Okruh číslo 4

Kvantifikátory a jejich zákony

De Morganovy zákony

- $\models \neg\forall x A(x) \equiv \exists x \neg A(x)$
- $\models \neg\exists x A(x) \equiv \forall x \neg A(x)$

- $\forall x\ A(x) \Leftrightarrow \neg\exists x\ \neg A(x)$
- $\exists x\ A(x) \Leftrightarrow \neg\forall x\ \neg A(x)$

Zákony distribuce kvantifikátorů

- $|= \forall x[A(x) \supset B(x)] \supset [\forall x A(x) \supset \forall x B(x)]$
- $|= \forall x[A(x) \supset B(x)] \supset [\exists x A(x) \supset \exists x B(x)]$
- $|= \forall x[A(x) \wedge B(x)] \equiv [\forall x A(x) \wedge \forall x B(x)]$
- $|= \exists x[A(x) \wedge B(x)] \supset [\exists x A(x) \wedge \exists x B(x)]$
- $|= [\forall x A(x) \vee \forall x B(x)] \supset \forall \mathrm{x}[A(x) \vee B(x)]$
- $|= \exists x[A(x) \vee B(x)] \equiv [\exists x A(x) \vee \exists x B(x)]$

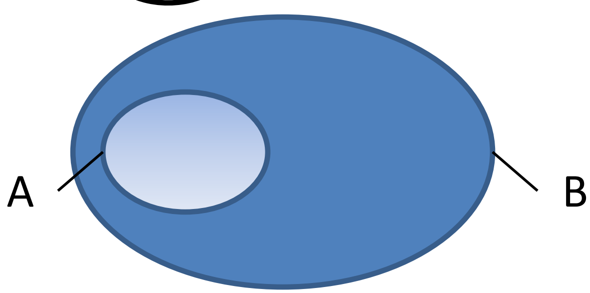
Zákony distribuce kvantifikátorů

- $|= \forall x[A(x) \supset B(x)] \supset [\forall x A(x) \supset \forall x B(x)]$

Antecedent formule říká, že $A \subseteq B$

Pak

Pokud jsou všechny prvky v množině A, pak jsou všechny prvky v množine B



Tedy jestliže $A \subseteq B$, pak jestliže jsou všechny prvky v množině A, tak jsou i v množině B

Př.: Určitě platí: Všechna přirozená čísla jsou celá, pak jestliže budou všechna čísla přirozená, tak pak budou taktéž všechna celá.

!!! Opačně implikace ale neplatí !!!

Př.: A = množina sudých čísel, B = množina lichých čísel. Pak $[\forall x A(x) \supset \forall x B(x)]$ je ***pravda***, neboť nula (rozhodně všecha čísla nejsou sudá) implikuje nulu, ale $\forall x[A(x) \supset B(x)]$ je ***nepravda*** neboť sudá čísla nejsou podmnožinou lichých.

Zákony prenexních operací

Formule A neobsahuje volnou proměnnou *x.* Přesun kvantifikátorů se řídí podle pravidla přesunu z převodu do Skolemovy klausulární formy. Tedy formule již neobsahuje implikace a ekvivalence.

- $|= \forall x[A \wedge B(x)] \equiv [A \wedge \forall x B(x)]$
- $|= \exists x[A \wedge B(x)] \equiv [A \wedge \exists x B(x)]$
- $|= \forall x[A \vee B(x)] \equiv [A \vee \forall x B(x)]$
- $|= \exists x[A \vee B(x)] \equiv [A \vee \exists x B(x)]$

Formule A neobsahuje volnou proměnnou *x* a kvantifikátor přesouváme před konsekvent implikace, pak je přesun neproblematický.

- $|= \forall x[A \supset B(x)] \equiv [A \supset \forall x B(x)]$
- $|= \exists x[A \supset B(x)] \equiv [A \supset \exists x B(x)]$

- Formule A neobsahuje volnou proměnnou *x* a kvantifikátor přesouváme před antecedent implikace, pak nejdříve eliminujeme implikaci (neboť antecedent znamená skrytou negaci – $(A \supset B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$), přesuneme kvantifikátor a pak zpětně zavedeme implikaci.
- $|= \forall x[B(x) \supset A] \equiv [\exists x B(x) \supset A]$
  - $\forall x[B(x) \supset A] \equiv \forall x[\neg B(x) \vee A] \equiv [\forall x \neg B(x) \vee A] \equiv [\neg (\exists x\, B(x)) \vee A] \equiv [\exists x B(x) \supset A]$
- $|= \exists x[B(x) \supset A] \equiv [\forall x B(x) \supset A]$
  - $\exists x[B(x) \supset A] \equiv \exists x[\neg B(x) \vee A] \equiv [\exists x \neg B(x) \vee A] \equiv [\neg (\forall x\, B(x)) \vee A] \equiv [\forall x B(x) \supset A]$

Zákony komutace kvantifikátorů

- $|= \forall x \forall y A(x,y) \equiv \forall y \forall x A(x,y)$
- $|= \exists x \exists y A(x,y) \equiv \exists y \exists x A(x,y)$
- $|= \exists x \forall y A(x,y) \supset \forall y \exists x A(x,y)$

  Poznamenejme, že obrácená implikace k implikaci 21. neplatí. O tom se můžeme přesvědčit na následujícím příkladě. Nechť *x, y* jsou proměnné probíhající množinu reálných čísel a predikát A je interpretován jako relace <. V této interpretaci je formule $\forall y \exists x A(x,y)$ pravdivá (ke každému *y* existuje *x* menší než *y*) a formule $\exists x \forall y A(x,y)$ nepravdivá (existuje *x*, které je menší než všechna *y*). Formule $\forall y \exists x A(x,y) \supset \exists x \forall y A(x,y)$ je v dané interpretaci nepravdivá a tedy to není tautologie.

- **Nechť term t je substituovatelný za proměnnou *x*:**
- $|= \forall x A(x) \supset A(x/t)$ ***zákon konkretizace*** (jestliže všechny prvky daného universa mají určitou vlastnost A, pak tuto vlastnost má i libovoný prvek označený termem *t*)

- $|= A(x/t) \supset \exists x A(x)$ ***zákon abstrakce*** (jesliže určité individuum označené termem t má vlastost A, pak určitě existuje individuum, které tuto vlastnost má)

- $|= \forall x A(x) \supset \exists x A(x)$ ***zákon partikularizace*** (jestliže všechny prvky daného universa mají určitou vlastnost A, pak určitě existuje alespoň jednen prvek, který tuto vlastnot má.