reflexivní***: Každý prvek je v relaci sám se sebou.

   $\forall x\, (R(x,x))$

   (Relace R je ***ireflexivní***: $\forall x\, (\neg R(x,x))$)

b) Relace R je ***symetrická***: Je-li první v relaci s druhým, pak druhý je v relaci s prvním.

   $\forall x \forall y\, [R(x,y) \supset R(y,x)]$

c) Relace R je ***anti-symetrická***: Je-li první v relaci s druhým a druhý je v relaci s prvním, pak první je identický s druhým.

   $\forall x \forall y\, [(R(x,y) \wedge R(y,x)) \supset x=y]$

d) Relace R je ***asymetrická***: Je-li první v relaci s druhým, pak druhý není v relaci s prvním: $\forall x \forall y\, [R(x,y) \supset \neg R(y,x)]$

e) Relace R je ***transitivní***: Je-li první v relaci s druhým a druhý v relaci s třetím, pak první je v relaci s třetím.

$\forall x \forall z \forall y \, [(R(x,y) \wedge R(y,z)) \supset R(x,z)]$

$\forall x \forall z \forall y \, [R(x,y) \supset (R(y,z) \supset R(x,z))]$

f) Relace R je ***cyklická***: Je-li první v relaci s druhým a druhý se třetím, pak třetí je v relaci s prvním.

$\forall x \forall z \forall y \, [(R(x,y) \wedge R(y,z)) \supset R(z,x)]$

g) Relace R je (***lineární***) ***souvislá***: Je-li první v relaci se druhým nebo je druhý v relaci s prvním nebo jsou identické.

$\forall x \forall y \, [R(x,y) \vee R(y,x) \vee x=y]$

Zobrazení (**parciální**) f z množiny A do množiny B je binární relace [$f \subseteq A \times B$] o níž platí, že každému prvku $a \in A$ je přiřazen ***nejvýše jeden*** prvek $b \in B$, že $<a, b> \in f$, zapisuje se často $b = f(a)$

F: $A \to B$ (zobrazení F z množiny A do množiny B)

$\forall a \forall b \, \forall c \; [(b = f(a) \wedge c = f(a)) \supset (b = c)]$ - **zobrazení je *zprava jednoznačné***

vzor (def.obor) — obraz (obor hodnot)

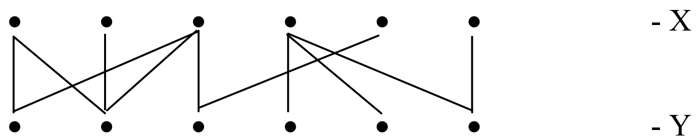
a_1 — b_1, b_2 není zobrazení, není zprava jednoznačné

---

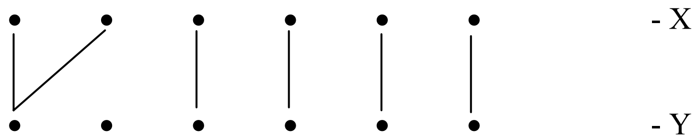
a_1, a_2, a_3 — b_1, b_2, b_3 je zobrazení, zobrazení je zprava jednoznačné

$F(a_1) = b_1$, $F(a_2) = b_1$, $F(a_3) = b_3$

RELACE: X,Y



ZOBRAZENÍ: $X \to Y$



Relace R je zobrazení ... iff $\forall x \forall y_1 \forall y_2$ [($R(x,y_1) \wedge R(x,y_2)$) $\supset y_1=y_2$)]

•***<u>Funkce (zobrazení)</u>***

Říkáme, že na <u>množině</u> <u>čísel</u> M je definovaná **funkce**, je-li dán předpis, podle kterého je každému *x* náležícímu do množiny *M* přiřazeno právě jedno číslo *y*.
Značíme: $\boldsymbol{y = f(x)}$.
<u>Proměnnou</u> *x* označujeme jako *argument funkce* (*nezávisle proměnná*). Proměnná *y* je *závisle proměnná*.
M nazýváme <u>definičním oborem</u> funkce. Pokud není při zadání funkce uveden definiční obor, pak se za definiční obor obvykle považuje množina všech nezávisle proměnných, pro něž má funkce smysl.
Množinu všech čísel $f(x)$, takových, že $x \in M$, nazýváme <u>oborem hodnot</u> dané funkce.

Parciální funkce je tedy **zobrazení**: ke každé *n-tici* prvků <u>a</u>∈$\underbrace{M \times \ldots \times M}_{n\,\text{x}}$ existuje *nanejvýš jeden* prvek b∈M.
Značíme F: M ×...× M → M, místo F(<u>a</u>,b) píšeme F(<u>a</u>)=b.
Množinu M ×...× M nazýváme *definiční obor (doména)* funkce F, množinu M pak *obor hodnot (range)*.

V PL1 používáme jako interpretaci funkčních symbolů formulí pouze **totální** funkce:
ke každému prvku a ∈ A existuje ***právě jeden*** prvek b ∈ B.
$\forall a\, \exists b\, [F(a) = b] \wedge \forall a \forall b\, \forall c\, [((f(a) = b) \wedge (f(a) = c)) \supset (b = c)]$

Surjekce, injekce, bijekce (typy zobrazení, resp. funkcí)

Základními vlastnostmi zobrazení je surjektivnost, injektivnost a bijektivnost:

- Zobrazení f : A → B je ***surjekce*** (zobrazení A *na* B), jestliže k libovolnému $b \in$ B existuje $a \in$ A takový, že $f(a)=b$.
  - $\forall b\, [B(b) \supset \exists a\, (A(a) \wedge f(a)=b)]$.

- Zobrazení f : A → B je ***injekce*** (*prosté* zobrazení A *do* B), jestliže pro všechna $a \in$A, $b \in$A taková, že $a \neq b$ platí, že $f(a) \neq f$(b).
  - $\forall a\, \forall b\, [(A(b) \wedge A(a) \wedge (a \neq b)) \supset (f(a) \neq f(b))]$.

- Zobrazení f : A → B je ***bijekce*** (*prosté* zobrazení A *na* B), jestliže f je surjekce a injekce. Existuje-li mezi množinami A, B bijekce, pak říkáme, že mají stejnou *kardinalitu* (počet prvků).

■ Příklad: