NAIVNÍ TEORIE MNOŽIN, okruh č. 5

Definování množiny a jejích prvků

Množina je souhrn nějakých věcí. Patří-li věc do množiny X, říkáme, že v ní leží, že je jejím prvkem nebo že množina X tuto věc obsahuje. V takovém případě píšeme $x \in X$. V opačném $x \notin X$.

Zápis množiny:

- 1. výčtem prvků
- 2. charakteristickou vlastností (podmínkou), týkající se všech jejích prvků

Množina je jednoznačně určena, jsou-li jednoznačně určeny její prvky.

Množinu s prvky a, b, c značíme: $\{a,b,c\}$

Prvkem množiny může být opět množina, případně uspořádaná n-tice, kdy na pořadí jejích členů záleží.

Množina, neobsahující žádný prvek, se nazývá prázdná a značí $\emptyset$.

Př.množin: $\emptyset$ - prázdná množina, $\{a,b\}$ - množina obsahující prvky a a b, $\{\{a,b\}\}$- množina obsahující jako svůj prvek množinu s prvky a a b, $\{a,\{a,b\}\}$ - množina obsahující dva prvky: 1. a a 2. množinu s prvky a a b, $\{\emptyset\}$ - množina obsahující jako svůj prvek prázdnou množinu, $\{\{\emptyset\}\}$ - množina obsahující jako svůj prvek množinu obsahující prázdnou množinu, $\{<a,b>,<b,a>,<c,a>\}$ - množina obsahující jako své prvky uspořádanou dvojici a,b, uspořádanou dvojici b,a, uspořádanou dvojici c,a

ad. 2.)

Množina všech prvků množiny X, které mají vlastnost P, se značí takto:

$\{x \in X \mid P\}$.

Př.: $\{<x,y> \mid x,y \in N, 0 \leq x < 2 \text{ a } 0 \leq y \leq 1\})$

Tato podmínka určuje následující množinu uspořádaných n-tic, resp.dvojic: {[0,1], [1,1], [0,0]}

Ve výrazu $\{x \in X \mid P\}$ nám nic nebrání zvolit za P vlastnost, kterou žádný prvek z X nemá. Tímto způsobem definujeme prázdnou množinu.

Například:

$\emptyset = \{x \in X \mid x \neq x\}$

Princip extensionality: množiny jsou identické právě když mají stejné prvky

$\{a,b\}=\{a,b\}=\{a,b,a\}$, ale $\{a,b\}\neq\{\{a,b\}\}\neq\{a,\{a,b\}\}$

Vztahy mezi množinami:

Množina A je **podmnožinou** množiny B, značíme: $A \subseteq B$, právě když každý prvek A je také prvkem B: $\forall x\ [x \in A \Rightarrow x \in B]$.

Pro všechny prvky platí, že jestliže prvek leží v množině A, pak leží v množině B. Čili za žádných okolností se nestane, aby prvek, který leží v množině A, neležel také v B.

Vyjádřeno jazykem PL1: $\boldsymbol{\forall x\ [A(x) \supset B(x)]}$

Množina A se **rovná** množině B, právě když mají identické prvky, to jest, když všechny prvky náležící množině A náleží také množině B a naopak, tj. všechny prvky náležící množině B náleží také množině A.

Platí: A=B právě tehdy, když $A \subseteq B$ a $B \subseteq A$.

Vyjádřeno jazykem PL1: $\boldsymbol{\forall x\ [(A(x) \supset B(x)) \wedge (B(x) \supset A(x))] \Leftrightarrow}$

$\boldsymbol{\Leftrightarrow \forall x\ [A(x) \supset B(x)] \wedge \forall x\ [B(x) \supset A(x)]}$

Množina A je **vlastní podmnožinou** množiny B, značíme: $A \subset B$, právě když každý prvek A je také prvkem B a ne naopak.
Platí $A \subset B$, právě když $A \subseteq B$ a $A \neq B$
Vyjádřeno jazykem PL1: $\forall \mathbf{x}\ [(\mathbf{A(x)} \supset \mathbf{B(x)}] \wedge \exists \mathbf{x}\ [\mathbf{B(x)} \wedge \neg \mathbf{A(x)}]$

Př.:
Mějme tyto dvě množiny:A={[a,b],[a,c], B={[b,a],[a,c]}
Platí, že A≠B, neboť nemají stejné prvky. ($[a,b] \neq [b,a]$)
Mějme tyto dvě množiny:A={[a,b],[b,a], B={[b,a],[a,b]}
Platí, že A=B, neboť mají stejné prvky. Na pořadí prvků u zápisu množiny nezáleží.

<u>**Význačné číselné množiny a jejich označení:**</u>

N…množina přirozených čísel (celých kladných)
Z…množina celých čísel (Z^+ - celých kladných, platí Z^+=N, Z^- - celých záporných)
Q…množina racionálních čísel (dají se vyjádřit ve tvaru zlomku)
I... množina iracionálních čísel (e, π)
R...množina reálných čísel
C...množina komplexních čísel
Platí následující inkluze (vztah "býti podmnožinou"): $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$

Mohutnost, spočetné a nespočetné množiny
Řekneme, že množiny A a B mají stejný počet prvků (jsou ekvipotentní), jestliže existuje bijekce množiny A na B. Prvky obou množin tedy lze vzájemně jednoznačné přiřadit.
Počet prvků dané množiny nazýváme *mohutnost* (*kardinální číslo*, *kardinalita*) množiny A, značíme |A|.
Př.: $|\{a,b,c\}| = 3$, $|\emptyset| = 0$
Množina se nazývá *spočetná*, je-li ekvipotentní s množinou všech přirozených čísel.
Př.: Množina sudých čísel S je spočetná.
Množina všech přirozených čísel je nekonečná.
Množina, která není konečná ani spočetná, se nazývá nespočetná, př: nejmenší z nich je množina racionálních čísel, R. (Již v intervalu <0,1> je reálných čísel více než je všech přirozených, ale stejně mnoho jako všech R.)
Mohutnost množiny všech přirozených čísel se značí $\aleph_0$(čti alef nula).

Množinové operace – operace, které vytvářejí z množin nové množiny

a. Sjednocení množin A a B. $(A \cup B)$
   Množina prvků, které patří do množiny A *nebo* do množiny B.
b. Průnik množin A a B. $(A \cap B)$
   Množina prvků, které patří do množiny A *a zároveň* do množiny B.
c. Rozdíl množin A a B. $(A \setminus B)$
   Množina prvků, které patří do množiny A *a nepatří* do B.
d. Doplněk množiny A vzhledem k množině M. $\overline{A}$ vzhledem k M, com-A $\cap$ M
   Množina prvků množiny M, které *nepatří* do množiny A.

e. Potenční množina množiny A. $P(A)$ (neboli 2^A)
   Množina *všech podmnožin* množiny A.

Př.: $2^{\{a,b\}} = \{\Phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$
$2^{\{a,b,c\}} = \{\Phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$
Kolik prvků má množina 2^A ? Je-li |A| počet prvků (kardinalita) množiny A, pak 2^A má $2^{|A|}$ prvků (proto takové značení).
Platí: $\bigcap A_i = \Phi$, kde A_i je prvkem P(*A*), neboli $A_i \in 2^A$.
(Pokud provedeme operaci průniku přes všechna prvky potenční množiny, dostaneme prázdnou množinu, protože:
- potenční množina množiny A je definována jako množina všech podmnožin množiny A, pak obsahuje i prázdnou množinu (neboť prázdná množina je podmnožinou každé množiny). Tedy průnik všech prvků z P(A) musí být prázdný, neboť průnik jakékoliv množiny s prázdnou množinou je vždy prázdná množiny, důkaz viz dále.

<u>Důležité vztahy a jejich důkazy</u>: (Pokud je dokázáno přímým i nepř. důkazem, stačí znát pouze jeden typ důkazu)

Z definice podmnožiny okamžitě plyne, **že každá množina je svou podmnožinou** (skutečně, každý prvek množiny *X* je prvkem množiny *X*).

Prázdná množina je podmnožinou každé množiny.
Za žádných okolností se totiž nestane, aby existoval prvek, který by ležel v prázdné množině (neboť prázdné množině z definice žádný prvek nenáleží). Tedy nikdy nenastane situace, která by popřela tvrzení, že prázdná množina je podmnožinou každé množiny, tj. že by existoval prvek v prázdné množině a zároveň by neležel v množině, jejíž je tato podmnožinou.

Jestliže A = ∅ pak (A ∩ B) = ∅ pro libovolnou množinu B.

Přímý důkaz
Jestliže A je prázdná, pak neobsahuje žádný prvek. Do průniku množin A a B patří právě ty prvky, které patří do A i B. Tedy tam nepatří žádný prvek.

$$A = \Phi \Rightarrow \neg\exists x \in A \Rightarrow \neg\exists x \in (A \cap B) \Rightarrow (A \cap B) = \Phi$$

Nepřímý důkaz (předpoklad: množina A je prázdná, ale průnik množin A a B je neprázdný)
Pokud je průnik množin A a B neprázdný, pak nutně existuje prvek, který leží v množině A i B, tedy množina A je neprázdná – SPOR

$$(A \cap B) \neq \Phi \Rightarrow \exists x \in (A \cap B) \Rightarrow \exists x[x \in A \wedge x \in B] \Rightarrow A \neq \Phi - SPOR$$

Když A = ∅ a B = ∅, pak A ∪ B = ∅

Přímý důkaz
Jestliže jsou obě množiny A i B prázdné, pak neobsahují žádné prvky. Takže jejich sjednocení nebude obsahovat taktéž žádné prvky. Množina, která neobsahuje žádné prvky, je prázdná množina. Proto $(A \cup B) = \Phi$.

$$(A = \Phi \wedge B = \Phi) \Rightarrow (\neg \exists x \in A \wedge \neg \exists x \in B) \Rightarrow \neg \exists x \in (A \cup B) \Rightarrow (A \cup B) = \Phi$$

Nepřímý důkaz (předpoklad: množiny A i B jsou prázdné, ale jejich sjednocení je neprázdné)
Pokud je sjednocení množin A a B neprázdné, potom existuje prvek, který leží v množině A nebo v množině B – SPOR.

$$\exists x \in (A \cup B) \Rightarrow \exists x[x \in A \vee x \in B] \Rightarrow (A \neq \Phi \vee B \neq \Phi) \Rightarrow SPOR$$

Přímý důkaz
Jestliže A je prázdná, pak neobsahuje žádný prvek. Do průniku množin A a B patří právě ty prvky, které patří do A i B. Tedy tam nepatří žádný prvek.

$$A = \Phi \Rightarrow \neg \exists x \in A \Rightarrow \neg \exists x \in (A \cap B) \Rightarrow (A \cap B) = \Phi$$

Nepřímý důkaz (předpoklad: množina A je prázdná, ale průnik množin A a B je neprázdný)
Pokud je průnik množin A a B neprázdný, pak nutně existuje prvek, který leží v množině A i B, tedy množina A je neprázdná – SPOR

$$(A \cap B) \neq \Phi \Rightarrow \exists x \in (A \cap B) \Rightarrow \exists x[x \in A \wedge x \in B] \Rightarrow A \neq \Phi - SPOR$$

Jak již bylo uvedeno, množina je jednoznačně určena svými prvky. Proto platí i že **z $A \supset B$ a současně $B \supset A$ plyne $A = B$** .

Přímý důkaz
Jestliže všechny prvky ležící v množině A leží v množině B a zároveň všechny prvky množiny B leží v množině A, pak neexistuje prvek, který by ležel v množině A a neležel v množině B. Taktéž neexistuje prvek, který by ležel v množině B a neležel v množině A. Takže $A = B$.

$$\left.\begin{aligned} &\forall x(x \in A \Rightarrow x \in B) \\ &\forall x(x \in B \Rightarrow x \in A) \end{aligned}\right\} \Rightarrow A, B \text{ mají stejné prvky}$$

Nepřímý důkaz (předpoklad: množiny A a B se nerovnají, ale platí, že $A \subseteq B$ a $B \subseteq A$)
Jestliže množiny A a B jsou různé, pak můžou nastat dvě situace:
1) existuje prvek, který je v A a není v B, potom ale není pravda, že $A \subseteq B$, což je spor

$\exists x(x \in A \wedge x \notin B) \Rightarrow \neg(A \subseteq B) \Rightarrow SPOR$

2) existuje prvek, který je v B a není v A, potom ale není pravda, že $B \subseteq A$, což je spor

$\exists x(x \in B \wedge x \notin A) \Rightarrow \neg(B \subseteq A) \Rightarrow SPOR$

Platí A ⊆ B právě když (A ∪ B) = B, právě když (A ∩ B) = A.

A ⊆ (A∪B)

Přímý důkaz

Sjednocení množin A a B nám vytvoří množinu prvků ležících v množině A nebo v množině B, tedy všechny prvky z množiny A leží v daném sjednocení. Nemůže se stát, že by existoval prvek ležící v množině A a neležící v množině $(A \cup B)$. Proto $A \subseteq (A \cup B)$.

Nepřímý důkaz (předpoklad: existuje prvek v množině A, který neleží ve sjednocení množin A a B)

Kdyby existoval prvek v množině A, který není ve sjednocení množin A a B, pak by tento prvek nesměl být ani v množině A, ani v množině B, což je spor.

$\exists x(x \in A \wedge x \notin (A \cup B)) \Rightarrow \exists x(x \in A \wedge (x \notin A \wedge x \notin B)) \Rightarrow SPOR$

(A∩B) ⊆ A

Přímý důkaz

Průnik množin A a B nám vytvoří množinu prvků ležících v množině A a zároveň v množině B. Tedy nemůže se stát, že by v průniku existoval prvek, který neleží v množině A. Proto $(A \cap B) \subseteq A$ Analogicky pro B.

Pro $\forall x \in (A \cap B)$ platí: $(x \in A \wedge x \in B) \Rightarrow \neg\exists x[x \in (A \cap B) \wedge x \notin A]$

Nepřímý důkaz (předpoklad: existuje prvek v průniku množin A a B, který neleží v množině A)

Pokud tedy existuje prvek v průniku množin A a B potom tento prvek leží v množině A a zároveň leží v množině B – SPOR

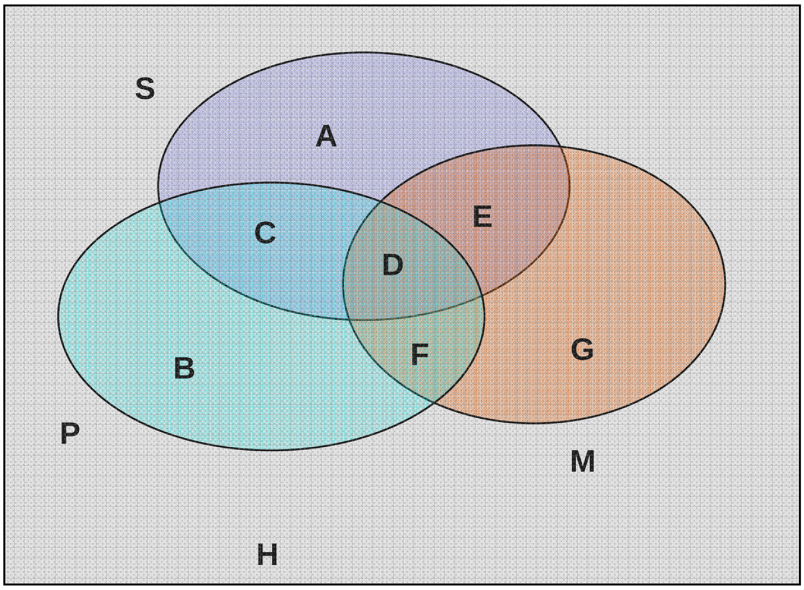
$\exists x[x \in (A \cap B) \wedge x \notin A] \Rightarrow \exists x[(x \in A \wedge x \in B) \wedge x \notin A] \Rightarrow SPOR$

UKÁZKA SOUVISLOSTI NAIVNÍ TEORIE MNOŽIN S PL_1

Na obrázku jsou znázorněny obory pravdivosti predikátů S, P, a M v universu U.

Definujte plochy A-H, a to

a. **Formulemi predikátové logiky**
b. **Množinovým zápisem**



A:

a) $S(x) \wedge \neg P(x) \wedge \neg M(x)$

b) $S \setminus (P \cup M) = (S \setminus P) \cap (S \setminus M) = S \cap \text{co-}P \cap \text{co-}M$

co-P…doplněk (komplement) množiny P

B:

a) $\neg S(x) \wedge P(x) \wedge \neg M(x)$

b) $P \setminus (S \cup M) = (P \setminus S) \cap (P \setminus M) = \text{co-}S \cap P \cap \text{co-}M$

C:

a) $S(x) \wedge P(x) \wedge \neg M(x)$

b) $(S \cap P) \setminus M = (S \setminus M) \cap (P \setminus M) = S \cap P \cap \text{co-}M$

D:

a) $S(x) \wedge P(x) \wedge M(x)$

b) $S \cap P \cap M$

E:

a) $S(x) \wedge \neg P(x) \wedge M(x)$

b) $(S \cap M) \setminus P = (S \setminus P) \cap (M \setminus P) = S \cap \text{co-}P \cap M$

F:

a) $\neg S(x) \land P(x) \land M(x)$

b) $(P \cap M) \setminus S = (P \setminus S) \cap (P \setminus S) =$ co-S $\cap$ P $\cap$ M

G:

a) $\neg S(x) \land \neg P(x) \land M(x)$

b) $M \setminus (P \cup S) = (M \setminus P) \cap (M \setminus S) =$ co-S $\cap$ co-P $\cap$ M

H:

a) $\neg S(x) \land \neg P(x) \land \neg M(x)$

b) $U \setminus (S \cup M \cup P) =$ co-S $\cap$ co-P $\cap$ co-M

U = Universum