



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Úvod do logického myšlení

Marie Duží

Zpracováno za podpory projektu OP VK CZ.1.07/2.2.00/28.0216 “Logika: systémový rámec oboru v ČR a koncepce logických propedeutik pro mezioborová studia”.

Obsah

Obsah.....	2
Kapitola 1. Úvod	4
1.1. Logika.....	4
1.2. Deduktivně platné úsudky	6
1.3. Přesvědčivé (sound) deduktivní argumenty a argumenty ad absurdum	17
1.4. Induktivní / abduktivní usuzování a práce s neurčitostí	21
1.5. Cvičení	24
Kapitola 2. Formalizace znalostí.....	28
2.1. Jazyk výrokové logiky	30
2.1.1. Úvodní poznámky	30
2.1.2. Pojem funkce.....	31
2.1.3. Pravdivostní funkce.....	32
2.1.4. Jazyk výrokové logiky	35
2.1.5. Význam (sémantika) formulí výrokové logiky	37
2.1.6. Formalizace tvrzení v jazyce výrokové logiky	40
2.1.7. Platné úsudky v jazyce výrokové logiky.....	46
2.1.8. Cvičení	53
2.2. Jazyk predikátové logiky.....	56
2.2.1. Formalizace tvrzení v jazyce predikátové logiky 1. řádu.....	65
2.2.2. Sémantika formulí predikátové logiky	73
2.2.3. Platné úsudky v jazyce PL1	83
2.2.4. Cvičení.	100
Kapitola 3. Fuzzy logika	103
3.1. Jazyk fuzzy logiky.....	107

3.2. Fuzzy pravdivostní funkce	109
3.2.1. Fuzzy konjunkce	109
3.2.2. Fuzzy disjunkce	110
3.2.3. Fuzzy negace	111
3.2.4. Fuzzy výrokové algebry reálných čísel	112
3.2.5. Fuzzy implikace	114
3.3. Praktické aplikace fuzzy logiky	116
Kapitola 4. Rezoluční metoda	126
4.1. Rezoluční metoda ve výrokové logice	126
Cvičení ke kapitole 4.1	141
4.2. Obecná rezoluční metoda (predikátová logika 1. řádu)	145
4.2.1 <i>Herbrandova procedura</i>	161
4.2.2 <i>Robinsonův unifikací algoritmus</i>	163
4.2.3 <i>Základní principy logického programování</i>	172
Cvičení ke kapitole 4.2	180

Kapitola 1. Úvod

Předem, než začneme studovat logiku, měli bychom si vyjasnit předmět logiky, tj. čím se logika zabývá. Logika bývá charakterizována jako věda o správném usuzování, umění správné argumentace. Tedy logika zkoumá různé postupy odvozování závěrů z daných předpokladů a dokazování správnosti takového odvození. Nejprve proto potřebujeme definovat pojmy, se kterými budeme pracovat, jako např. „úsudek“, „argument“, „platný úsudek“, které jsou pro studium logiky zásadní.

1.1. Logika

Logika se zabývá *analýzou a vyhodnocováním úsudků*. V logice se snažíme o to, abychom objasnili, jak správně usuzovat a argumentovat, a abychom rozlišili dobré a správné způsoby usuzování čili argumentace od chybných způsobů.¹ Budeme usuzovat a vyvozovat závěry z daných předpokladů, argumentovat ve prospěch toho či onoho závěru, analyzovat správné postupy a varovat před nesprávnými. Předpoklady a příslušné závěry se mohou týkat mnoha různých oblastí. Můžeme argumentovat ve prospěch existence Boha, svobodné vůle či determinismu, obhájce argumentuje ve prospěch obžalovaného, zatímco žalobce naopak atd. Logika pro nás nebude pouze jakási irelevantní hra s podivnými symboly. Cílem je představit logiku jako užitečný nástroj pro analýzu a vyhodnocení argumentů, a důkaz jejich správnosti.

¹ V této knize budu používat termíny „úsudek“ a „argument“ téměř jako synonymní nebo alespoň pro naše účely vzájemně zaměnitelné, i když v češtině zřejmě zcela synonymní nejsou. V anglické literatuře se užívá termín „argument“. Podobně pro termíny „usuzování“ a „argumentace“.

Jistě, mohli byste si říct, že každá racionální, rozumná bytost logiku používá, aniž by k tomu potřebovala studovat zvláštní nástroj, a budete mít pravdu. Ale stejně tak jako rodilí mluvčí používají svůj mateřský jazyk, např. češtinu, zcela intuitivně, a přesto je užitečné češtinu studovat a osnovy na školách obsahují předmět „Jazyk český“, je užitečné studovat logiku a kultivovat svoji schopnost vyjadřování, komunikace a argumentace.

Jelikož je tato kniha určena především pro studenty informatiky (avšak nejen pro ně), bude nás také zajímat to, jak příslušné analýzy a důkazové postupy *automatizovat*. S trochou nadsázky by se dalo metaforicky říct, jak „naučit stroje myslet za nás“. Abychom však mohli automatizovat, musíme nejprve přesně rozumět jednotlivým výrokům, jejichž formulace v přirozeném jazyce je často nejednoznačná a vágní. Přirozenou součástí našeho výkladu bude proto také to, jak co nejpřesněji *analyzovat význam* jednotlivých tvrzení, a jak tento význam zachytit ve formálním jazyce s přesně vymezenou sémantikou.² Vždyť má-li např. programátor vytvořit korektní programový systém, který bude provádět to, co se od něj očekává, musí nejprve vědět, *co* se od tohoto systému očekává, jaké funkce má plnit, tedy porozumět přesně zadání úkolu a toto zadání dokumentovat v jednoznačném formálním jazyce.

Ačkoliv tedy byla původně logika považována především za nástroj filosofů, kteří vymýšleli různé sofistické argumenty, a dodnes je považována za součást filosofie, nachází dnes uplatnění mnohem širší, v nejrůznějších oborech, a samozřejmě také v informatice. V důsledku toho pak provádíme základní členění logiky na filosofickou a matematickou, ale hovoříme také o „logice pro informatiky“, „logice pro právníky“, „logice otázek“, „logice znalostí

² Sémantika obecně znamená význam. Ovšem termín „význam“ je používán často poněkud mlhavě a příliš široce, kdežto termín „sémantika“ budeme používat v logice poněkud úžeji avšak přesněji.

(epistémické logice)“, „logice příkazů (deontické logice)“, atd., atd., o různých logikách klasických i neklasických, teoretických i aplikačních.

V této knize budeme zkoumat především klasickou logiku, a to výrokovou a predikátovou logiku 1. řádu. Soustředíme se na analýzu úsudků, formalizaci báze znalostí a odvozování důsledků z dané báze znalostí. Zmíníme se krátce také o fuzzy logice a jejích aplikacích v informatice. V neposlední řadě se budeme věnovat rezoluční metodě dokazování, která je plně automatizována v disciplině *logické programování* a stala se základem programovacího jazyka *Prolog* („Programming in Logic“), s jehož základy se rovněž seznámíme.

Proč tedy studovat logiku? Protože logika tříbí naše myšlení, učí nás přesnému vyjadřování, usnadňuje vzájemnou komunikaci a porozumění, umožňuje jednotlivé způsoby usuzování a odvozování důsledků formalizovat, automatizovat a převést na počítač. V neposlední řadě však je dobré dělat logiku proto, že nám logika přináší potěšení, uspokojení a radost.

1.2. Deduktivně platné úsudky

Před několika lety jsem našla v novinách test s názvem „Logika je rodná sestra intelektu“. Jelikož mne to zaujalo a byla jsem přesvědčená, že logicky myslet umím, zkusila jsem si rychle test udělat. K mému velkému překvapení jsem po vyhodnocení zjistila, že jsem udělala jednu chybu. Jeden úsudek jsem chybně označila jako neplatný. Nedalo mi to, a onen údajně správný úsudek jsem se pokusila dokázat. A měla jsem pravdu, úsudek správný nebyl!³ Tato příhoda

³ Příslušný test najdete jako cvičení 1 na konci této kapitoly. Zjistila jsem dále, že tento test lze nalézt na Internetu ve dvou podobách, a to v opravené tedy správné i v původní chybné.

demonstruje, že opravdu někdy logická intuice může u člověka, který není v logice trénován, selhat. Zkusme si tedy provést velice jednoduchý test.

Jestliže zaspím, přijdu pozdě. Nepřišel jsem pozdě.	Jestliže zaspím, přijdu pozdě. Nezaspal jsem.
Z toho plyne, že	Z toho plyne, že
a) zaspal jsem	a) přišel jsem pozdě
b) nezaspal jsem	b) nepřišel jsem pozdě
c) přišel jsem pozdě	c) zaspal jsem
d) nic z výše uvedených	d) nic z výše uvedených

Označili jste u úsudku vlevo možnost (b) a vpravo (d)? Výborně, pak vám to opravdu logicky myslí. Pokud ne, nic si z toho nedělejte a pokračujte ve studiu logiky. Vždyť zatímco téměř každý vyřeší úsudek vlevo správně, u druhého mnozí označí možnost (b) jako správnou. Avšak tato možnost logicky nevyplývá z uvedených předpokladů. Dotyčný mohl přijít pozdě z mnoha jiných důvodů, např. mohl se zdržet v dopravní zácpě nebo se mu ráno nepodařilo nastartovat auto.

Kdyby však druhý předpoklad zněl „zaspal jsem“, pak by z toho samozřejmě plynulo, že jsem přišel pozdě.

Uvedeme si ještě jeden příklad. Mějme tři podobná tvrzení:

- a) Někteří účetní vystavují faktury
- b) Všichni účetní vystavují faktury
- c) Pouze účetní vystavují faktury

Předpokládejme dále, že

- d) Tom je účetní

Za jakých podmínek můžeme platně usoudit, že Tom vystavuje faktury? Tvrzení (a) k tomu samozřejmě nestačí, Tom nemusí být jedním z těch účetních, kteří mohou vystavovat faktury. Naproti tomu z tvrzení (b) a (d)

Jistě, jelikož dle prvního předpokladu být účetním je nutná podmínka pro vystavování faktur, kterou Tom dle druhého předpokladu nesplňuje, nemůže tedy vystavovat faktury.

Schematicky si můžeme úsudky, které jsme dosud poznali, zapsat takto:⁴

<i>platný</i>	<i>platný</i>
Jestliže A , pak B .	Jestliže A , pak B .
A .	Ne B .
B .	Ne A .

<i>neplatný</i>	<i>neplatný</i>
Jestliže A , pak B .	Jestliže A , pak B .
B .	Ne A .
A .	Ne B .

<i>platný</i>	<i>platný</i>
Všechna P jsou Q .	Všechna P jsou Q .
a je P .	a není Q .
a je Q .	a není P .

<i>neplatný</i>	<i>platný</i>
Pouze P jsou Q .	Pouze P jsou Q .
a je P .	a není P .
a je Q .	a není Q .

Uvedeme si ještě několik příkladů. Na dveřích výtahu je nápis

⁴ Prozatím provádíme takovýto schematický zápis v přirozeném jazyce, používáme však metasymbole jako „ A “, „ B “, „ P “, „ Q “, které zastupují libovolný výrok, resp. vlastnost.

Pouze zaměstnanci používají výtah!

Dále víme, že

Marie výtah (občas) používá.

Tedy si logicky odvodíme, že

Marie je zaměstnanec.

Neboť kdyby Marie zaměstnancem nebyla, a přesto výtah používala, nemohlo by být pravda, že pouze zaměstnanci používají výtah. Tedy předpoklad pravdivosti prvních dvou tvrzení a nepravdivosti odvozeného závěru *vede ke sporu*.

Na druhé straně, pokud víme pouze to, že Marie je zaměstnanec, nemůžeme za předpokladu, že pouze zaměstnanci používají výtah, platně logicky odvodit, že Marie používá výtah. Možná, že ačkoliv jakožto zaměstnanec má nárok na použití výtahu, raději běhá do čtvrtého patra pěšky. Třeba si chce zvýšit fyzickou kondici nebo má klaustrofobii. Proto z předpokladů

Pouze zaměstnanci používají výtah.

Marie je zaměstnanec.

nevyplyvá, že Marie používá výtah, neboť pravdivost předpokladů *není ve sporu s nepravdivostí* tohoto závěru.

Uvědomme si dále, že předpokladů, ze kterých odvozujeme závěr, může být více než dva, nebo pouze jeden nebo i dokonce žádný. Tak například uvažme tento úsudek:

Nikdo mladší 18 let nemá právo volit.⁵

Žádný ze zaměstnanců fakulty FEI

není mladší 18 let.

Vedoucí katedry Informatiky je zaměstnancem FEI.

Vedoucí katedry Informatiky má právo volit.

⁵ Uplatňování zákonů, jako např. volebních, vyžaduje logické myšlení. Právníci a soudci by tedy měli být vzděláni v logice.

Tento úsudek je jistě platný, neboť vedoucí katedry Informatiky jakožto zaměstnanec FEI není mladší 18 let (druhý předpoklad) a tedy není pravda, že nemá právo volit (první předpoklad) a proto má právo volit.⁶

K vyznačení toho, že úsudek je logicky platný, používáme znak \models . Platný úsudek proto značíme

$$P_1, \dots, P_n \models Z$$

Tvrzení P_1, \dots, P_n , ze kterých odvozujeme závěr Z , nazýváme předpoklady neboli *premisy*. Nyní již tedy můžeme definovat, co je to platný úsudek:

Definice 1 (*deduktivně platný úsudek*)

Úsudek $P_1, \dots, P_n \models Z$ je *deduktivně platný* neboli *správný*, jestliže za žádných okolností není možné, aby všechny premisy P_1, \dots, P_n byly pravdivé a závěr Z nepravdivý.

Poznámka. Tématem této knihy je zejména deduktivně platné usuzování. Existují však také jiné typy usuzování, např. induktivní a abduktivní, které rovněž stručně probereme. V této kapitole, pokud není vysloveně uvedeno jinak, budeme termín „deduktivní“ často vynechávat. Pokud tedy řekneme „platný úsudek“, myslíme tím „deduktivně platný úsudek“.

Definice 1 je natolik důležitá, že si zaslouží další komentáře. Především, jak jsme ukázali, u platného úsudku předpoklad pravdivosti premis a nepravdivosti závěru vede ke sporu, taková situace je u platného úsudku *kontradiktorická*, tj. nemožná. Tedy za všech okolností takových, ve kterých jsou premisy pravdivé, je zaručena i pravdivost závěru. Ale pozor!

⁶ Všimněme si však, že zde jsme použili ještě dodatečný implicitní předpoklad, že pokud není pravda, že někdo nemá právo volit, pak toto právo má, čili „co není výslovně zakázáno, je povoleno“.

Tím neříkáme, že závěr musí být pravdivý. Závěr musí být pravdivý pouze za *předpokladu pravdivosti všech premis*.

Tato definice má však jeden poněkud nepřijemný důsledek. Představme si, že premisy P_1, \dots, P_n jsou zvoleny tak nešikovně, že nemohou být současně nikdy, za žádných okolností pravdivé, tedy spor je již v předpokladech. Pak dle definice deduktivně platného úsudku platí, že z takovýchto sporných premis vyplývá jakýkoli závěr! Jistě, jestliže za žádných okolností není možné, aby všechny premisy P_1, \dots, P_n byly pravdivé, pak ať přidáme jakýkoli závěr Z , ať už pravdivý či nepravdivý, je zde spor a takový úsudek je deduktivně platný. Tedy platí, že

Ze sporných předpokladů deduktivně vyplývá jakýkoli závěr.

Argument, jehož premisy jsou sporné, je deduktivně platný pro jakýkoli závěr.

V Duží (2012) uvádím tento *příklad*:

Na schůzi výboru byla projednávána žádost pana X o zařazení do vyšší platové stupnice. Pan X si přál, aby ji mzdová komise doporučila. Ale výbor právě odstupoval a již předtím rozhodl, že doporučí pana X jako nového člena mzdové komise budoucího výboru. Takže by pak pan X byl členem komise, která bude posuzovat jeho vlastní žádost. Rozvinula se diskuse a bylo řečeno:

1. X přešel na kvalifikovanější práci.
2. X dobře rozumí mzdovým otázkám.
3. Jestliže X přešel na kvalifikovanější práci, pak je správné, aby jeho žádost byla projednána.
4. Jestliže je správné, aby jeho žádost byla v komisi projednána, pak by neměl být členem komise.
5. Rozumí-li výtečně mzdovým otázkám, měl by být členem komise.

Předseda nakonec řekl: "Všechny přednesené příspěvky jsou pravdivé. Teď jde o to, co z toho vyplývá." Po chvíli ticha prohlásil mladý zapisovatel (který náhodou studoval logiku na VŠB): "Z toho vyplývá, že můj pes právě hraje doma na piano."

V disciplině „Umělá inteligence“, která se zabývá automatizací usuzování, je proto věnována velká pozornost zachování konzistence báze znalostí, ze které odvozujeme příslušné logické důsledky. Pokud je však takováto báze rozsáhlá, nemůžeme vždy s jistotou vyloučit, že se nám tam nevloudila nekonzistence. Proto jsou vyvíjeny metody revize znalostí (*belief revision*) a metody rozumného odvozování důsledků i za předpokladu nekonzistence dané báze, které by neodvozovaly jakýkoli závěr ze sporných předpokladů. Tyto metody jsou zkoumány zejména v tzv. *parakonzistentní logice*.

Pokud je počet premis roven nule, máme mezní případ úsudku bez premis:

$$|= Z$$

Co to znamená? Pokud je tento úsudek bez předpokladů platný, pak nepravdivost závěru Z vede ke sporu, je to kontradikce. Tedy jinými slovy, Z nemůže být za žádných okolností nepravda, říkáme, že Z je *analyticky* nebo *logicky pravdivé tvrzení*. Tak například tvrzení „Žádný starý mládenec není ženatý“ je analyticky pravdivé. Pokud rozumíme výrazům „starý mládenec“ a „ženatý“, víme, že tento výrok je nutně pravdivý, aniž bychom empiricky zkoumali jednotlivé staré mládence a ověřovali jejich rodinný stav.⁷

⁷ Mezi *analytickým* a *logickým* vyplýváním a *analyticky* či *logicky pravdivým tvrzením* je jistý rozdíl, kterým se však zde nebudeme podrobně zabývat. Snad jen stručná charakteristika. Analyticky platný úsudek nemusí být vždy logicky dokazatelný v daném logickém systému. Např. pokud víme, že x je starý mládenec, pak si odvodíme, že z toho analyticky vyplývá, že x není ženatý, že x je muž atd. Aby však šlo o logické vyplývání, museli bychom přesněji

Na tomto místě bude ještě užitečné uvést, že platí zajímavý oboustranný vztah mezi platným úsudkem a analyticky pravdivým tvrzením, tzv. *sémantická věta o dedukci*:

Úsudek $P_1, \dots, P_n \models Z$ je platný, právě když je analyticky pravdivé tvrzení tvaru „Jestliže $(P_1 \text{ a } \dots \text{ a } P_n)$, pak Z “. Schematicky

$$P_1, \dots, P_n \models Z \text{ právě když } \models (P_1 \ \& \ \dots \ \& \ P_n) \rightarrow Z$$

Platí dokonce i to, že můžeme převádět předpoklady na pravou stranu jako antecedenty závěru ve tvaru implikace. Schematicky:

$$\begin{array}{ll}
 P_1, \dots, P_n \models Z & \Leftrightarrow \text{(právě když)} \\
 P_1, \dots, P_{n-1} \models P_n \rightarrow Z & \Leftrightarrow \\
 P_1, \dots, P_{n-2} \models (P_{n-1} \ \& \ P_n) \rightarrow Z & \Leftrightarrow \\
 P_1, \dots, P_{n-3} \models (P_{n-2} \ \& \ P_{n-1} \ \& \ P_n) \rightarrow Z & \Leftrightarrow \\
 \dots & \\
 \models (P_1 \ \& \ \dots \ \& \ P_n) \rightarrow Z &
 \end{array}$$

Důkaz provedeme až v kapitole 2 poté, co definujeme spojky implikace a konjunkce. Zatím pouze intuitivně: Implikativní tvrzení tvaru „Jestliže P , pak Q “, $P \rightarrow Q$, je nepravdivé pouze v tom případě, že P je pravdivé a Q nepravdivé. Tedy platí-li $P_1, \dots, P_n \models Z$, pak nemůže být nepravdivé tvrzení tvaru $(P_1 \ \& \ \dots \ \& \ P_n) \rightarrow Z$ a naopak.

Vyplývání je tedy vztah mezi množinou premis a závěrem, který platí *analyticky* nebo *logicky nutně*, tj. za všech okolností. Otázka, zda jsou premisy nebo závěr (náhodou, nyní) pravdivé, je úplně jiný problém.

Připomeňme si platný úsudek, který jsme uvedli výše.

definovat, co je to starý mládenec tak, aby všechny předpoklady nutné pro odvození daného závěru byly explicitně uvedeny.

Nikdo mladší 18 let nemá právo volit.

Žádný ze zaměstnanců fakulty FEI
není mladší 18 let.

Vedoucí katedry Informatiky je zaměstnancem FEI.

Vedoucí katedry Informatiky má právo volit.

Jistě si umíme představit, že volební zákon bude změněn a právo volit budou mít lidé již od 15 let věku. Podobně to, zda žádný ze zaměstnanců fakulty FEI není mladší osmnácti let, a zda vedoucí katedry Informatiky je opravdu zaměstnancem FEI, musíme ověřit empiricky, tj. zkoumáním stavu světa. Jakmile však ověříme, že to pravda je, nemusíme již pak empiricky zkoumáním stavu světa zjišťovat, zda vedoucí katedry Informatiky má právo volit. Spolehne se na logiku a odvodíme si to z daných předpokladů. Proto někdy také říkáme, že závěr platného úsudku je *deduktivně obsažen* v jeho premisách.

Podobně tomu je u matematických úsudků. Pravdivost či nepravdivost matematických tvrzení sice nezávisí na stavu světa, avšak ověření toho, zda jsou či nejsou pravdivá, vyžaduje často velké úsilí matematiků. Ovšem jakmile nějak dokážeme či ověříme pravdivost premis (např. konzultací se Stanford encyklopedií nebo nahlédnutím do učebnice matematiky), můžeme se již spolehnout na logiku a odvozovat další tvrzení, která z daných předpokladů vyplývají. Např. poté, co Kurt Gödel dokázal větu o neúplnosti aritmetiky, tedy že neexistuje rekurzivně axiomatizovaná teorie aritmetiky, která by rozhodovala libovolnou formuli jazyka aritmetiky, zda je či není pravdivá, můžeme za předpokladu, že budeme považovat predikátovou logiku 1. řádu za teorii aritmetiky bez speciálních axiomů, logicky dále odvodit např. to, že problém logické pravdivosti v predikátové logice 1. řádu není rozhodnutelný. Abychom si uvedli jednodušší příklad, uvažme tento úsudek:

Přirozené číslo je dělitelné 3 (beze zbytku),
právě když součet cifer tohoto čísla je dělitelný 3.

Součet cifer čísla 5556 je 21.

Číslo 21 je dělitelné 3.

Číslo 5556 je dělitelné 3.

Pokud tedy studiem matematiky zjistíme, že premisy jsou pravdivé, spolehne se již na logiku a víme tak, že číslo 5556 je dělitelné třemi, aniž bychom je opravdu zkoušeli třemi vydělit.

Terminologické poznámky. Ačkoliv v hovorovém jazyce mluvíme někdy o platných výroch a pravdivých argumentech, v této knize budeme užívat termíny „platný / neplatný“ a „pravdivý / nepravdivý“ pouze a výhradně tak, jak je v logice zvykem, tj. takto:

Argument může být *platný* (popřípadě *správný*),
ale ne *pravdivý*.

Tvrzení (výrok) může být *pravdivé*, ale ne *platné*
či *správné*.

Z toho, co bylo až dosud řečeno, by čtenář mohl nabýt dojmu, že platné úsudky mají význam pouze tehdy, když jsou jejich premisy pravdivé. Není tomu tak, jak si ukážeme v dalším odstavci.

Nejprve však ještě jedna terminologická poznámka. Platné úsudky s pravdivými premisami se v angličtině nazývají „*sound*“. Je těžké najít český ekvivalent pro tento termín. V dalším textu je budeme nazývat „*přesvědčivé argumenty*“, neboť je-li úsudek platný a víme-li, že jeho premisy jsou pravdivé, pak takovýto úsudek je opravdu přesvědčivým argumentem ve prospěch pravdivosti závěru.

1.3. Přesvědčivé (sound) deduktivní argumenty a argumenty ad absurdum

Zopakujme si nejprve základní definice, které už známe.

Úsudek je *platný*, jestliže předpoklad pravdivosti premis a nepravdivosti závěru vede ke sporu. Úsudek je navíc *přesvědčivý* („*sound*“) argument ve prospěch pravdivosti závěru, jestliže je platný a jeho premisy jsou pravdivé.

Úsudek tedy může být nepřesvědčivým argumentem ve prospěch pravdivosti závěru ze dvou důvodů:

- a) buďto úsudek není platný, tj. závěr z premis nevyplývá, nebo
- b) některá z premis není pravdivá

Příklad:

Závěr nevyplývá:

Všichni miliardáři se dobře stravují.

Duží se dobře stravuje.

Duží je miliardář.

První premisa není pravdivá:

Všichni logikové jsou miliardáři.

Duží je logik.

Duží je miliardář.

Když tedy kritizujeme argument našeho oponenta ve prospěch pravdivosti tvrzení *Z*, snažíme se ukázat, že jeho argument není přesvědčivý, tedy že závěr z oponentových premis nevyplývá nebo že některá z premis není pravdivá. Pokud se nám to podaří, pak jsme ukázali, že náš oponent nedokázal pravdivost tvrzení *Z*. To ale neznamená, že tvrzení

Z by nemohlo být pravdivé, možná, že náš oponent nebo někdo jiný objeví lepší argument ve prospěch pravdivosti Z.

Tak například je známo poměrně velké množství tzv. ontologických argumentů ve prospěch existence Boží. Tyto argumenty se snaží logicky dokázat, že Bůh existuje nutně, a to na základě předpokladů odvozených z pojmu křesťanského Boha jako např. Jeho dokonalost, Jeho nutnost, Jeho věčnost, apod. Nejstarším známým a nejslavnějším takovým argumentem nebo spíše skupinou argumentů je dílo sv. Anselma *Proslogion*, vytvořené v letech 1077-1078. Velký český logik působící na Novém Zélandě Pavel Tichý podrobil toto dílo logické analýze a ukázal, že nejdokonalejším a logicky *platným* argumentem je Anselmova modlitba v *Proslogion* III. Jelikož je tento argument *platný*, položil si dále Tichý otázku, zda je rovněž *přesvědčivým* argumentem ve prospěch nutné existence Boží. Neboť kdyby tomu tak bylo, byla by otázka víry v Boha pouze otázkou logického myšlení, a to je nepřijatelné jak pro věřící, tak pro ateisty. Jak říká Tichý, ateista by se pak lišil od věřícího pouze tím, že jeden věří v dokazatelnou tautologii a druhý ne.⁸ Navíc, všechny církve by „umřely na úbytě“, stačilo by nastudovat logiku a víra v Boha by nebyla otázkou víry, nýbrž znalostí logiky. Premisa, jejíž pravdivost pak Tichý zpochybňuje, je předpoklad, že nutná existence zvyšuje důležitost „věci k bytí“, tj. pojmu Boha. Tím však Tichý netvrdí, že Bůh neexistuje, pouze ukazuje, že Anselmův argument není přesvědčivý. Nakonec je pravda, že se stále mnozí logici, teologové a filosofové snaží najít lepší argumenty ve prospěch existence Boží.⁹

Shrneme si nyní to, co víme o deduktivně platných úsudcích, ještě jednou. Jestliže je úsudek platný, nemusí být

⁸ Tautologie je logicky platné tvrzení, tj. takové tvrzení, pro něž předpoklad nepravdivosti vede ke sporu.

⁹ Podrobnosti o analýze Anselmova *Proslogion* lze nalézt v Tichý (1979) a Duží (2011).

jeho premisy pravdivé, a tedy ani závěr nemusí být pravdivý. Platnost úsudku zaručuje pravdivost závěru *pouze za předpokladu pravdivosti všech premis*. Pokud ukážeme, že úsudek není přesvědčivý argument ve prospěch pravdivosti závěru, nedokázali jsme tím pravdivost závěru, ale samozřejmě ani nepravdivost závěru.

Pokud však zjistíme, že úsudek je platný, ale jeho závěr je evidentně nepravdivý, můžeme dále platně usoudit, že alespoň jedna z premis je nepravdivá.

Podívejme se znovu na výše uvedený příklad:

Všichni logikové jsou miliardáři.

Duží je logik.

Duží je miliardář.

Je zřejmé, že autorka této knihy není miliardář, proto je některá z premis nepravdivá. V tomto případě je to evidentně ta první. Podobně bude-li např. někdo tvrdit, že všichni politici jsou zkorumpovaní, a vám se takovéto tvrzení zdá přece jen přehnané, budete argumentovat proti: Ale pan *XY* je politik a není zkorumpovaný!

Takové *argumentaci ve prospěch nepravdivosti nějakého tvrzení* říkáme argumentace *ad absurdum*.

Chceme-li tedy argumentovat ve prospěch *nepravdivosti* tvrzení *Z*, použijeme argument *ad absurdum* tak, že ukážeme, že z předpokladu pravdivosti *Z* vyplývá evidentní nepravda nebo že dokonce předpoklad pravdivosti *Z* vede ke sporu.

V některých logických systémech je dokonce zaváděna negace tvrzení *Z* tímto způsobem:

$$Z \models \perp$$

Znak \perp znamená nepravdu, tedy z tvrzení *Z* vyplývá nepravda, proto je *Z* nepravdivé.

Podobný způsob argumentace užívají často děti. Například chlapec Jenda se vytahuje, že přeskočí vysoký plot. Druhý chlapec mu oponuje: „Jestliže přeskočíš ten plot, tak já

jsem papež!“ Protože evidentně papežem není, tvrdí tím, že Jenda plot nepřeskočí. Ovšem v tvrzení „Jestliže přeskočíš ten plot, tak já jsem papež“ nejde o vyplývání, nýbrž pouhou implikaci. Vyplývání je *nutný vztah* mezi premisami a závěrem, tj. za žádných okolností nemůže nastat případ, že by byly premisy pravdivé a závěr nepravdivý. V případě pouhé implikace zde taková nutnost není. Jinými slovy, *mohlo by* se stát, že by Jenda ten plot přeskočil i když jeho oponent není papež. Logika takovému výkonu nebrání, zřejmě tomu však brání Jendovy fyzické dispozice.

Kromě toho, že se zajímáme o to, zda je daný úsudek přesvědčivým argumentem ve prospěch pravdivosti závěru, mělo by nás zajímat také to, nakolik jsme si *jisti*, že premisy jsou pravdivé. Aby byl argument opravdu přesvědčivý, mělo by být naprosto zřejmé, a to pro nás i pro ostatní, že jeho premisy jsou pravdivé. Obvykle se však musíme spokojit s určitou nejistotou či nepřesností, o předpokladech, ze kterých vycházíme, si často pouze myslíme, že jsou pravdivé, ale můžeme se mýlit. Jelikož tedy naše argumenty stojí a padají s pravdivostí jejich premis, jsou pouze natolik přesvědčivé, nakolik jsou přesvědčivé jejich premisy. Tato skutečnost pak vede ke třetí strategii, jak kritizovat argument, pokud nesouhlasíme s jeho závěrem. Pokoušíme se ukázat, že pravdivost jedné nebo více premis je značně nejistá.

Harry J. Gensler uvádí ve své knize (2010) tento příklad. Na podzim roku 2008 Barack Obama před svým zvolením prezidentem USA přesvědčivě vedl v průzkumech veřejného mínění. Avšak mnozí si mysleli, že nakonec ve volbách nezvítězí. Argumentovali na základě tzv. „Bradleyho efektu“, který spočívá v tom, že voliči bílé pleti v průzkumech sice říkají, že budou volit kandidáta černé pleti, ale ve skutečnosti jej pak nevolí. Barackova manželka Michelle 8. října

v rozhovoru s Larry Kingem pro CNN tvrdila, že Bradleyho efekt nenastane a použila tento argument:¹⁰

Barack Obama je demokratickým kandidátem.

Kdyby měl nastat Bradleyho efekt, pak by Barack nebyl demokratickým kandidátem

[protože by se tento efekt projevil již v primárkách].

Tedy Bradleyho efekt nenastane.

Po tomto prohlášení již nemohli oponenti Obamy jednoduše tvrdit, že Bradleyho efekt nastane, museli reagovat na platný argument Michelle. Jelikož byla první premisa evidentně pravdivá, museli by zpochybnit pravdivost druhé, to znamená, museli by tvrdit, že ačkoliv se Bradleyho efekt neprojevil v primárkách, projeví se v závěrečném kole voleb. Ovšem těžko si představit, jak by někdo tento názor obhajoval.¹¹

1.4. Induktivní / abduktivní usuzování a práce s neurčitostí

Až dosud jsme se zabývali pouze *deduktivním* usuzováním, které zachovává pravdivost. Tedy, ještě jednou, úsudek je deduktivně správný, pokud *nutně, za všech okolností* platí to, že pokud jsou všechny premisy pravdivé, je pravdivý i závěr, čili jinými slovy, pravdivost premis a nepravdivost závěru je sporná. Jde o nutný, striktní vztah mezi premisami a závěrem.

V praxi se však setkáváme také s jinými způsoby usuzování, kdy vztah mezi předpoklady a závěrem, který

¹⁰ Doslova řekla toto: „Barack Obama is the Democratic nominee. If there was going to be a Bradley effect, Barack wouldn't be the nominee [because the effect would have shown up in the primary elections]. [Hence,] there isn't going to be a Bradley effect.”

¹¹ V závěrečném kole voleb Bradleyho efekt opravdu nenastal a jak známo, Barack Obama byl zvolen prezidentem USA.

z těchto předpokladů vyvodíme, je volnější. Porovnejme tyto dva úsudky:

Deduktivně platný:

Všichni obyvatelé České republiky žijí v
Evropě.

Petr je obyvatel České republiky.

Petr žije v Evropě.

Induktivní úsudek:

Obyvatelé České republiky (většinou) mluví
česky.

Petr je obyvatel České republiky.

Petr mluví česky

(asi, s velkou pravděpodobností).

U tohoto úsudku pravdivost premis nezaručuje pravdivost závěru s naprostou jistotou, pouze s určitou (v tomto případě zřejmě velkou) pravděpodobností. Například Petr se mohl do Čech přistěhovat z Bratislavy a mluví pouze slovensky. Nebo to může být emigrant z Čečenska, který zde našel politický azyl a dosud se nenaučil česky.

Abduktivní úsudek:

Petr mluví česky.

Česky se mluví v České republice.

Petr je obyvatel České republiky.

(asi, s velkou pravděpodobností).

Abduktivní usuzování se dá charakterizovat jako hledání příčin, předpokladů, které by vysvětlovaly pozorované jevy. Jestliže potkáme někoho, kdo mluví česky, usoudíme, že dotyčný žije v České republice. Ovšem nemůžeme si tím být jisti, dotyčný mohl emigrovat, nebo je to potomek českých emigrantů, který sice prožil celý život v Austrálii, přesto však jeho rodiče dbali na to, aby rodný jazyk nezapomněl.

Takovéto usuzování se využívá např. v lékařství při stanovení diagnózy, nebo v průmyslu při hledání příčin poruch daného zařízení, a podobně. Jedná se v podstatě o „obrácené“ induktivní usuzování, kdy se snažíme k pozorovanému jevu najít předpoklady, ze kterých lze tento jev deduktivně nebo i pouze induktivně odvodit.

V této knize se abduktivním usuzováním blíže zabývat nebudeme, neboť hlavním tématem této knihy je deduktivní usuzování. Co se týká induktivního usuzování, ukážeme si, že v důkazu matematickou indukcí dokázaný závěr opravdu logicky nevyplývá. Budeme se také zabývat matematickými metodami, které nám pomáhají pracovat s určitou *mírou nejistoty* či *vágnosti*. Běžné výroky našeho přirozeného jazyka se často vyznačují určitou vágností a neurčitostí. Tak např. predikát být mladý. V kolika letech a dnech přestane být člověk mladý? Těžko můžeme odpovědět přesně v tolika letech a dnech. Nebo do kolika stupňů Celsia je voda studená? Kde přesně končí hory a začíná nížina? Dá se dokonce říct, že většina vlastností ve skutečném světě a přirozeném jazyce je neostrá. Ostré vlastnosti se vyskytují především v matematice.

V matematice jsou všechny výroky pravdivé či nepravdivé *analyticky*, tj. nezávisle na stavu světa. Proto problém, který jsme právě nastínili, a to nakolik jsme si jisti pravdivostí premis, či do jaké míry jsou premisy pravdivé, zde nehraje roli. Striktní deduktivní usuzování, kterým jsme se až dosud zabývali, zde zcela vyhovuje. Přesto nám mohou matematické metody při práci s neurčitostí pomoci. Budeme se jim věnovat v Kapitole 3 o tzv. *fuzzy* logice.

1.5. Cvičení

Cvičení 1.5.1: Logika je rodná sestra intelektu¹²

„Intelligence a intelekt nejsou totéž. Zatímco inteligence představuje soubor schopností, které člověku umožňují rychle rozumět světu událostí a situací, intelektem se míní schopnost sbírat informace a materiál pro myšlení a dokázat s nimi operovat.

Tento test by měl prokázat vaši schopnost vyvodit správný závěr, který vyplývá z určitých prohlášení, a zároveň prověřit rychlost vašeho uvažování.

Následující prohlášení jsou samozřejmě ve skutečnosti nesmyslná, nicméně je třeba vyjít z toho, že první dvě prohlášení z každého úkolu jsou správná. Závěr z nich už ale může, nebo také nemusí být správný. Jestliže se vám zdá v pořádku, označte jej slovem ANO, v opačném případě slovem NE. Na vypracování jednotlivých úkolů máte ovšem pouze 20 vteřin.“

1. Všechny žáby jsou modré. Tento kůň je modrý. Proto tento kůň je žába.
2. Všichni žáci jsou ryby. Někteří žáci jsou mloci. Proto někteří mloci jsou ryby.
3. Některé mraky mají černé puntíky. Černé puntíky mají všechny domy. Proto některé mraky jsou domy.
4. Všechny myši jsou hranaté. Všechno hranaté je modré. Proto všechny myši jsou modré.

¹² Toto cvičení je onen test, který je zmíněn v odstavci 1.2. Cítuji zde doslova, jak tento test zněl. Z toho však nevyplývá, že bych se ztotožňovala se vším, co je zde řečeno. Navíc, čtenáře by mohla mást použitá terminologie. Proto prosím si všude dosadte za „prohlášení“ termín „výrok“, a za „správné prohlášení“ termín „pravdivý výrok“. U každého úkolu pak posuďte, zda třetí výrok deduktivně vyplývá z prvních dvou.

5. Všechny ovce jsou sloni. Někteří sloni jsou čápi. Proto všechny ovce jsou čápi.
6. Někteří lidé, kteří mají rádi Alici, nemají rádi Roberta. Robert má rád Alici. Proto lidé, kteří mají rádi Roberta, nemají rádi Alici.
7. Někteří psi rádi přednášejí básně. Všichni psi jsou laviny. Proto některé laviny rády přednášejí básně.
8. Nikdo s červeným nosem nemůže být premiér. Všichni muži mají červené nosy. Proto žádný muž nemůže být premiérem.
9. Všichni jezevci jsou sběratelé umění. Někteří sběratelé umění žijí v norách. Proto někteří jezevci žijí v norách.
10. Nikdo s fialovými vlasy není mladý. Někteří lidé, kteří mají fialové vlasy, pijí mléko. Proto někteří lidé, kteří pijí mléko, nejsou mladí.

Jak jste dopadli?

Za každou odpověď ANO u otázek 2, 4, 7, 8, 9, 10 si počítejte jeden bod, a za každou odpověď NE u otázek 1, 3, 5, 6 si počítejte také jeden bod.

7-10 bodů: Bravo! Těžko může být někdo lepší než vy. Vaše logika je přímo železná.

5-6 bodů: Logické uvažování patří k vašim silným stránkám.

3-4 body: Zlatá střední cesta, tedy žádný génius, ale hlupák ještě také ne. Co víc si přát?

1-0 bodů: Vaše silné stránky se neprojevují právě v logice.

Komentář Duží:

Dosáhli jste 10 bodů, nebo pouze 9? Pokud „pouze“ 9, pak je to v tom nejlepším pořádku, neboť jste odpovídali zcela správně. Pokud jste dosáhli 10 bodů, pak jste se dopustili jedné chyby. Dokážete nyní určit, proč je výsledek 10 bodů

vlastně chybný? Jinými slovy, která z odpovědí ANO měla být správně NE?

Odpověď:

Jedná se o úsudek číslo 9. Zde závěr deduktivně nevyplývá z uvedených předpokladů, protože žádný z těch sběratelů umění, kteří dle druhé premisy žijí v norách, nemusí patřit mezi jezevce, neboť dle první premisy může být sběratelů umění více než jezevců.

Cvičení 1.5.2: Rozhodněte, které z následujících úsudků jsou deduktivně platné.

1.	Jestliže prší, pak zůstaneme doma.
	Ale doma jsme nezůstali.
	<i>Tedy, neprší.</i>

2.	Je-li pěkně, pak nezůstaneme doma.
	Není pěkně.
	<i>Tedy, zůstaneme doma.</i>

3.	Je pěkně a neprší.
	Jestliže neprší, pak nezůstaneme doma.
	<i>Tedy, je pěkně a nezůstaneme doma.</i>

4.	Je pěkně nebo prší.
	Jestliže prší, pak zůstaneme doma.
	Ale doma jsme nezůstali.
	<i>Tedy, je pěkně.</i>

Řešení: Platné úsudky jsou 1, 3, 4, úsudek 2 platný není.

Cvičení 1.5.3: Rozhodněte, které z následujících závěrů deduktivně vyplývají z uvedených předpokladů.

	Je-li Karel v Praze, je Helena v Brně.
	Je-li úterý, není Helena v Brně.
	Je úterý nebo středa.
a)	<i>Tedy</i> , je-li Karel v Praze, pak není úterý.
b)	<i>Tedy</i> , je středa nebo Helena není v Brně.
c)	<i>Tedy</i> , je-li středa, pak je Helena v Brně.
d)	<i>Tedy</i> , je-li Karel v Praze, pak je středa.

Řešení: Vyplývají závěry a), b) a d). Závěr c) nevyplývá.

Cvičení 4: Co vyplývá z těchto předpokladů?

	Je-li úterý, je přednáška, ale není cvičení.
	Dnes je přednáška i cvičení.
	Je-li cvičení, pak nepotřebujeme projektor.
	<i>Tedy</i> , ???

Řešení: Není úterý a nepotřebujeme projektor.

Kapitola 2. Formalizace znalostí

Až dosud jsme formulovali naše argumenty a úsudky pouze v přirozeném jazyce a intuitivně jsme rozhodovali, které úsudky jsou platné a které neplatné. To je samozřejmě v pořádku, vždyť spolu vzájemně komunikujeme a argumentujeme ve prospěch toho či onoho tvrzení právě v přirozeném jazyce. Chceme-li však jednotlivé správné způsoby usuzování ověřovat, dokazovat a také *automatizovat*, potřebujeme zavést formální jazyk, který nebude trpět neduhy jazyka přirozeného jako víceznačnost či vágnost. Navíc, jak jsme již naznačili v úvodní kapitole v odstavci 1.2, platné úsudky jsou platné díky své *logické formě*.

Poznali jsme platná *schémata usuzování*, jako např.

Jestliže A , pak B ; A je pravda. Tedy je pravda i B .

Jestliže A , pak B ; B není pravda. Tedy není pravda ani A .

Všechna P jsou Q ; a je P . Tedy a je také Q .

Všechna P jsou Q ; a není Q . Tedy a není ani P .

Bylo by jistě výhodné si taková schémata či formy zafixovat jako *platná pravidla usuzování*, a kdykoliv se pak setkáme s argumentem, který má stejnou formu, víme již bez dalšího dokazování, že takovýto argument je platný.

Dosadíme-li např. za symboly A , B výroky „Prší“ a „vezmu si deštník“, dostaneme platné úsudky:

Jestliže *prší*, *vezmu si deštník*; *Prší*.

Tedy *si vezmu deštník*.

Jestliže *prší*, *vezmu si deštník*; *Nevezmu si deštník*.

Tedy *neprší*.

Podobně dosadíme-li za symboly P a Q vlastnosti být „prvočíslem větším než 2“ a „lichým“, dostaneme opět platné úsudky:

Všechna *prvočísla větší než 2* jsou *lichá*;
5 je *prvočíslo větší než 2*.
Tedy 5 je *liché číslo*.

Všechna *prvočísla větší než 2* jsou *lichá*;
6 není *liché číslo*.
Tedy číslo 6 není *prvočíslo větší než dva*.

Zavedeme si proto *formální jazyk*, ve kterém budeme co nejpřesněji formalizovat naše tvrzení a zachycovat jednotlivé platné logické formy. Nejprve zavedeme nejjednodušší logický systém a jazyk, a tím je *výroková logika*. Poté náš systém rozšíříme na *predikátovou logiku 1. řádu*, což je v podstatě nejrozšířenější moderní logický systém, využívaný zejména v matematice. Naučíme se v takovýchto logikách pracovat, ale také si ukážeme omezení, kterým podléhají.

Pozorný čtenář si jistě všiml, že příklady platných schémat usuzování, které jsme uvedli výše, se liší. V případě prvních dvou jsme dosazovali za symboly A , B jednotlivé *výroky*, kdežto v případě druhých dvou jsme dosazovali za symboly P , Q *predikáty* označující vlastnosti, které mají *některé* případně *všechny* prvky dané zkoumané domény. Schémata prvního typu jako např.

Jestliže A , pak B ; A je pravda. Tedy je pravda i B .

Jestliže A , pak B ; B není pravda. Tedy není pravda ani A .

A nebo B . Ale B není pravda. Tedy je pravda A .

jsou předmětem zkoumání *výrokové logiky*, kdežto formalizace schémat usuzování druhého typu, tj. např.

Všechna P jsou Q ; a je P . Tedy a je také Q .

Všechna P jsou Q ; a není Q . Tedy a není P .

jsou předmětem zkoumání *predikátové logiky 1. řádu*.

U schémat prvního typu, která lze zachytit ve výrokové logice, je platnost úsudku dána pouze tím, jak jsou jednotlivé výroky A , B navzájem spojeny, nezávisí tedy na tom, jaký je obsah výroků A , B . Kdežto u druhého typu, které lze formalizovat v predikátové logice 1. řádu, závisí platnost úsudku také na obsahové struktuře jednotlivých výroků.

2.1. Jazyk výrokové logiky

2.1.1. Úvodní poznámky

Nyní si zavedeme jazyk výrokové logiky, ve kterém budeme moci formalizovat usuzování, které je založeno pouze na způsobu skládání jednoduchých výroků ve výroky složitější pomocí logických spojek. Všimněme si nejprve, které výrazy mohou označovat logické spojky. Jsou to spojení jako „jestliže ... , pak“, „když ... , tak“, „je-li ... , pak“, „a“, „ale“, „nebo“, „anebo“, „ani ... ani“, apod.

Budeme tedy potřebovat dva typy symbolů. Jednak symboly zastupující jednotlivé výroky jako „Prší“, „Je hezky“, tzv. *výrokové proměnné* p , q , r , ..., a dále symboly pro *logické spojky* označené výrazy jako „jestliže, pak“ (implikace), „a“ (konjunkce), „nebo“ (disjunkce), „právě když“ (ekvivalence). Tyto logické spojky fungují tak, že spojují vždy dva výroky A , B v jeden složený, jehož pravdivost je dána *pouze pravdivostí vstupních výroků* A , B . Jinými slovy,

jednotlivé výroky vstupují do výrokové logiky pouze svou pravdivostní hodnotou. Žádné další vazby mezi výroky, jako příčina, časová následnost, apod. zde nehrají roli.

Tak například výrok

Jestliže železo je guma, pak $1+1=2$

je ve výrokové logice pravdivý! Je tomu tak proto, že spojka „jestliže ..., pak“ označuje tzv. *materiální implikaci*, která je nepravdivá pouze v jednom případě, a to tehdy, když výrok vlevo je pravdivý a vpravo nepravdivý.¹³ Výrokově logické spojky tedy jsou tzv. *pravdivostní funkce*, jejichž argumenty a hodnoty jsou pravdivostní hodnoty *Pravda* (1) a *Nepravda* (0).

2.1.2. Pojem funkce

Dříve než přistoupíme k definici pravdivostních funkcí, vysvětlíme si pojem *funkce*. Na střední škole se čtenář jistě s tímto pojmem setkal. Studovali jsme např. goniometrické funkce *sinus*, *cosinus*, *tangent*, *kotangent*, nebo aritmetické funkce jako druhá *mocnina* či *odmocnina*, apod. Zabývali jsme se však většinou spíše zadáním funkce, čili příslušnými formulami, než tzv. *průběhem hodnot*. Přístup, kdy se zabýváme především různými způsoby zadání funkce a vztahy mezi nimi, se někdy nazývá *intenzionální*. Druhý přístup, kdy nás zajímá především průběh hodnot, který se dá znázornit tabulkou či grafem, nazveme *extenzionální* neboli *množinový*.¹⁴ Z tohoto extenzionálního pohledu je užívána tato definice (totální) funkce:¹⁵

¹³ Této spojce budeme ještě v dalším textu věnovat poměrně velkou pozornost, protože bývá často u studentů zdrojem chyb.

¹⁴ Slavný matematik a logik Alonzo Church používá pojmy „function-in-intension“ a „function-in-extension“.

¹⁵ V některých logických systémech pracujeme také s tzv. *parciálními funkcemi*, které nemusejí být definovány na všech argumentech, na některých může hodnota funkce chybět. V klasické výrokové a predikátové logice však pracujeme pouze s *totálními funkcemi*.

Funkce f je zobrazení z množiny A do množiny B , které přiřazuje každému prvku množiny A právě jeden prvek množiny B . Množinu A nazýváme *definiční obor* nebo také *doména* funkce f a množinu B *obor hodnot* nebo také *kodoména* funkce f , značíme $f: A \rightarrow B$.

Doména funkce může být množina uspořádaných dvojic, nebo také trojic, atd., obecně n -tic prvků množin A_1, \dots, A_n . Takovou množinu všech uspořádaných n -tic nazýváme *Kartézský součin* množin A_1, \dots, A_n , značíme $A_1 \times \dots \times A_n$. Tak např. funkce sčítání na množině přirozených čísel N je zobrazení z množiny dvojic přirozených čísel do množiny přirozených čísel, tedy

$$+: N \times N \rightarrow N.$$

Můžeme si to ilustrovat tabulkou.

Argumenty		Hodnoty
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	2
2	0	2
0	2	2
2	1	3
1	2	3
2	2	4
...

Tab. 1: Funkce sčítání na množině N

2.1.3. Pravdivostní funkce

Poté, co jsme si ozřejmili pojem funkce, můžeme se vrátit k pravdivostním funkcím. O jaká zobrazení jde? Jelikož jsou

to binární logické spojky, spojují vždy dva výroky do jednoho, ovšem ty výroky jsou zde zastoupeny pouze svou pravdivostní hodnotou. Označíme-li množinu pravdivostních hodnot Pravda, Nepravda jako $\{1, 0\}$, vidíme, že tyto funkce jsou zobrazení typu $\{1, 0\} \times \{1, 0\} \rightarrow \{1, 0\}$.

Jednoduchou kombinatorickou úvahou zjistíme, že existuje celkem šestnáct binárních pravdivostních funkcí a jejich výčet je uveden v následující Tabulce 2. Opět v prvních dvou sloupcích jsou možné argumenty, v následujících šestnácti sloupcích jsou hodnoty těchto funkcí.

Arg	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
	Hodnoty															
1 1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
1 0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0 1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0 0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0

Tab. 2: Binární pravdivostní funkce

Z těchto šestnácti funkcí se nejčastěji používají funkce, které jsme označili čísly 2, 6, 8 a E. Nazveme je po řadě *implikace* (\supset), *ekvivalence* (\equiv), *disjunkce* (\vee) a *konjunkce* (\wedge), a budeme pro ně užívat symboly, které jsme uvedli v závorce.

Příklad. Vlevo uvádíme příklady složených výroků, vpravo pak jejich formalizaci ve výrokové logice.

„Jestliže železo je guma, pak $1+1=2$ “ $\rightarrow p \supset q$

„Železo je guma nebo $1+1=2$ “ $\rightarrow p \vee q$

„Železo je guma a $1+1=2$ “ $\rightarrow p \wedge q$

„Železo je guma právě když $1+1=2$ “ $\rightarrow p \equiv q$.

Jelikož jsou binární spojky implikace, konjunkce, disjunkce a ekvivalence velice důležité, uvedeme v Tabulce 3 ještě jednu jejich definici pomocí pravdivostní tabulky.

p	q	$p \supset q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \equiv q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1

Tab. 3: Spojky implikace, konjunkce, disjunkce a ekvivalence

Všimněme si ještě, že rovněž výraz „není pravda, že“, který neguje pravdivost výroku, kterému předchází, vytváří z jednoduchého výroku výrok složený, a funguje tedy jako logická spojka, i když nespojuje dva výroky. Tuto spojku budeme nazývat *negace* a označovat jako „ \neg “. Například výrok „Železo není guma“ formalizujeme jako $\neg p$.

Jak asi tušíte, výrok $\neg p$ je pravdivý právě když p je nepravdivý a naopak, tedy negace obrací pravdivostní hodnotu původního výroku:

p	$\neg p$
1	0
0	1

Symbolika pro značení výrokových spojek není v literatuře jednotná. Následující tabulka 4 udává alternativní značení spojek:

Symbol pro spojku	Alternativně
\wedge	$\&$
\supset	\rightarrow, \Rightarrow
\equiv	$\leftrightarrow, \Leftrightarrow$
\neg	\sim

Tab. 4. Značení logických spojek

2.1.4. Jazyk výrokové logiky

Nyní již můžeme přistoupit k definici jazyka výrokové logiky. Jazyk je obecně (spočetně nekonečná) množina dobře utvořených výrazů, kterým zde budeme říkat *formule*. Chceme-li definovat nekonečnou množinu, pak nejčastěji použijeme definici induktivní. Jako obvykle, nejprve definujeme *abecedu* jazyka, tj. množinu základních symbolů, ze kterých jsou tvořeny formule, a poté *gramatiku* jazyka, která induktivně generuje nekonečnou množinu *dobře utvořených formulí* (DUF).

Definice 2 (jazyk výrokové logiky)

I) *Abeceda jazyka výrokové logiky* je množina následujících symbolů:

- Výrokové proměnné: p, q, r, \dots (případně s indexy)
- Symboly logických spojek: $\neg, \vee, \wedge, \supset, \equiv$
- Pomocné symboly (závorky): $(,),$ případně $[,], \{, \}$

II) *Gramatika jazyka výrokové logiky*:

1. Výrokové proměnné jsou dobře utvořené *formule*.
(báze definice)
2. Jsou-li výrazy A, B dobře utvořené formule, pak jsou dobře utvořeny *formulemi* i výrazy $(\neg A), (A \wedge B), (A \vee B), (A \supset B), (A \equiv B)$.
(indukční krok definice)
3. Jiných dobře utvořených formulí jazyka výrokové logiky, než podle bodů (1), (2) není.
(uzávěr definice)

Jazyk výrokové logiky je množina všech dobře utvořených formulí výrokové logiky. Formule vzniklé podle bodu (1) nazýváme *elementárními (atomickými) formulemi*, formule vzniklé podle bodu (2) *složenými formulemi*.

Poznámky:

1. Symboly A, B použité v indukčním kroku definice nejsou formulemi (nevyskytují se jako symboly v abecedě jazyka), ale *metasymboly* sloužící k označení jakékoli formule.
2. Atomické formule, tj. výrokové proměnné, zastupují jednoduché výroky (přesněji jejich pravdivostní hodnoty), složené formule pak složené výroky. Výrok je *jednoduchý*, jestliže žádná jeho vlastní část již není výrokem. Tak například výrok „Prší“ je jednoduchý, avšak výrok „Neprší“ již považujeme za složený.
3. Používání závorek v zápisu formulí můžeme omezit přijetím následujících konvencí:
 - Vnější závorky můžeme vynechat.
 - Logické spojky uspořádáme do *prioritní* stupnice $\neg, \wedge, \vee, \supset, \equiv$. Priorita spojek se snižuje zleva doprava. Tedy nejvyšší prioritu má negace, pak konjunkce, atd.
 - V případě, že o prioritě vyhodnocení nerozhodnou ani závorky ani prioritní stupnice, vyhodnocujeme formuli zleva doprava. Tak např. formuli $p \supset q \supset r \supset s$ vyhodnocujeme tak, jakoby byla zapsána ve tvaru $((p \supset q) \supset r) \supset s$.
 - U vícečlenných konjunkcí nebo disjunkcí není třeba uvádět závorky, tj. např. místo $((p \vee q) \vee r)$ nebo $(p \vee (q \vee r))$ lze psát pouze $p \vee q \vee r$. Jinými slovy, konjunkce a disjunkce jsou *asociativní*.
4. *Pozor!* Implikace není asociativní, zde záleží na uzávorkování. Tedy např. formule

$$A = (p \supset (q \supset r)), \quad B = ((p \supset q) \supset r)$$

nejdou ekvivalentní. Snadno to ověříme dle Tab. 3. Formule A bude pravdivá pro $p = 0$, a to bez ohledu na pravdivost q a r . Formule B je však nepravdivá pro ohodnocení $p = 0$ a $r = 0$.

Příklad:

Následující posloupnost formulí ilustruje postup konstrukce složené formule podle Definice 2, II). V prvním sloupci je zobrazen postup konstrukce složené formule striktně podle definice a v druhém s maximálním využitím konvencí šetřících závorky.

Podle definice	S využitím konvencí
p, q	p, q
$(\neg p), (\neg q), (p \wedge q)$	$\neg p, \neg q, p \wedge q$
$((\neg p) \vee (\neg q)), (\neg(p \wedge q))$	$\neg p \vee \neg q, \neg(p \wedge q)$
$((\neg p) \vee (\neg q)) \equiv (\neg(p \wedge q))$	$\neg p \vee \neg q \equiv \neg(p \wedge q)$

Tab. 5. Konvence vynechávání závorek

Tuto konvenci však doporučujeme příliš nezneužívat a závorky raději použijeme vždy, když chceme vyznačit strukturu formule. Tak např. formulí na čtvrtém řádku by bylo vhodnější a přehlednější zapsat bez toho, že bychom brali v úvahu vyšší prioritu disjunkce nad ekvivalencí, tedy takto:

$$(\neg p \vee \neg q) \equiv \neg(p \wedge q).$$

2.1.5. Význam (sémantika) formulí výrokové logiky

Význam neboli *sémantika* složených formulí je dána tím, za jakých okolností je daná formule pravdivá. Otázka, zda je složená formule pravdivá, nedává sama o sobě dobrý smysl. Její pravdivost závisí na tom, zda jsou pravdivé atomické formule, ze kterých je složena a také na způsobu, jak je složena, tedy na tom, jaké spojky obsahuje. Tak například formule $p \vee q$ je pravdivá v případě, že alespoň jeden z výroků zastupovaných proměnnými p, q je pravdivý, jinak je nepravdivá, viz Tab. 3. Při určování pravdivosti složené

formule musíme tedy vzít v úvahu všechny možné kombinace přiřazení pravdivostních hodnot 0, 1 výrokovým proměnným, které se ve formuli vyskytují. Takováto přiřazení (čili funkce) budeme nazývat *ohodnocení* neboli *valuace* v . Způsob, jak určit pravdivost složené formule pro jednotlivá ohodnocení si nejlépe opět znázorníme pravdivostní tabulkou. Ukážeme si to na příkladě.

Uvažme formuli $(\neg p \equiv q)$. Abychom určili, pro která ohodnocení je pravdivá, sestojíme její pravdivostní tabulku.

p	q	$\neg p$	$(\neg p \equiv q)$
1	1	0	0
1	0	0	1
0	1	1	1
0	0	1	0

Vidíme, že formule je pravdivá pro ohodnocení $p=1, q=0$ a $p=0, q=1$. Taková ohodnocení, při kterých je daná formule pravdivá, nazýváme *modely formule* a formule, která má alespoň jeden model, se nazývá *splnitelná*.

Mějme dále formuli $\neg p \supset (q \vee r)$ a určíme její modely. Jelikož se ve formuli vyskytují tři proměnné, její pravdivostní tabulka bude mít 2^3 tj. osm řádků.

p	q	r	$\neg p$	$q \vee r$	$\neg p \supset (q \vee r)$
1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	0	0

Vidíme, že formule je nepravdivá pouze při jednom ohodnocení, a to $p=0$, $q=0$ a $r=0$. Všechna ostatní ohodnocení jsou jejími modely. Kdyby byla všechna ohodnocení jejími modely, byla by to tzv. *tautologie*, ale to není. Tedy rovněž tato formule je pouze splnitelná.

Zkoumejme dále pomocí pravdivostní tabulky formuli $(\neg p \vee \neg q) \equiv \neg(p \wedge q)$.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg(p \wedge q)$	$(\neg p \vee \neg q) \equiv \neg(p \wedge q)$
1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

Vidíme, že *všechna* ohodnocení jsou jejími modely. Tato formule je *tautologie*.

Tautologie je tedy takový výrok, který nemůže být nepravdivý. Výše uvedená formule zastupuje poměrně složitou tautologii, je to jeden ze zákonů výrokové logiky, a to de Morganův zákon pro negaci konjunkce. Jako příklady jednoduchých tautologií mohou sloužit např. výroky „Prší nebo neprší“, čili formule $p \vee \neg p$, nebo „Jestliže prší, pak prší“, čili formule $p \supset p$.

Opakem tautologie je tzv. *kontradikce*, která nemůže být za žádných okolností pravdivá, tedy formule, která nemá *žádný* model. Typickým příkladem jednoduché kontradikce je formule $(p \wedge \neg p)$.

Negací tautologie obdržíme kontradikci a naopak. Tedy jak snadno nahlédneme, kontradikce je rovněž formule

$$\neg[(\neg p \vee \neg q) \equiv \neg(p \wedge q)]$$

neboť je to negace tautologie.

Na závěr tohoto odstavce si zopakujeme důležité pojmy, které jsme zde poznali.

Valuace neboli *ohodnocení* je funkce $\{p, q, r, \dots\} \rightarrow \{0,1\}$, která každé výrokové proměnné přiřazuje pravdivostní hodnotu.

Model formule f výrokové logiky je takové ohodnocení, pro které nabývá formule f hodnotu Pravda (1).

Formule je *splnitelná*, pokud má alespoň jeden model.

Formule je *tautologie* (neboli *logicky pravdivá*), je-li každé ohodnocení jejím modelem.

Formule je *kontradikce* (neboli *nesplnitelná*), pokud nemá žádný model.

2.1.6. Formalizace tvrzení v jazyce výrokové logiky

V předchozích odstavcích jsme zavedli jazyk výrokové logiky, ve kterém tedy můžeme formalizovat způsob skládání jednoduchých výroků do výroků složených. Jazyk výrokové logiky je poměrně jednoduchý a nyní již by mělo být zřejmé, jak a do jaké míry můžeme v tomto jazyce formalizovat tvrzení přirozeného jazyka. Prostě nahradíme jednotlivé atomické výroky proměnnými p, q, \dots , a spojky přirozeného jazyka nahradíme symboly logických spojek $\neg, \wedge, \vee, \supset$ a \equiv . Tak např. výrok

Není pravda, že je-li mokro, pak prší
zapíšeme jako formuli

$$\neg(p \supset q)$$

kde výrok „je mokro“ je nahrazen proměnnou p a výrok „prší“ proměnnou q .

Je samozřejmé, že v takovémto velice jednoduchém systému nezachycuje formalizace výroků přirozeného jazyka

zdaleka jejich význam. Právě naopak, abstrahujeme od veškeré vnitřní struktury jednoduchých výroků a jejich význam redukuje na Pravda (1) či Nepravda (0). Avšak ani v tomto systému není formalizace vždy zcela jednoduchá a jednoznačná. Uvedeme nyní několik zásad, jak využívat jazyk výrokové logiky. Půjde hlavně o to, která spojení přirozeného jazyka lze nahradit logickými spojkami a jak.

1. Spojka *negace* (\neg) odpovídá vyjádřením jako „*není pravda, že ...*“, „*ne-*“, apod. Je to unární spojka, nespojuje dva výroky.

Příklad: Necht' proměnná p zastupuje výrok „Praha je velkoměsto“. Pak výroky jako „Není pravda, že Praha je velkoměsto“ nebo „Praha není velkoměsto“ analyzujeme pomocí formule $\neg p$.

2. Spojka *konjunkce* (\wedge) odpovídá v přirozeném jazyce zhruba spojkám „*a*“, „*ale*“, někdy také pouze čárka, apod. Je to spojka *komutativní*, to znamená, že $p \wedge q$ je ekvivalentní formuli $q \wedge p$.

Příklad: Necht' proměnná

p zastupuje výrok „Praha je velkoměsto“,
 q zastupuje „Praha je hlavní město ČR“,
 r zastupuje „v Praze je sídlo prezidenta ČR“ a
 s zastupuje výrok „ $2+3=5$ “.

Pak analýza následujících složených výroků bude vypadat takto:

„Praha je hlavní město ČR, ale není to velkoměsto“:

$$q \wedge \neg p$$

„Praha je hlavní město ČR a je to sídlo prezidenta ČR“:

$$q \wedge r$$

„Praha je velkoměsto, $2+3=5$ “:

$$p \wedge s$$

Pozor! Ne každou spojku "a" v přirozeném jazyce lze analyzovat pomocí konjunkce. Tak např. následující výroky budou z hlediska výrokové logiky jednoduché:

"Jablka a hrušky se pomíchaly".

"Přišel jsem domů a zatopil".

U prvního výroku jde o to, že jablka a hrušky se *navzájem* pomíchaly, tedy nejsou zde spojeny dva jednoduché výroky „Jablka se pomíchala“ a „Hrušky se pomíchaly“.

Ve druhém případě sice máme dva jednoduché výroky „Přišel jsem domů“, „Zatopil jsem“, avšak nejsou spojeny konjunktivně. Důvodem je to, že je zde zamlčena časová následnost, nejprve jsem přišel domů a pak jsem zatopil. Takovéto spojení není komutativní, avšak spojka konjunkce komutativní je. Kdybychom toto spojení analyzovali konjunktivně $p \wedge q$, pak by náš výrok musel být ekvivalentní výroku $q \wedge p$, tj. „Zatopil jsem a přišel domů“, což samozřejmě není.

3. Spojka *disjunkce* (\vee) odpovídá v přirozeném jazyce spojením pomocí "nebo", „anebo“, „či“, „případně“, apod. Je to rovněž spojka *komutativní*, to znamená, že $p \vee q$ je ekvivalentní formuli $q \vee p$.

Příklad: Necht' proměnná

p zastupuje výrok "Osobní auta mají přední náhon"

q zastupuje výrok "Osobní auta mají zadní náhon"

Pak analýza výroku "Osobní auta mají přední nebo zadní náhon" bude $p \vee q$.

Podobně můžeme výrok "Napoleon diktoval nebo se procházel" formalizovat pomocí formule $p \vee q$.

Pozor! Spojka disjunkce (\vee) je ve výrokové logice chápána jako *nevylučující se nebo*.¹⁶ Tedy formule $p \vee q$ je pravdivá pro valuaci $p=1, q=1$. Osobní auta mohou mít přední nebo zadní náhon (nebo obojí), Napoleon mohl diktovat při tom, když se procházel, apod. V našich příkladech budou tedy oba složené výroky pravdivé i v případě, že jsou pravdivé *oba* atomické výroky.

V přirozeném jazyce je však „nebo“ často užíváno ve *vylučujícím se* smyslu, tj. jako „buď, anebo“.

V tom případě bychom měli při analýze použít jinou spojku, a to *alternativu* neboli *nonekvivalenci*, což je spojka číslo 9 v Tabulce 2. Jelikož pro ni nezavádíme speciální symbol, můžeme ji vyjádřit jako negaci ekvivalence.

Příklad: Výroky

„Tento muž je buď ženatý, anebo svobodný“

„Zůstanu doma, nebo půjdu do školy“

budeme místo disjunkce $p \vee q$ přesněji analyzovat formulí $\neg(p \equiv q)$.

4. Spojka *implikace* (\supset) odpovídá spojením jako „jestliže, pak“, „když, tak“, „je-li, pak“, apod.

Je to jediná binární spojka, která *není komutativní*, proto nazýváme první člen implikace **antecedent**, druhý **konsekvant**. Implikace, jako ostatně všechny výrokové spojky, nepředpokládá *žádnou obsahovou souvislost* mezi antecedentem a konsekvantem, proto bývá někdy nazývána *materiálová implikace* (středověk „*suppositio materialis*“). Implikace tedy (na rozdíl od častých případů v přirozeném jazyce) nezachycuje ani příčinnou ani časovou vazbu.

¹⁶ Viz Tabulka 3.

Příklady:

”Jestliže $1+1=2$, pak železo je kov” (pravdivý výrok)
formalizujeme jako $p \supset q$, kde p zastupuje antecedent $1+1=2$ a q konsekvent železo je kov.

”Jestliže existují ufovi, tak jsem papež” formalizujeme rovněž jako $p \supset q$, kde p zastupuje antecedent existují ufovi a q konsekvent jsem papež.

Pozn.: Co tím dotyčný vlastně tvrdí? Jelikož předpokládáme, že říká pravdu, a evidentně není papež (konsekvent je nepravdivý), musí být nepravdivý rovněž antecedent, tedy dotyčný chce říct, že ufovi neexistují.

5. Spojka *ekvivalence* (\equiv) odpovídá spojením pomocí ”právě tehdy, když”, ”tehdy a jen tehdy, když”, apod., avšak ne ”tehdy, když”, což je implikace.

Příklady:

”Řecká vojska vyhrávala boje tehdy a jen tehdy, když o jejich výsledku rozhodovala fyzická zdatnost”: $p \equiv q$

„Přirozené číslo x je dělitelné třemi, právě tehdy když součet cifer čísla x je dělitelný třemi“: $p \equiv q$

Uvažme dále dva výroky:

a) ”Dostaneš odměnu, když vyhraješ”

\rightarrow $výhra \supset odměna$

b) ”Dostaneš odměnu tehdy a jen tehdy, když vyhraješ“

\rightarrow $výhra \equiv odměna$

Situace: Nevyhrál jsem. Ve kterém případě mohu dostat odměnu?

Řešení:

V případě ad a) mohu dostat odměnu, protože v tomto případě je *výhra* pouze *dostatečná podmínka* pro odměnu, ne však nutná. Mohu tedy dostat odměnu z jiných důvodů.

V případě ad b) však nemohu dostat odměnu, protože výrok vyjadřuje *nutnou a dostatečnou podmínku*.

Pozn.: V přirozeném jazyce se spojka ekvivalence používá zřídka, mnohem větší význam a častější použití má v exaktních vědách, zejména v matematice v definicích.

Převod z přirozeného jazyka do jazyka výrokové logiky nemusí být vždy jednoznačný.

Příklad:

”Jestliže má člověk vysoký tlak a špatně se mu dýchá nebo má zvýšenou teplotu, pak je nemocen”.

Označme jednotlivé výroky takto:

p – ”X má vysoký tlak”

q – ”X se špatně dýchá”

r – ”X má zvýšenou teplotu”

s – ”X je nemocen”

Existují dvě možné formalizace:

1. analýza: $[(p \wedge q) \vee r] \supset s$

2. analýza: $[p \wedge (q \vee r)] \supset s$

Obě formule jsou různé a nejsou ekvivalentní (tj. nemají shodnou pravdivostní funkci), ale ze zadání nepoznáme, jak bylo tvrzení myšleno. To by nebylo tak závažné, kdyby z obou formalizací plynuly stejné důsledky. Jak ale ukážeme v odst. 2.1.7, není tomu tak.

Poznamenejme dále, že ne všechny gramaticky složené věty přirozeného jazyka je možno jednoduše analyzovat jako složené výroky. Jedná se zejména o spojky vyjadřující příčinu či důvod jako „protože“, „jelikož“, „z toho důvodu“.

Příklad:

“Hokejisté prohráli kvalifikační zápas, proto se vrátili z mistrovství světa předčasně”.

Jelikož si můžeme strukturu věty zachytit schematicky jako “Protože prohráli (p), tedy se vrátili z mistrovství předčasně (v)” a toto spojení evidentně není komutativní, zdálo by se, že větu můžeme analyzovat pomocí spojky implikace: $p \supset v$. Ale pak by věta musela být pravdivá i v případě, že $\neg p$, tj. v případě, kdy hokejisté neprohráli kvalifikační zápas, což evidentně není pravda. Proto si zapamatujeme:

Spojce “protože” neodpovídá logická spojka implikace

Adekvátní analýza spojky protože a obecně vět vyjadřujících příčinu či důvod je poměrně složitý problém, který vyžaduje mnohem více expresivní logický systém, než jakým je výroková či dokonce i predikátová logika, a je tedy mimo rozsah tohoto pojednání.

Jediný způsob, jak by bylo možno ve výrokové logice zachytit pravdivostní podmínky výše uvedeného tvrzení, by bylo použití tzv. sémantického *modus ponens*: $p, p \supset v$. Z uvedené dvojice výroků pak vyplývá v .

2.1.7. Platné úsudky v jazyce výrokové logiky

Definovali jsme jazyk výrokové logiky, naučili jsme se jednoduchou metodu, jak ověřit, zda je daná formule splnitelná, tautologie nebo kontradikce, a to pomocí pravdivostní tabulky, a stručně jsem popsali zásady formalizace tvrzení v tomto jazyce. Avšak až dosud jsme se nevěnovali tomu, co jsme stanovili v kapitole 1 jako hlavní náplň logiky, a to ověřování platnosti úsudků.

Připomeňme si *Definici 1*:

Úsudek $P_1, \dots, P_n \models Z$ je *deduktivně platný* neboli *správný*, jestliže za žádných okolností není možné, aby všechny premisy P_1, \dots, P_n byly pravdivé a závěr Z nepravdivý.

Nebo druhá možnost, jak definovat platný úsudek, kterou jsme také uvedli, je tato:

Úsudek $P_1, \dots, P_n \models Z$ je *deduktivně platný* neboli *správný*, jestliže předpoklad, že premisy P_1, \dots, P_n jsou pravdivé a závěr Z je nepravdivý, vede ke sporu.

Jak tyto definice využijeme ve výrokové logice? Co jsou ony okolnosti či možnosti, o kterých se v definici mluví? Jak jsme již poznali, ve výrokové logice nemáme jinou možnost, jak je zachytit, než jako kombinace pravdivosti (1) či nepravdivosti (0) atomických výroků vstupujících do výroku složeného, čili pomocí valuací. Aby byl úsudek ve výrokové logice platný, musí závěr z předpokladů vyplývat, tj. být pravdivý ve všech případech, kdy jsou pravdivé předpoklady, tedy ve všech modelech množiny předpokladů. Dříve než definujeme výrokově-logické vyplývání, zavedeme si ještě jeden užitečný pojem, a tím je *model množiny formulí*.

Model množiny formulí $\{F_1, \dots, F_n\}$ je takové ohodnocení, pro které jsou všechny formule dané množiny, tj. F_1, \dots, F_n , pravdivé.

Příklad.

Množina formulí $\{p \supset q, \neg p, q \vee r\}$ má tyto modely:

- a) $p = 0, q = 1, r = 1$
- b) $p = 0, q = 1, r = 0$
- c) $p = 0, q = 0, r = 1$

Přesvědčíme se o tom pomocí pravdivostní tabulky.

p	q	r	$p \supset q$	$\neg p$	$q \vee r$
1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	0

Všimněme si ještě, že množina formulí má stejné modely, jako *konjunkce* jejích prvků. Jistě, dle definice spojky konjunkce je formule tvaru $A \wedge B$ pravdivá pro nějakou valuaci v , právě když jsou pro tuto valuaci v pravdivé obě formule A, B .

Množina formulí nemusí mít žádný model. V tom případě řekneme, že je tato množina *kontradiktorická*, neboli *sporná* (také *nesplnitelná*). Např. množina $\{p \supset q, p, \neg q\}$ je sporná, nemá model. Jistě, modelem atomické formule p je $p=1$. Modelem $\neg q$ je $q=0$. Ale to je právě jediný případ, kdy je implikace $p \supset q$ nepravdivá.

Nyní již můžeme přistoupit k definici výrokově-logického vyplývání.

Definice 3 (*výrokově-logické vyplývání*). Necht' P_1, \dots, P_n, Z jsou formule výrokové logiky. Pak formule Z (*výrokově logicky vyplývá*) z předpokladů P_1, \dots, P_n , právě když je Z pravdivá ve všech modelech množiny předpokladů P_1, \dots, P_n .

Důsledek 1: Úsudek $P_1, \dots, P_n \models Z$ je *deduktivně platný*, právě když každý model množiny $\{P_1, \dots, P_n\}$ je také modelem formule Z .

Důsledek 2: Úsudek $P_1, \dots, P_n \models Z$ je *deduktivně platný*, právě když množina $\{P_1, \dots, P_n, \neg Z\}$ nemá model, je sporná.

Důsledek 3 (sémantická věta o dedukci):

Úsudek $P_1, \dots, P_n \models Z$ je deduktivně platný, právě když je formule $(P_1 \wedge \dots \wedge P_n) \supset Z$ tautologie, tj. $\models (P_1 \wedge \dots \wedge P_n) \supset Z$.

Důkaz.

a) Necht' $P_1, \dots, P_n \models Z$. Pak dle Def. 3 každá valuace v , která je modelem množiny $\{P_1, \dots, P_n\}$ je také modelem formule Z . Dle definice konjunkce je v také modelem $P_1 \wedge \dots \wedge P_n$, a jelikož je ve v pravdivá také Z , je v rovněž modelem implikace $(P_1 \wedge \dots \wedge P_n) \supset Z$. Pro jiné valuace, které nejsou modelem množiny $\{P_1, \dots, P_n\}$ a tedy ani formule $(P_1 \wedge \dots \wedge P_n)$, je tato implikace rovněž pravdivá (dle definice implikace). Tedy platí, že formule $(P_1 \wedge \dots \wedge P_n) \supset Z$ je tautologie.

b) Necht' $\models (P_1 \wedge \dots \wedge P_n) \supset Z$. Pak dle definice implikace neexistuje valuace, ve které by byla $(P_1 \wedge \dots \wedge P_n)$ pravdivá a Z nepravdivá. To znamená, že neexistuje valuace, která by byla modelem množiny $\{P_1, \dots, P_n\}$ a nebyla modelem formule Z . Tedy $P_1, \dots, P_n \models Z$.

Důsledek 1 je návodem, jak ověřit platnost úsudku *přímým důkazem*, kdežto důsledek 2 je principem *nepřímého důkazu*. Ukážeme si to opět na příkladě.

Příklad: Mějme formule vyjadřující úsudkové schéma

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ p \supset r \\ \hline \neg r \supset q \end{array}$$

Dokážeme nyní, že formule $\neg r \supset q$ logicky vyplývá z formulí $p \vee q, p \supset r$. Tedy že jakýkoli úsudek, který vznikne dosazením konkrétních výroků za proměnné p, q, r , je platný.

Provedeme jak přímý, tak nepřímý důkaz. Nejjednodušší způsob, jak to provést, je opět pomocí pravdivostní tabulky.¹⁷

Nejprve tedy přímý důkaz.

	p	q	r	$p \vee q$	$p \supset r$	$\neg r \supset q$
1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	0	1	0	1
3	1	0	1	1	1	1
4	1	0	0	1	0	0
5	0	1	1	1	1	1
6	0	1	0	1	1	1
7	0	0	1	0	1	1
8	0	0	0	0	1	0

Dle definice stačí zkontrolovat ty valuace proměnných p , q a r , ve kterých jsou obě premisy pravdivé a ověřit, zda při těchto valuacích je pravdivý také závěr. Jsou to valuace na řádcích 1, 3, 5 a 6, které jsme vyznačili tučně. Vidíme, že tomu tak opravdu je, tedy dané úsudkové schéma je platné.

Pokud bychom chtěli provést stejným způsobem *nepřímý* důkaz, sestrojili bychom pravdivostní tabulku pro formule $p \vee q$, $p \supset r$ a negovaný závěr, tj. $\neg(\neg r \supset q)$ a zkontrolovali bychom, že množina $\{p \vee q, p \supset r, \neg(\neg r \supset q)\}$ je sporná. Nebudeme to však dělat, neboť na to lze přijít jednoduchou úvahou. Pro ty valuace, ve kterých nejsou obě premisy pravdivé (tj. řádky 2, 4, 7 a 8) platí, že nemohou být modelem naší množiny. Zbylé valuace, tj. řádky 1, 3, 5 a 6, však rovněž nemohou být modelem naší množiny, neboť pro tyto valuace není pravdivá třetí formule, tj. $\neg(\neg r \supset q)$.

¹⁷ Zatím jsme jiný způsob nepoznali, avšak to neznamená, že tento způsob je nejefektivnější. Jelikož velikost tabulky roste exponenciálně vzhledem k počtu proměnných, je tento způsob právě naopak málo efektivní. Proto se naučíme také lepší důkazové postupy.

Ukážeme si nyní ještě jednu jednoduchou metodu, jak provést nepřímý důkaz, aniž bychom sestrojovali pravdivostní tabulku. Budeme předpokládat, že existuje valuace, ve které jsou formule předpokladů pravdivé a závěr nepravdivý, a ukážeme, že tento předpoklad vede ke sporu, tedy že taková valuace neexistuje:

$p \vee q,$	$p \supset r$	$ $	$\neg r \supset q$	
1	1		0	
			1	0
1	0			
	1		0	
	0			

předpoklad

spor

Vysvětlení:

2. řádek: aby byla implikace $\neg r \supset q$ nepravdivá, musí být $\neg r=1$ a $q=0$.
3. řádek: Jelikož je $q=0$, musí být $p=1$, aby byla disjunkce $p \vee q$ pravdivá.
4. řádek: Je-li $\neg r=1$, musí být $r=0$. Ale dle 3. řádku je $p=1$, tj. implikace $p \supset r = 0$, což je spor s předpokladem.

Vidíme, že předpoklad pravdivosti premis a nepravdivosti závěru vede ke sporu, tedy dané úsudkové schéma je platné.

Dosadíme-li nyní v takovém platném schématu za jednotlivé výrokové proměnné výroky přirozeného jazyka, dostaneme platný úsudek. Např. můžeme dosadit takto:

$p =$ je úterý, $q =$ je středa, $r =$ koná se přednáška z logiky

Platný úsudek, který jsme obdrželi je tento:

Je úterý nebo středa
Je-li úterý, koná se přednáška z logiky

Jestliže se nekoná přednáška z logiky, je středa

Dle Důsledku 3 (sémantická věta o dedukci) můžeme z našeho platného úsudkového schématu odvodit další platná schémata, např. takto:

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ p \supset r \\ \neg r \\ \hline q \end{array}$$

Dosazením obdržíme další platný úsudek:

Je úterý nebo středa
Je-li úterý, koná se přednáška z logiky
Ale přednáška z logiky se dnes nekoná

Tedy je středa

2.1.8. Cvičení

Cvičení 1. Ověřte na základě pravdivostní tabulky, že formule $(p \supset (q \supset r))$ a $((p \supset q) \supset r)$ nejsou ekvivalentní. Pro která ohodnocení proměnných p , q a r se jejich pravdivostní hodnoty nerovnají?

Cvičení 2. Ověřte na základě pravdivostní tabulky, že množina výroků z kapitoly 1 je sporná:

1. X přešel na kvalifikovanější práci.
2. X dobře rozumí mzdovým otázkám.
3. Jestliže X přešel na kvalifikovanější práci, pak je správné, aby jeho žádost byla projednána.
4. Jestliže je správné, aby jeho žádost byla v komisi projednána, pak by neměl být členem komise.
5. Rozumí-li výtečně mzdovým otázkám, měl by být členem komise.

Cvičení 3. Dokažte sporem platné úsudky z Cvičení 1.5.2 a 1.5.3.

Cvičení 4. Předpokládejme, že jsou pravdivé tyto tři výroky:

- a) Jestliže Xaver pojede autobusem a autobus se zpozdí, pak Xaver zmešká schůzku.
- b) Xaver nepůjde domů, jestliže (zmešká schůzku a bude smutný).
- c) Jestliže Alena nepočká, pak Xaver bude smutný a půjde domů.

Uvažte, která z následujících tvrzení z daných předpokladů vyplývají a dokažte to.

- 1) Jestliže Xaver pojede autobusem a autobus se zpozdí, Alena počká.
- 2) Jestliže Xaver zmešká schůzku a půjde domů, Alena nepočká.
- 3) Jestliže se autobus zpozdí, pak buď Xaver nepojede autobusem, anebo nezmešká schůzku.
- 4) Xaver bude smutný, jestliže (se autobus zpozdí nebo Xaver zmešká schůzku).
- 5) Jestliže Xaver půjde domů a pojede autobusem, pak Xaver nebude smutný, jestliže se autobus zpozdí.

*Cvičení 5. Pravdomluvci a lháři.*¹⁸

Varianta a)

V jisté zemi žijí lidé, kteří na každou otázku odpovídají pouze Ano nebo Ne, a někteří zásadně vždy lžou (lháři) a jiní zásadně mluví vždy pravdu (pravdomluvci). K smrti unavený turista přijde na rozcestí, kde jedna cesta vede do města a druhá do pouště. Na křižovatce není žádný ukazatel, ale stojí zde místní obyvatel pan X. Jakou jedinou otázku typu Ano/Ne musí turista panu X položit, aby se dověděl, která cesta vede k záchraně, tj. do města?

Varianta b)

V jisté zemi opět žijí pravdomluvci a lháři, ale také lidé „obojetní“, kteří někdy mluví pravdu a jindy lžou, a to zcela náhodně a nezávisle na otázce. Žiznivý turista přijde do hospody, kde sedí tři hosté. Jeden z nich je pravdomluvec, druhý je lhář a třetí je obojetný, turista však neví kdo je kdo. Hostinský řekne turistovi. Můžete mým hostům položit tři

¹⁸ Existuje poměrně velké množství různých variant těchto úloh založených na „pravdomlvcích a lhářích“. Tyto úlohy a mnohé další příklady v této knize jsem čerpala z knihy Manna (1981).

otázky typu Ano/Ne a požádat vždy kohokoli z nich, aby odpověděl. Pokud po vyslechnutí odpovědí rozpoznáte, kdo z nich je kdo, můžete u mne pít až do večera na účet podniku. Jaké tři otázky má žízňivý turista položit?

Návod: Využijte první otázku k tomu, abyste našli někoho, kdo není obojetný (je tedy pravdomluvec nebo lhář). Tomu pak položíte zbývající dvě otázky.

2.2. Jazyk predikátové logiky

V předchozí kapitole jsme viděli, že jazyk výrokové logiky je poměrně chudý. Umožňuje nám sice formalizovat způsob skládání jednoduchých výroků ve výroky složené, ale nijak v něm nemůžeme zachytit strukturu jednotlivých atomických výroků. Jednoduché výroky proto přispívají do celkového vyhodnocení ať už platnosti úsudku nebo pravdivosti výroku složeného pouze svou pravdivostní hodnotou. Proto bývá někdy výroková logika charakterizována jako algebra pravdivostních hodnot. Viděli jsme také, že v mnoha případech to stačí k tomu, abychom dokázali platnost úsudku, ovšem pouze takového, jehož platnost nezávisí na struktuře atomických výroků. Avšak úsudky, jejichž platnost na této struktuře závisí, již ve výrokové logice nedokážeme.

Uvažme jednoduchý příklad.

Všechny opice mají rády banány.
Judy je opice.

Judy má ráda banány.

Z hlediska výrokové logiky zde máme tři *atomické* výroky, a nemáme jinou možnost, než je nahradit výrokovými proměnnými, např. p , q , r . Ovšem úsudek $p, q \vdash r$ pochopitelně platný není, neboť pro valuaci $p=1$, $q=1$ a $r=0$ máme případ, kdy by byly pravdivé premisy a nepravdivý závěr.

Přitom ale náš úsudek evidentně platný je, neboť předpoklad nepravdivosti závěru, tj. že Judy nemá ráda banány, je ve sporu s pravdivostí premis. Jestliže Judy je opice a nemá ráda banány, pak nemůže být pravdivá první premisa, že všechny opice mají rády banány.

Jak jsme ukázali v kap. 1, má tento úsudek platné schéma, a to

Všechna P jsou Q . a je P .
a je Q .

Dosadíme-li za symbol P vlastnost být opicí, za symbol Q vlastnost mít rád banány, a za symbol a individuum Judy, dostaneme právě náš platný úsudek.

Podobně můžeme použít další platné schéma:

Všechna P jsou Q . a není Q .
a není P .

Ponecháme-li interpretaci symbolů P a Q , a za symbol a dosadíme např. individuum Alík, dostaneme další platný úsudek, který není dokazatelný v jazyce výrokové logiky:¹⁹

Všechny opice mají rády banány.
Alík nemá rád banány.

Alík není opice.

Struktura jednotlivých výroků může být samozřejmě složitější. Mohou vyjadřovat nejen *vlastnosti* individuálních objektů, ale také *vztahy* mezi nimi. Uvažme např. tyto výroky:

- Každý, kdo má rád Jiřího, bude spolupracovat s Milanem.
- Milan nekamarádí s nikým, kdo kamarádí s Láďou.
- Petr bude spolupracovat pouze s kamarády Karla.

¹⁹ Termín interpretace užíváme prozatím v jeho intuitivním významu. Brzy však tento důležitý pojem přesně definujeme.

Co z toho vyplývá?

Např. to, že jestliže má Petr rád Jiřího, pak Milan kamarádí s Karlem, a jestliže Karel kamarádí s Lád'ou, pak Petr nemá rád Jiřího.

Jistě uznáte, že odvození těchto důsledků z daných předpokladů nebude již tak triviální. Naučíme se však později poměrně jednoduchou *rezoluční metodu* dokazování, ve které to nebude problém. Ovšem k tomu, abychom mohli s takovými výroky a úsudky pracovat, je užitečné je opět nejprve formalizovat a na to nestačí jazyk výrokové logiky.

Musíme jej obohatit tak, abychom v něm mohli vyjadřovat *vlastnosti* objektů zájmu (tzv. individuí) a *vztahy* mezi nimi. K tomu nám budou sloužit *predikátové symboly*. Navíc potřebujeme mít možnost nějakým způsobem tyto objekty zájmu, tj. *individua označit*. K tomu nám budou sloužit tzv. *termy*. Navíc budeme chtít, abychom mohli vyjádřit skutečnost, že některá tvrzení jsou pravdivá pro *všechna* či jen *některá* individua. K tomu nám budou sloužit *kvantifikátory*. Zavedeme proto jazyk predikátové logiky prvního řádu, ve kterém to bude možné. Nejprve však opět několik příkladů.

Úsudek z úvodu této kapitoly budeme formalizovat takto:

$$\forall x [O(x) \supset B(x)]$$

$O(j)$

$B(j)$

Vysvětlení:

Formuli $\forall x [O(x) \supset B(x)]$ čteme takto: pro všechna (\forall) individua x platí, že má-li x vlastnost O (tj. $O(x)$), pak má také vlastnost B (tj. $B(x)$). Formule $O(j)$ a $B(j)$ pak znamenají, že individuum j má vlastnost O či B .

Podobně, chceme-li formalizovat tvrzení, že *některé* opice mají rády banány, zapíšeme to formulí

$$\exists x [O(x) \wedge B(x)]$$

Symbol x je tzv. *individuová proměnná*. Označuje libovolný prvek (individuum) naší oblasti zájmu (tzv. universa diskursu), a to v závislosti na *valuaci* v . Tedy v jedné valuaci to může být individuum Judy a v jiné Alík. Proměnná je tedy jednoduchý *term*, neboť označuje individua.

Pozor! Ve výrokové logice máme proměnné p, q, r, \dots , které zastupují *výroky*, tedy jejich ohodnocením dostáváme pravdivostní hodnotu. V predikátové logice 1. řádu však máme *individuové proměnné*, které zastupují prvky předmětné oblasti, tedy jejich ohodnocením (valuací) obdržíme individua.

Symbole \forall, \exists jsou tzv. *kvantifikátory*, a to *všeobecný* (\forall) a *existenční* (\exists). Jejich význam je zhruba tento: aby byla formule $\exists x (F)$ či $\forall x (F)$ pravdivá, musí být formule F pravdivá pro *některá* resp. *všetchna* individua označená proměnnou x .

Symbole O a B jsou tzv. *predikáty*. V těchto formulích zastupují *vlastnosti individuí*.²⁰ Predikátové symboly mohou zastupovat také vztahy mezi individui. Předpoklady a), b) a c), viz výše, o tom kdo má koho rád, s kým kamarádí a s kým spolupracuje, formalizujeme takto:

$$\begin{aligned} \forall x [R(x,j) \supset S(x,m)] \\ \forall y [K(y,l) \supset \neg K(m,y)] \\ \forall z [S(p,z) \supset K(z,k)] \end{aligned}$$

Symbole x, y, z jsou individuové proměnné. Máme zde ale také další druh termů, které označují individua, a to individuové *konstanty*. Jsou to j, m, l, p a k . Konstanty

²⁰ Toto je poněkud nepřesné. V predikátové logice 1. řádu, jak brzy uvidíme, jsou predikáty interpretovány jako podmnožiny universa, čili jako populace (extense) daných vlastností.

označují vždy jeden určitý prvek dané předmětné oblasti, tj. universa diskursu, nezávisle na valuaci. V naší zamýšlené interpretaci to budou po řadě Jiří, Milan, Lád'a, Petr a Karel. Ovšem v jiné interpretaci nad jiným universem to mohou být třeba čísla 1, 2, 3, 4 a 5.

Predikátové symboly R , S a K označují v naší zamýšlené interpretaci po řadě vztahy *mít rád*, *spolupracovat* a *kamarádit se*.²¹ Všimněme si, že tyto vztahy nemusí být symetrické, tedy např. $R(p,j)$ nemusí být ekvivalentní s $R(j,p)$. Jestliže má Petr rád Jiřího, neznamená to, že také Jiří má rád Petra, a naopak.

Nyní by již mělo být jasné, jaké typy symbolů potřebujeme v jazyce predikátové logiky 1. řádu. Především musíme definovat *termy*, které budou sloužit k označování prvků universa, a teprve pak *formule*, které budou moci nabývat pravdivostních hodnot Pravda nebo Nepravda. Formule vzniknou aplikací predikátového symbolu na termy, které označují prvky universa.

Poznamenejme ještě, že zatím jsme v našich příkladech poznali pouze atomické termy, tj. proměnné a konstanty. Termy však mohou být i složené. Vzniknou aplikací symbolu označujícího funkci, tzv. *funkčního symbolu*, na termy. V odst. 2.1.2 jsme poznali pojem (totální) funkce. Víme, že je to zobrazení f typu $A \rightarrow B$, které každému prvku množiny A přiřadí právě jeden prvek množiny B . Je-li a prvek množiny A a b prvkem B , značíme $a \in A$, $b \in B$, pak skutečnost, že prvku a je funkcí f přiřazen prvek b značíme obvykle $f(a) = b$.

Naše funkce mohou být n -ární, tj. doména funkce může být Kartézský součin n množin. Víme, že např. funkce sčítání je typu $N \times N \rightarrow N$. Funkční symbol f tedy můžeme aplikovat např. na konstanty a , b , dostáváme *složený term* $f(a,b)$. Pokud

²¹ Opět je to řečeno poněkud nepřesně. Brzy uvidíme, že tyto symboly označují *relace*, tj. extense čili populace těchto vztahů. Přesněji to však bude možno vyjádřit až poté, co definujeme matematický pojem relace.

pak interpretujeme symbol f jako sčítání (+) a konstanty a, b jako označující čísla 2 a 3, dostaneme $+(2,3)$, neboli (v běžnější infixní notaci) $2+3$. Označili jsme takto číslo 5. Přitom číslo 5 můžeme označit nekonečně mnoha funkčními způsoby, např. jako $2+3$, nebo jako $6-1$, atd.

Náš jazyk však bude symbolický, bude tedy podléhat interpretaci, proto budeme užívat funkční symboly f, g, h , atd. jako označující funkce. Poznamenejme ještě, že ke každému funkčnímu a predikátovému symbolu je přiřazeno nezáporné číslo n ($n \geq 0$), tzv. *arita*, udávající počet argumentů daného funkčního symbolu nebo predikátu.

Nyní již můžeme přistoupit k definici.

Definice 4 (*jazyk predikátové logiky 1. řádu*).

I. **Abeceda predikátové logiky** je tvořena následujícími skupinami symbolů:

- a) Logické symboly
 - i) individuové proměnné: x, y, z, \dots (příp. s indexy)
 - ii) symboly pro spojky: $\neg, \wedge, \vee, \supset, \equiv$
 - iii) symboly pro kvantifikátory \forall, \exists
 - iv) případně binární predikátový symbol = (predikátová logika s rovností)
- b) Speciální symboly
 - i) predikátové symboly: P, Q, R, \dots (příp. s indexy)
 - ii) funkční symboly: f, g, h, \dots (příp. s indexy)
- c) Pomocné symboly (závorky): $(,), [,], \{, \}$

II. **Gramatika**, která udává, jak tvořit:

- a) **termy**
 - i) každý symbol proměnné je *atomický term*
 - ii) jsou-li t_1, \dots, t_n ($n \geq 0$) termy a je-li f n -ární funkční symbol, pak výraz $f(t_1, \dots, t_n)$ je term; pro $n = 0$ se jedná o nulární funkční symbol, neboli individuovou

konstantu, značíme a, b, c, \dots ; pro $n > 0$ se jedná o složený term.

iii) jen výrazy dle i) a ii) jsou termy

b) **formule**

- i) je-li P n -ární predikátový symbol a jsou-li t_1, \dots, t_n termy, pak výraz $P(t_1, \dots, t_n)$ je *atomická formule*
- ii) jsou-li t_1 a t_2 termy, pak výraz $(t_1 = t_2)$ je *atomická formule*
- iii) je-li výraz A formule, pak $\neg A$ je *složená formule*
- iv) jsou-li výrazy A a B formule, pak výrazy $(A \vee B)$, $(A \wedge B)$, $(A \supset B)$, $(A \equiv B)$ jsou *složené formule*
- v) je-li x proměnná a A formule, pak výrazy $\forall x A$ a $\exists x A$ jsou *složené formule*
- vi) jen výrazy dle i) – vi) jsou *formule*

Poznámky

- 1) Jazyk predikátové logiky, jak byl vymezen výše, je jazyk logiky *1. řádu*, pro něž je charakteristické to, že *jediný přípustný typ proměnných jsou individuové proměnné*. Pouze individuové proměnné lze vázat kvantifikátory. (V logice 2. řádu jsou povoleny i predikátové proměnné.)
- 2) Zápis formulí můžeme zjednodušit na základě následujících konvencí o vynechávání závorek:
 - Elementární formule a formuli nejvyššího řádu netřeba závorkovat (vnější závorky vynecháváme).
 - Závorky je možné vynechávat v souladu s následující prioritní stupnicí symbolů: (\forall, \exists) , \neg , \wedge , \vee , \supset , \equiv .
 - V případě, že o prioritě vyhodnocení nerozhodnou ani závorky ani prioritní stupnice, vyhodnocujeme formuli zleva doprava.
 - Speciálně vzhledem k asociativitě konjunkce a disjunkce, netřeba při zápisu vícečlenných konjunkcí a disjunkcí užívat žádné závorky.

- Stejně jako v jazyce výrokové logiky však **nedoporučujeme prioritní konvenci příliš zneužívat, a závorky raději umístíme všude tam, kde by mohla vzniknout pochybnost o struktuře formule.**

Příklad: Následující posloupnosti symbolů jsou dobře utvořené formule:

- $P(a), P(f(x),y)$
atomické formule, vnější závorky vynechány
- $P(a) \wedge Q(x,y) \wedge R(a,x)$
konjunkce atomických formulí, závorky vynechány vzhledem k asociativitě konjunkce
- $\forall x \exists y [P(a) \wedge Q(x,y) \wedge R(a,x)]$
závorky zde vyznačují dosah kvantifikátorů

Proměnná, který se vyskytuje v dosahu nějakého kvantifikátoru, je tímto kvantifikátorem *vázaná*. Jak uvidíme v odstavci o sémantice, je takovýto výskyt kvantifikátorem ovlivněn. Vázaná proměnná se chová zcela jinak než volná proměnná, která není v dosahu žádného kvantifikátoru. Proto definujeme.

Definice 5 (*volné a vázané proměnné*)

Výskyt proměnné x ve formuli A je vázaný, jestliže je součástí nějaké podformule $\forall x B(x)$ nebo $\exists x B(x)$ formule A .

*Proměnná x je vázaná ve formuli A , má-li v A vázaný výskyt. Výskyt proměnné x ve formuli A , který není vázaný, nazýváme *volný*.*

Proměnná x je volná ve formuli A , má-li v A volný výskyt.

Formule, v níž každá proměnná má buď všechny výskyty volné nebo všechny výskyty vázané, se nazývá *formulí s čistými proměnnými*.

Formule se nazývá *uzavřenou*, neobsahuje-li žádnou volnou proměnnou. Formule, která obsahuje aspoň jednu volnou proměnnou se nazývá *otevřenou*.

Příklady.

- 1) $\forall x [P(x) \vee Q(a,y)]$
Proměnná x je v této formuli vázaná, proměnná y je volná.
Formule je otevřená.
- 2) $\forall x P(x) \vee Q(a,x)$
První výskyt proměnné x je vázaný, druhý je volný.
Formule je otevřená, a není to formule s čistými proměnnými. Druhý výskyt proměnné x je vlastně jiná proměnná než x v prvním výskytu. Bylo by proto vhodnější zapsat tuto formuli tak, aby všechny proměnné byly čisté, např. $\forall x P(x) \vee Q(a,y)$
- 3) $\forall x \exists y [P(x) \supset Q(a,y)]$
Proměnná x je v této formuli vázaná všeobecným kvantifikátorem, proměnná y je vázána existenčním kvantifikátorem. Formule je uzavřená a je to formule s čistými proměnnými.

Další pojem, který budeme často potřebovat, je pojem *substituce*. Především si musíme uvědomit, co lze substituovat za co. Víme, že proměnné označují libovolný prvek universa a termy (bez volných proměnných) určitý prvek universa. Proto budeme *substituovat* (tj. dosazovat) vždy *termy za proměnné*. Jelikož však volné proměnné se chovají jinak než proměnné vázané, musíme dát při substituci pozor na to, aby žádná proměnná, která byla před substitucí volná, se nestala vázanou, tedy aby nedošlo ke kolizi proměnných. Takové substituci budeme říkat korektní.

Symbolem $A(x/t)$ označujeme formuli, která vznikne z formule A *substitucí termu t za proměnnou x* . Má-li být substituce *korektní* musí být term t *substituovatelný za proměnnou x* ve formuli A . Aby byla substituce korektní, tedy aby byl term t substituovatelný za proměnnou x , musí být splněna následující dvě pravidla:

1. Substituovat lze *pouze za volné výskyty* proměnné x ve formuli A a při substituci nahrazujeme *všechny volné výskyty* proměnné x ve formuli A .
2. Žádná individuová proměnná vystupující v termu t se po provedení substituce x/t nesmí stát ve formuli A vázanou.

Symbolem $A(x_1, x_2, \dots, x_n/t_1, t_2, \dots, t_n)$ označujeme formuli, která vznikne z formule A korektními substitucemi x_i/t_i pro $i = 1, 2, \dots, n$. Všechny formule tvaru $A(x_1, x_2, \dots, x_n/t_1, t_2, \dots, t_n)$ nazýváme *instancemi formule A* .

Příklad: Nechť formulí $A(x)$ je: $P(x) \supset \forall y Q(x, y)$ a term t nechť je $f(y)$. Provedeme-li substituci $A(x/f(y))$, dostaneme formuli $P(f(y)) \supset \forall y Q(f(y), y)$. Vidíme, že druhý (zvýrazněný) výskyt proměnné y není volný (přitom původně zde byla volná proměnná x), takže jsme změnilí "smysl formule". Tedy term $f(y)$ není substituovatelný za x v dané formuli A .

2.2.1. Formalizace tvrzení v jazyce predikátové logiky 1. řádu

Nyní nám půjde o to, abychom co nejpřesněji zachytili význam tvrzení přirozeného jazyka v jazyce predikátové logiky 1. řádu (PL1).²² Jde tedy o analýzu výrazů přirozeného jazyka v rámci jazyka PL1. Na začátku této kapitoly jsme poznali několik příkladů, jak převést tvrzení přirozeného

²² Nadále budeme používat zkratku PL1 pro jazyk predikátové logiky prvního řádu. Neplést prosím s programovacím jazykem PL1. Jelikož se však dnes již tento jazyk téměř nepoužívá, doufáme, že nebude docházet k nedorozumění.

jazyka do tvaru formulí PL1.²³ Shrneme si nyní užitečné zásady, jak takovouto analýzu provádět.

Viděli jsme, že výrazy, které vyjadřují vlastnosti objektů zájmu nebo vztahy mezi takovými objekty zájmu nahrazujeme *predikátovými* symboly P, Q, R , atd. Výrazy, které vyjadřují funkční přiřazení nahrazujeme *funkčními* symboly f, g, h , atd. Volba predikátových a funkčních symbolů je libovolná potud, že nesmí dojít ke "kolizi vlastností, funkcí či vztahů". Jinými slovy, různé vlastnosti, vztahy a funkční přiřazení nahradíme různými symboly.

Výrazy jako "všichni", "každý", "nikdo", „žádný“, apod. překládáme všeobecným kvantifikátorem \forall , výrazy jako "někdo", "někteří", „něco“, apod. překládáme existenčním kvantifikátorem \exists . Ostatní zásady, které jsme uvedli v kapitole 2.1.6 pro výrokovou logiku, zůstávají v platnosti, neboť jazyk PL1 je rozšířením jazyka výrokové logiky.

Poznamenejme ještě jednu důležitou věc. Větu přirozeného jazyka, kterou chceme formalizovat v PL1, musíme často *přeformulovat ekvivalentním způsobem*, tj. tak, aby měla stejné pravdivostní podmínky jako původní věta. Je rovněž dobré najít takovýchto formulací více, a poté, co je zformalizujeme, ověřit, že vzniklé formule jsou opravdu ekvivalentní, tj. že mají stejné modely. Zatím to budeme dělat pouze intuitivně, protože jsme ještě nedefinovali sémantiku jazyka PL1, tedy pojem modelu formule jazyka PL1. Zde to bude poněkud složitější než ve výrokové logice, neboť takových modelů může být nekonečně mnoho, nelze je tedy zachytit konečnou tabulkou. Později se však naučíme rovněž užitečné ekvivalentní úpravy formulí.

²³ Jelikož tento jazyk byl vytvořen především pro formalizaci *matematických* tvrzení, nebude naše analýza vždy úplně dokonalá, na to jazyk predikátové logiky není dostatečně expresivní. Nicméně, mnohé platné úsudky v něm formalizovatelné jsou, a je to nejrozšířenější logický systém, je tedy užitečné se s ním podrobně seznámit.

Příklad.

“Některá prvočísla jsou sudá“ \Leftrightarrow
„Existuje x takové, že $Prvočíslo(x)$ a $Sudé(x)$ “

$$\exists x [P(x) \wedge S(x)]$$

Jiná možná ekvivalentní formulace je tato:

„Není pravda, že žádné prvočíсло není sudé“

$$\neg \forall x [P(x) \supset \neg S(x)]$$

\Leftrightarrow (kontrola)

$$\exists x \neg [P(x) \supset \neg S(x)] \Leftrightarrow \exists x [P(x) \wedge S(x)]$$

Vidíme, že naše formalizace je správná, neboť všechny formule, které jsme obdrželi, jsou ekvivalentní. V posledních dvou řádcích jsme použili *de Morganův zákon* pro negaci všeobecné formule v PL1. Říká zhruba toto:

Není-li pravda, že všechna x splňují podmínku určenou formulí A , tj. $\neg \forall x (A)$, pak některá x tuto podmínku nespĺňují, tj. $\exists x \neg(A)$, a naopak.

Podobně platí *de Morganův zákon* pro negaci existenční formule:

Není-li pravda, že některá x splňují podmínku určenou formulí A , tj. $\neg \exists x (A)$, pak žádné x tuto podmínku nespĺňuje, tj. $\forall x \neg(A)$, a naopak.

Příklad.

“Žádné prvočíсло větší než 2 není sudé“ \Leftrightarrow
„Pro všechna x platí, že je-li ($Prvočíslo(x)$ a $Větší\ x\ než\ 2$),
pak není $Sudé(x)$ “

$$\forall x [(P(x) \wedge V(x,2)) \supset \neg S(x)]$$

Tedy ekvivalentně:

„Není pravda, že některá prvočísla větší než 2 jsou sudá“

$$\neg \exists x [(P(x) \wedge V(x,2)) \wedge S(x)]$$

\Leftrightarrow (kontrola)

$$\forall x \neg [(P(x) \wedge V(x,2)) \wedge S(x)] \Leftrightarrow$$

$$\forall x [\neg (P(x) \wedge V(x,2)) \vee \neg S(x)] \Leftrightarrow$$

$$\forall x [(P(x) \wedge V(x,2)) \supset \neg S(x)]$$

Na posledním řádku jsme využili důležitý zákon výrokové logiky, který je užitečné si zapamatovat:²⁴

$$(\neg A \vee B) \Leftrightarrow (A \supset B)$$

V předposledním řádku jsme využili *de Morganův zákon* výrokové logiky pro negaci konjunkce, který říká toto:

Není-li pravda, že A a B , tj. $\neg(A \wedge B)$, pak *non- A* nebo *non- B* , tj. $(\neg A \vee \neg B)$, a naopak.

Podobně platí *de Morganův zákon* pro negaci disjunkce:

Není-li pravda, že A nebo B , tj. $\neg(A \vee B)$, pak *ani- A* nebo *ani- B* , tj. $(\neg A \wedge \neg B)$, a naopak.

Na tomto místě si můžeme trochu blíže vysvětlit význam kvantifikátorů. Představme si, že universum diskursu, tj. oblast, jejímž prvkům přisuzujeme nějaké vlastnosti a vztahy mezi nimi, má konečný počet prvků a_1, a_2, \dots, a_n . Pak tvrzení, že podmínka zadaná formulí F platí pro všechny prvky této oblasti, tj. $\forall x F(x)$, je ekvivalentní tvrzení, že je pravdivá

²⁴ Ověřte tento zákon pravdivostní tabulkou.

formule $F(a_1) \wedge F(a_2) \wedge \dots \wedge F(a_n)$. Podobně tvrzení, že podmínka F platí pro některé prvky, tj. $\exists x F(x)$, je ekvivalentní tvrzení, že je pravdivá formule $F(a_1) \vee F(a_2) \wedge \dots \wedge F(a_n)$. Samozřejmě, je-li těchto prvků nekonečně mnoho, např. kdybychom mluvili o množině přirozených čísel $\{0, 1, 2, \dots\}$, pak takovéto nekonečné konjunkce nebo disjunkce nejsme schopni zapsat. K tomu nám právě slouží kvantifikátory. Můžeme tedy říct, že

Všeobecný kvantifikátor je zobecnění konjunkce a existenční kvantifikátor je zobecnění disjunkce pro nekonečný počet prvků. Schematicky:

$$\forall x F(x) \Leftrightarrow F(a_1) \wedge F(a_2) \wedge \dots \wedge F(a_n) \wedge \dots$$

$$\exists x F(x) \Leftrightarrow F(a_1) \vee F(a_2) \vee \dots \vee F(a_n) \vee \dots$$

Nyní by také mohl být jasnější smysl de Morganových zákonů. Opět schematicky, neboť nekonečná konjunkce či disjunkce nejsou dobře utvořené formule:

$$\begin{aligned} \neg \forall x F(x) &\Leftrightarrow \neg (F(a_1) \wedge F(a_2) \wedge \dots \wedge F(a_n) \wedge \dots) \Leftrightarrow \\ &(\neg F(a_1) \vee \neg F(a_2) \vee \dots \vee \neg F(a_n) \vee \dots) \Leftrightarrow \exists x \neg F(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg \exists x F(x) &\Leftrightarrow \neg (F(a_1) \vee F(a_2) \vee \dots \vee F(a_n) \vee \dots) \Leftrightarrow \\ &(\neg F(a_1) \wedge \neg F(a_2) \wedge \dots \wedge \neg F(a_n) \wedge \dots) \Leftrightarrow \forall x \neg F(x) \end{aligned}$$

Dalším příkladem ilustrujeme ještě dvě důležité zásady. Po všeobecném kvantifikátoru následuje většinou formule ve tvaru implikace, kdežto po existenčním kvantifikátoru formule ve tvaru konjunkce. Přesněji, věty typu „Některá P jsou Q “ analyzujeme formulí tvaru $\exists x [P(x) \wedge Q(x)]$, a věty typu „Všechna P jsou Q “ formulí tvaru $\forall x [P(x) \supset Q(x)]$.

Příklad:

Někteří studenti (S) jsou pilní (P) \Leftrightarrow
Existují x taková, že x je student a x je pilný
 $\exists x [S(x) \wedge P(x)]$

Všichni studenti (S) jsou pilní (P) \Leftrightarrow
Pro všechna x platí, že je-li x student, pak je pilný
 $\forall x [S(x) \supset P(x)]$

Není Pravda, že všichni studenti jsou pilní \Leftrightarrow
 $\neg \forall x [S(x) \supset P(x)]$
Někteří studenti nejsou pilní
 $\exists x \neg [S(x) \supset P(x)] \Leftrightarrow$
 $\exists x [S(x) \wedge \neg P(x)]$

Není pravda, že někteří studenti jsou pilní \Leftrightarrow
 $\neg \exists x [S(x) \wedge P(x)]$
Žádný student není pilný \Leftrightarrow
Pro všechna x platí, že je-li x student, pak není pilný
 $\forall x \neg [S(x) \wedge P(x)] \Leftrightarrow$
 $\forall x [\neg S(x) \vee \neg P(x)] \Leftrightarrow$
 $\forall x [S(x) \supset \neg P(x)]$

Vidíme, že rovněž kontrola správnosti analýzy pomocí ekvivalentních formulací s využitím de Morganových zákonů ukazuje, že naše analýzy jsou adekvátní. Tedy ještě jednou shrneme:

„Některá P jsou Q “	$\exists x [P(x) \wedge Q(x)]$
“Všechna P jsou Q “	$\forall x [P(x) \supset Q(x)]$

Vzpomeneme si ještě na příklad z kapitoly 1.2:

1. „Někteří účetní vystavují faktury“
2. „Všichni účetní vystavují faktury“
3. „Pouze účetní vystavují faktury“

Analýza tvrzení 1 je zřejmá:

$$\exists x [U(x) \wedge V(x)].$$

Predikát U zde zastupuje vlastnost být účetním a predikát V vlastnost vystavovat faktury. Jak je to s tvrzeními 2 a 3? Výše jsme uvedli, že v tvrzení 2 je vlastnost být účetním *dostatečná podmínka* pro to, aby dotyčný mohl vystavovat faktury. Proto bude atomická formule $U(x)$ stát na pozici *antecedentu* implikace:

$$\forall x [U(x) \supset V(x)]$$

Dodáme-li další předpoklad, že Adam je účetní, tj.

$$U(a)$$

dostáváme důsledek, který z obou vyplývá, totiž že Adam vystavuje faktury:

$$V(a)$$

Naproti tomu v tvrzení 3 je vlastnost být účetním *nutná podmínka* pro to, aby dotyčný mohl vystavovat faktury, proto je $U(x)$ v pozici *konsekventu* implikace:

$$\forall x [V(x) \supset U(x)]$$

Dodáme-li předpoklad, že Adam není účetní, tedy nesplňuje nutnou podmínku pro to, aby mohl vystavovat faktury,

$$\neg U(a)$$

obdržíme důsledek, že Adam nemůže vystavovat faktury:

$$\neg V(a)$$

Máme tedy dvě instance jednoduchých platných úsudkových schémat:

Všechna P jsou Q . a je P .	$\forall x [U(x) \supset V(x)]$ $U(a)$
a je Q .	$V(a)$

Pouze P jsou Q . a není P .	$\forall x [V(x) \supset U(x)]$ $\neg U(a)$
a není Q .	$\neg V(a)$

Poslední příklad, který nyní analyzujeme, bude výrok

Adam obdivuje pouze vítěze.

Opět je zde ono poněkud zrádné slovíčko „pouze“. Tedy být vítězem je *nutná podmínka* pro to, aby Adam někoho obdivoval. Tedy jestliže Adam někoho obdivuje, pak to musí být vítěz. Proto bude analýza vypadat takto:

$$\forall x [O(a,x) \supset V(x)]$$

Predikát O zde zastupuje vztah *obdivovat (někoho)* a predikát V vlastnost být vítězem. Přidáme-li podmínku, že Bertík je vítěz,

$$V(b)$$

neplyne z toho, že jej Adam obdivuje. Pokud však Bertík není vítěz,

$$\neg V(b)$$

pak z toho plyne, že jej Adam neobdivuje:

$$\neg O(a,b)$$

Jedná se o variantu druhého z výše uvedených platných úsudkových schémat.

2.2.2. Sémantika formulí predikátové logiky

Jelikož je jazyk predikátové logiky 1. řádu bohatší než jazyk výrokové logiky, bude význam jednotlivých formulí rovněž bohatší a jeho určení složitější.²⁵ Ve výrokové logice to bylo jednoduché. Prostě jsme vyzkoušeli všechny možné kombinace přiřazení pravdivostních hodnot výrokovým proměnným zastupujícím atomické výroky a určili pravdivostní hodnotu celé formule zastupující výroky složené na základě významu logických spojek, jejichž význam je pevný. Je dán jejich pravdivostní funkcí.

V predikátové logice je samozřejmě význam logických spojek stejný jako ve výrokové logice, tedy je dán pevně, a to pravdivostní funkcí. Rovněž význam kvantifikátorů je pevný, nepodléhá interpretaci. Jak jsem již uvedli, význam všeobecného kvantifikátoru (\forall) se dá charakterizovat jako „pro všechny prvky universa“ a význam \exists jako „některé prvky universa“.

Ovšem význam speciálních symbolů, tj. predikátových a funkčních symbolů, podléhá interpretaci. Až dosud jsme jej charakterizovali pouze na příkladech a vágně. Říkali jsme, že predikát s aritou 1 zastupuje nějakou vlastnost (např. být vítězem, být prvočíslem, ...) kdežto predikát s aritou 2 a vyšší zastupuje vztah (např. obdivovat někoho, být větší, apod.). Naproti tomu funkční symboly zastupují (extenzionální a totální) funkce. Funkce jsme definovali v kapitole 2.1.2. Připomeňme, že funkce $f: A \rightarrow B$ je zobrazení z domény A do oboru hodnot B , které každému prvku z A přiřadí právě jeden prvek oboru B .

Avšak jak definovat vlastnost nebo vztah?

²⁵ Dle mých zkušeností právě tato problematika činí studentům největší potíže, proto prosím čtenáře, aby této kapitole věnoval velkou pozornost.

2.2.2.1. Pojem relace

V tomto odstavci ukážeme, že v predikátové logice používáme opět definici extenzionální, tj. množinovou. Ilustrujeme to nejprve na příkladě. Vlastnost být prvočíslem můžeme chápat jako podmnožinu množiny přirozených čísel, a to těch, které mají přesně dva dělitele.

$$\text{Prvočísla} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$$

Vlastnost být sudý může být opět definována jako podmnožina přirozených čísel, a to těch, které jsou dělitelné dvěma.

$$\text{Sudá} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots\}$$

Podobně budeme chápat také vlastnosti nematematické. Např. vlastnost být vítězem chápeme jako množinu těch individuí (tj. podmnožinu všech individuí tj. universa), která jsou vítězové.²⁶

Vztahy jsou v predikátové logice chápány rovněž extenzionálně, tj. množinově. Tak např. vztah mezi přirozenými čísly být větší než je chápán jako množina *uspořádaných dvojic* takových, že první číslo je ostře větší než druhé.

$$> = \{\langle 1,0 \rangle, \langle 2,0 \rangle, \dots, \langle 2,1 \rangle, \langle 3,1 \rangle, \dots, \langle 3,2 \rangle, \dots\}$$

Takovéto množiny uspořádaných dvojic nazýváme v matematice *binární relace*. Připomeňme, že množina všech možných uspořádaných dvojic prvků množin A a B (v tomto pořadí) se nazývá *Kartézský součin* množin A , B , značíme $A \times B$. Shrňme:

²⁶ Vidíme, že u nematematických vlastností je tato definice poněkud zjednodušující, avšak jazyk PL1 byl původně navržen jako jazyk formalizace matematiky.

*Binární relace R na množině M je
podmnožina Kartézského součinu $M \times M$.
Obecně, n-ární relace na množině M je
podmnožina Kartézského součinu $M \times \dots \times M$.*

Poznamenejme, že podmnožiny universa, které přiřazujeme interpretací predikátům s aritou 1, můžeme chápat jako unární relace.

Všimněme si dále, že *funkce* chápána extenzionálně je rovněž speciální příklad relace, je to zprava jednoznačná relace. Tedy podmínka pro to, aby relace R byla funkcí se dá zapsat takto:

$$\forall x \forall y \forall z \{ [R(x,y) \wedge R(x,z)] \supset y=z \}$$

Jazyk PL1 je formální jazyk, tedy jednotlivé formule jsou pouhé posloupnosti symbolů, které bez interpretace nemají žádný význam. Proto na otázku, zda jsou např. formule $\forall x P(x, f(x))$, $\exists x P(x, f(x))$ pravdivé, nelze odpovědět, nevíme-li, co znamenají symboly P a f . *Záleží na interpretaci.*

Ani formule, které vznikly formalizací výroků přirozeného jazyka, nemají bez interpretace význam. Např. výše jsme měli příklad výroku Adam obdivuje pouze vítěze, který jsme formalizovali jako $\forall x [O(a,x) \supset V(x)]$. Přitom jsme předpokládali, že predikát O zde zastupuje relaci obdivovat, predikát V vlastnost být vítězem a konstanta a označuje individuum Adam. Ovšem symboly O , V , a mohou být interpretovány zcela jinak. Např., pokud bude universum diskursu množina celých čísel, pak predikát O může být interpretován jako relace být menší ($<$), konstanta a jako číslo 0 a predikát V jako podmnožina kladných celých čísel. V této interpretaci bude formule pravdivá, protože pro všechna celá čísla x platí, že pokud je 0 menší než x , pak x je kladné číslo.

Co to tedy znamená *interpretovat danou formuli F*?

2.2.2.2. Interpretace formulí PL1

Interpretace dané formule F spočívá v těchto třech krocích.

1. Především musíme zvolit předmětnou oblast, tj. universum diskursu U . Může to být jakákoli *neprázdňá množina*.
2. Interpretujeme *predikátové* symboly P, Q, \dots vyskytující se ve formuli F . To znamená, že dle jejich arity n (počtu argumentů) přiřadíme těmto symbolům n -ární *relace* R nad universem: $R \subseteq U \times \dots \times U$. Unárním predikátovým symbolům s aritou 1 přiřadíme podmnožiny universa.
3. Interpretujeme *funkční* symboly f, g, \dots vyskytující se v F . To znamená, že dle jejich arity n (počtu argumentů) jim přiřadíme *funkce* nad universem, tj. zobrazení $U \times \dots \times U \rightarrow U$. Jelikož konstanty jsou funkční symboly bez argumentů neboli s aritou 0, přiřadíme jim prvky universa.

Uvedeme *příklad*.

Najdeme nějaké interpretace výše uvedených formulí

$$\forall x P(a, f(x)) \text{ a } \exists x P(a, f(x)).$$

V těchto formulích se vyskytuje jeden predikátový symbol P s aritou 2, tedy mu musíme přiřadit binární relaci nad universem. Dále se zde vyskytuje jeden nulární funkční symbol, konstanta a , které přiřadíme prvek universa, a jeden unární funkční symbol f , kterému musíme přiřadit funkci o jednom argumentu.

Interpretace 1.

- a) Universum $U = N$ (množina přirozených čísel).
- b) $P \rightarrow$ relace $<$
- c) $a \rightarrow$ číslo 0
- d) $f \rightarrow$ funkce druhá mocnina (x^2)

Jakmile zvolíme takovouto interpretaci I , můžeme vyhodnotit, zda je daná formule v této interpretaci I pravdivá. Formuli vyhodnocujeme „zevnitř“. Nejprve určíme prvky universa označené termy. V našem případě konstanta a označuje číslo 0, to je jednoduché. Term $f(x)$ však musíme vyhodnotit nejen v závislosti na interpretaci symbolu f , ale také na valuaci v proměnné x . Valuace přiřazují proměnné prvky universa. Jelikož je symbolu f přiřazena funkce druhá mocnina, dostáváme:

pro $v(x) = 0$ je $f(x) = x^2 = 0$,
 pro $v(x) = 1$ je $f(x) = x^2 = 1$,
 pro $v(x) = 2$ je $f(x) = x^2 = 4$,
 pro $v(x) = 3$ je $f(x) = x^2 = 9$,
 pro $v(x) = 4$ je $f(x) = x^2 = 16$,
 atd.

Dále vyhodnotíme pravdivost atomické formule $P(a, f(x))$, a to opět v závislosti na valuaci proměnné x . Jelikož je symbolu P přiřazena relace $<$, dostáváme:

pro $v(x) = 0$ je $P(a, f(x)) = (0 < x^2) = (0 < 0)$, tj. Nepravda
 pro $v(x) = 1$ je $P(a, f(x)) = (0 < x^2) = (0 < 1)$, tj. Pravda
 pro $v(x) = 2$ je $P(a, f(x)) = (0 < x^2) = (0 < 4)$, tj. Pravda
 pro $v(x) = 3$ je $P(a, f(x)) = (0 < x^2) = (0 < 9)$, tj. Pravda
 atd.

Pozn.: Použili jsme zde běžné infixní značení. Jinak bychom psali např. $\langle 0,0 \rangle \notin <$, nebo $\langle 0,1 \rangle \in <$, neboť dvojice $\langle 0,0 \rangle$ není prvkem relace $<$, kdežto dvojice $\langle 0,1 \rangle$ je prvkem relace $<$.

Teprve nyní můžeme vyhodnotit pravdivost celé složené formule, a to $\forall x P(a, f(x))$ a $\exists x P(a, f(x))$. Vidíme, že první formule $\forall x P(a, f(x))$ je v dané interpretaci *nepravdivá*, protože není pravda, že pro *všechny* prvky zvoleného universa je podformule $P(a, f(x))$ pravdivá. Neplatí to pro číslo 0. Formule $\exists x P(a, f(x))$ je v této interpretaci *pravdivá*, protože je pravda,

že pro *některé* prvky universa je podformule $P(a, f(x))$ pravdivá, totiž pro všechna čísla kromě nuly.

Interpretaci, ve které je daná formule pravdivá, nazveme *model* formule. Tedy Interpretace 1 není modelem formule $\forall x P(a, f(x))$, avšak je modelem formule $\exists x P(a, f(x))$.

Změníme nyní interpretaci tak, že všechna přiřazení ponecháme, pouze symbolu P přiřadíme relaci \leq . Dostáváme tuto strukturu:

Interpretace 2:

- a) Universum $U = N$ (množina přirozených čísel).
- b) $P \rightarrow$ relace \leq
- c) $a \rightarrow$ číslo 0
- d) $f \rightarrow$ funkce druhá mocnina (x^2)

Snadno ověříme, že v této interpretaci jsou obě formule pravdivé. Tedy Interpretace 2 je modelem obou formulí.

Zkusme ještě interpretaci nad jiným universem. Za tím účelem však pozměníme naše dvě formule, a budeme interpretovat formule

$$\forall x P(x, f(x)) \text{ a } \exists x P(x, f(x)).$$

Interpretace 3:

- a) Universum $U =$ množina osob
- b) $P \rightarrow$ relace být mladší než
- c) $f \rightarrow$ funkce, která každé osobě přiřazuje její biologickou matku

Snadno nahlédneme, že obě formule jsou v této interpretaci pravdivé, neboť pro všechny osoby (tedy i pro některé) platí, že jsou mladší než jejich matka. Interpretace 3 je modelem formulí $\forall x P(x, f(x))$ a $\exists x P(x, f(x))$.

Formule v našich příkladech byly až dosud *uzavřené*, neobsahují žádné volné proměnné. Jak však budeme

vyhodnocovat otevřené formule s volnými proměnnými?
Ukážeme si to opět na příkladě. Uvažme formuli

$$\exists y P(x, y)$$

Vidíme, že proměnná x je zde volná, není vázána žádným kvantifikátorem. Zkusme ji interpretovat. Jelikož, jak jsme již několikrát zmínili, jazyk PL1 je vhodný zejména k formalizaci matematických tvrzení, zvolíme opět universum číselné. Ve formuli se nevyskytují žádné funkční symboly, stačí tedy interpretovat binární predikátový symbol P .

Interpretace 4:

- a) Universum $U = N$ (množina přirozených čísel).
- b) $P \rightarrow$ relace $<$

Zkusme nyní naši formuli vyhodnotit. Její pravdivost však závisí nejen na zvolené interpretaci, avšak také na valuaci volné proměnné x :

pro $v(x) = 0$ je $P(x, y)$ pravdivá např. pro valuaci $v(y) = 1$.

pro $v(x) = 1$ je $P(x, y)$ pravdivá např. pro valuaci $v(y) = 2$.

pro $v(x) = 2$ je $P(x, y)$ pravdivá např. pro valuaci $v(y) = 3$.

pro $v(x) = 3$ je $P(x, y)$ pravdivá např. pro valuaci $v(y) = 4$.

Atd.

Vidíme, že pro *libovolnou* valuaci proměnné x najdeme vždy *nějakou* valuaci proměnné y takovou, že $P(x, y)$ nabude hodnoty Pravda. Tedy rovněž formule $\exists y P(x, y)$ je pravdivá v dané Interpretaci 4 pro *libovolnou* valuaci volné proměnné x .

Řekneme, že otevřená formule F je v *dané interpretaci pravdivá*, nabude-li v této interpretaci hodnotu Pravda pro libovolné ohodnocení jejích volných proměnných. Interpretaci, ve které je daná otevřená formule pravdivá, opět nazveme jejím *modelem*. Tedy Interpretace 4 je modelem formule $\exists y P(x, y)$.

Uvažme nyní atomickou otevřenou formuli

$$P(a, x)$$

Interpretace 5:

- a) Universum $U = Z$ (množina celých čísel).
- b) $P \rightarrow$ relace \leq
- c) $a \rightarrow$ číslo 0

V této interpretaci je formule $P(a,x)$ sice *splnitelná*, avšak není v ní pravdivá. Pro takové valuace proměnné x , které přiřadí proměnné x čísla kladná nebo 0, je pravdivá, avšak pro takové valuace, které přiřadí čísla záporná, je nepravdivá.

Na základě těchto příkladů by mohlo nyní být jasné, že formule $A(x)$ s volnou proměnnou x je v dané interpretaci I pravdivá, právě když je v I pravdivá uzavřená formule $\forall x A(x)$. Formule $\neg A(x)$ je v I splnitelná, právě když je v I pravdivá formule $\exists x A(x)$. Symbolicky,

$$\begin{array}{l} \models_1 A(x) \Leftrightarrow \models_1 \forall x A(x) \\ A(x) \text{ je splnitelná v } I \Leftrightarrow \models_1 \exists x A(x) \end{array}$$

V jazyce PL1 je tedy situace složitější než ve výrokové logice, kde jsme rozeznávali pouze formule logicky pravdivé (tautologie), splnitelné a nesplnitelné (kontradikce).

Definice logicky pravdivé formule a kontradikce je v PL1 podobná.

Formule F jazyka PL1 je logicky pravdivá, značíme $\models F$, je-li pravdivá v každé interpretaci, tj. v každé interpretaci a pro každou valuaci případných volných proměnných nabývá hodnoty Pravda.

Naproti tomu formule F jazyka PL1 je nesplnitelná (kontradikce), není-li splnitelná v žádné interpretaci, tj. nenabývá hodnoty Pravda v žádné interpretaci pro žádnou valuaci.

Kategorie splnitelných formulí se však dělí na dvě skupiny.

Formule F jazyka PL1 je pravdivá v interpretaci I , značíme $\models_I F$, jestliže F nabývá v I hodnoty Pravda pro všechny valuace proměnných.

Formule F jazyka PL1 je splnitelná v interpretaci I , jestliže existuje valuace v , pro kterou F nabývá hodnoty Pravda v I , značíme $\models_I F[v]$.

Na závěr ještě zopakujeme, co je to model formule a definujeme model množiny formulí.

Model formule F je interpretace I , ve které je F pravdivá: $\models_I F$.

Model množiny formulí $\{F_1, \dots, F_n\}$ je interpretace I , ve které jsou všechny formule této množiny pravdivé: $\models_I F_1, \dots, \models_I F_n$.

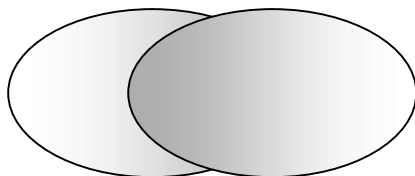
Nyní uvedeme ještě několik příkladů interpretace formulí, které obsahují pouze unární predikátové symboly P, Q . Především, unární predikátové symboly s jedním argumentem interpretujeme jako podmnožiny universa. Označme tyto podmnožiny, tj. obory pravdivosti predikátů P, Q v dané interpretaci nad daným universem U jako P^U a Q^U .

Především, formule $P(x) \wedge Q(x)$, $P(x) \vee Q(x)$ s volnou proměnnou x definují průnik a sjednocení oborů pravdivosti P^U a Q^U . Formule $P(x) \wedge Q(x)$ je totiž v dané interpretaci pravdivá pro všechny valuace proměnné x , které přiřadí x ty prvky universa, které leží jak v P^U tak v Q^U . Formule $P(x) \vee Q(x)$ je v dané interpretaci pravdivá

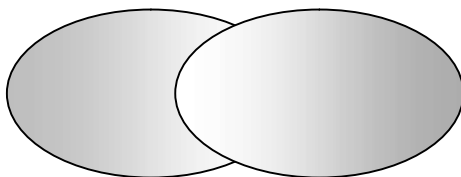
pro všechny valuace proměnné x , které přiřadí x ty prvky universa, které leží v P^U nebo v Q^U .

Můžeme si to znázornit obrázkem:

$$P(x) \wedge Q(x)$$



$$P(x) \vee Q(x)$$



Pro libovolné P, Q , a jejich obory pravdivosti P^U, Q^U v libovolné interpretaci I dále platí:

$$|=_I \forall x [P(x) \supset Q(x)] \quad \Leftrightarrow \quad P^U \subseteq Q^U$$

P^U je podmnožinou Q^U

$$|=_I \exists x [P(x) \wedge Q(x)] \quad \Leftrightarrow \quad P^U \cap Q^U \neq \emptyset$$

průnik P^U a Q^U je neprázdný

$$|=_I \forall x [P(x) \vee Q(x)] \quad \Leftrightarrow \quad P^U \cup Q^U = U$$

sjednocení P^U, Q^U je celé universum

$$|=_I \exists x [P(x) \vee Q(x)] \quad \Leftrightarrow \quad P^U \cup Q^U \neq \emptyset$$

sjednocení P^U, Q^U je neprázdné

Příklad.

1) Všechny velryby jsou savci

$$\forall x [V(x) \supset S(x)]$$

Tedy nutně, množina velryb je podmnožinou savců.

2) Někteří studenti jsou zaměstnaní

$$\exists x [S(x) \wedge Z(x)]$$

Průnik množiny studentů a zaměstnaných je neprázdný.

2.2.3. Platné úsudky v jazyce PL1

V jazyce PL1 můžeme formalizovat rovněž ty platné úsudky, které z hlediska výrokové logiky jsou neplatné, neboť jejich platnost je dána vnitřní významovou strukturou jednotlivých atomických výroků. Jak jsme již poznali, je to dáno tím, že jazyk PL1 je bohatší. Ovšem cena, kterou za to zaplatíme, není zanedbatelná.

Ve výrokové logice můžeme snadno rozhodnout, zda je daná formule tautologie, kontradikce nebo splnitelná, či zda je daný úsudek výrokově-logicky platný. Stačí sestrojít konečnou pravdivostní tabulku. V predikátové logice to však již takto snadno nejde. Je to dáno tím, že formule jazyka PL1 (pokud to není kontradikce) může mít *nekonečně mnoho modelů*. Vždyť již volba universa je zcela libovolná. Není tedy možno sestrojít nějakou konečnou tabulku na základě které bychom rozhodli, zda je daná formule tautologie či zda je daný úsudek platný. Proto

Problém logické pravdivosti není v predikátové logice 1. řádu rozhodnutelný.

Jinými slovy, neexistuje algoritmus, který by pro libovolnou formuli na vstupu vydal po konečném počtu kroků odpověď Ano/Ne na otázku, zda je daná formule logicky pravdivá.²⁷

Situace však není beznadějná. Za prvé,

problém logické pravdivosti je v PL1 *parciálně rozhodnutelný*.

To znamená, že existují algoritmy takové, že pokud formule na vstupu je logicky pravdivá, pak algoritmus po konečném počtu kroků odpoví správně, tedy Ano. Pokud je formule kontradikce, pak rovněž odpoví správně, tj. Ne. Pokud však je formule na vstupu pouze splnitelná, algoritmus může cyklovat, tedy neodpoví.²⁸

Za druhé, platnost mnohých jednodušších úsudků můžeme ověřit sémanticky, tj. množinovými úvahami nad vztahy mezi modely jednotlivých předpokladů a závěru. Prostě znázorníme situaci, ve které jsou předpoklady pravdivé a ověříme, že libovolná taková situace zajišťuje pravdivost závěru.

No a konečně za třetí, existují formální (syntaktické) důkazové metody, které parciálně rozhodují platnost úsudku či logickou pravdivost. Z těchto metod se budeme věnovat především tzv. *rezoluční metodě dokazování*, která má velký význam zejména v informatice, neboť je plně algoritmizovaná a tedy se dá snadno automatizovat. V této kapitole se nyní

²⁷ Je to jeden z důsledků první Gödelovy věty o neúplnosti. Gödelovy věty o neúplnosti aritmetiky (1931) byly jedním z největších objevů matematické logiky minulého století, který zcela změnil tvář moderní matematiky a logiky. V této knize se však jimi zabývat nebudeme. Nicméně, zájemce najde podrobnosti např. v Duží (2005) a (2012) nebo zde:

<http://www.cs.vsb.cz/duzi/goedel.pdf>

²⁸ Jak dokázal Alonzo Church.

budeme věnovat tzv. sémantickým metodám dokazování, čili úvahám nad modely.

Nejprve však musíme definovat, co je to platný úsudek v jazyce PL1. Víme již, co je to model formule a model množiny formulí jazyka PL1, tj. interpretace, ve které jsou pravdivé. Definice logického vyplývání opět vychází ze základní Definice 1 a bude tedy naprosto analogická definici logického vyplývání ve výrokové logice. Pouze musíme mít na paměti, že model formule PL1 je interpretace, ve které je formule pravdivá, tedy mnohem bohatší struktura než pouhé ohodnocení výrokových proměnných ve výrokové logice.

Definice 6 (*logické vyplývání v PL1*). Necht' P_1, \dots, P_n, Z jsou formule jazyka predikátové logiky 1. řádu. Pak formule Z *logicky vyplývá* z předpokladů P_1, \dots, P_n , právě když je Z pravdivá ve všech modelech množiny předpokladů $\{P_1, \dots, P_n\}$.

Rovněž důsledky 1 a 2 této definice zůstávají v platnosti.

Důsledek 1: Úsudek $P_1, \dots, P_n \models Z$ je *deduktivně platný*, právě když každý model množiny $\{P_1, \dots, P_n\}$ je také modelem formule Z .

Důsledek 2: Úsudek $P_1, \dots, P_n \models Z$ je *deduktivně platný*, právě když množina $\{P_1, \dots, P_n, \neg Z\}$ nemá model, je sporná.

Podobně jako ve výrokové logice můžeme tedy úvahami nad možnými modely provádět důkaz přímý dle důsledku 1 nebo nepřímý dle důsledku 2.

Sémantická věta o dedukci, tj. důsledek 3 však platí *pouze pro uzavřené formule*. Důvod je to, jak je definován *model* formule PL1. je to taková interpretace, ve které nabývá formule hodnoty Pravda pro *všechny* valuace volných proměnných. Uvažme jednoduchý příklad. Dle definice 6 logického vyplývání platí

$$P(x) \models \forall x P(x)$$

Jistě, je-li formule $P(x)$ v nějaké interpretaci pravdivá, pak dle definice všeobecného kvantifikátoru je v této interpretaci pravdivá také formule $\forall x P(x)$. Avšak formule

$$P(x) \supset \forall x P(x)$$

není logicky pravdivá. Jako protipříklad uvažme tuto interpretaci:

$$U = N \text{ (množina přirozených čísel)}$$

$$P \rightarrow P^U = \text{množina sudých čísel } (\subset N)$$

Snadno najdeme valuaci, pro kterou formule nabývá hodnoty Nepravda, např. $v(x) = 2$ nebo $v(x) = 4, 6$, atd. Pro takovéto valuace nabývá $P(x)$ v dané interpretaci hodnoty Pravda, ale $\forall x P(x)$ hodnoty Nepravda (není pravda, že všechna přirozená čísla jsou sudá).

Můžeme tedy formulovat

Důsledek 3 (sémantická věta o dedukci v PL1).

Nechť P_1, \dots, P_n, Z jsou uzavřené formule predikátové logiky 1. řádu. Pak úsudek $P_1, \dots, P_n \models Z$ je deduktivně platný, právě když je formule $(P_1 \wedge \dots \wedge P_n) \supset Z$ logicky pravdivá, tj. právě když $\models (P_1 \wedge \dots \wedge P_n) \supset Z$.

Z toho důvodu volíme obvykle předpoklady daného úsudku jako uzavřené formule. Vždyť otevřená formule s volnými proměnnými je jaksi neúplná, nepodává úplnou informaci o tom, jaká podmínka má platit. Otevřené formule pak budou pouze jakési mezikroky v jednotlivých důkazových postupech.

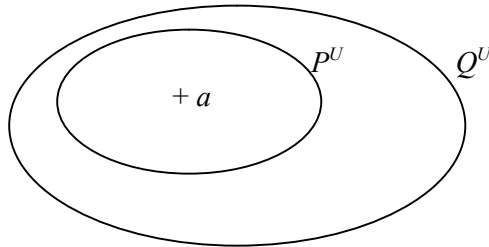
Nyní si ukážeme na příkladech, jak můžeme jednoduchými množinovými úvahami rozhodnout, zda je daný úsudek platný. Začneme těmi nejjednoduššími příklady platných schémat, která jsme uvedli v kap. 2.2.1.

$$\frac{\forall x [P(x) \supset Q(x)]}{P(a)}$$

$$Q(a)$$

Přímý důkaz.

Dle prvního předpokladu je obor pravdivosti P^U podmnožinou oboru Q^U . Dle druhého předpokladu leží prvek universa označený konstantou a v množině P^U . Tedy leží i v Q^U , neboť všechny prvky P^U leží také v Q^U . Názorně:



Nepřímý důkaz.

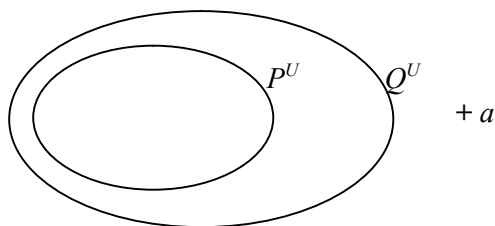
Nechť jsou pravdivé předpoklady a necht' prvek označený konstantou a neleží v Q^U . Pak ale není pravda, že všechny prvky P^U leží také v Q^U , což je spor.

$$\frac{\forall x [P(x) \supset Q(x)]}{\neg Q(a)}$$

$$\neg P(a)$$

Přímý důkaz.

Dle prvního předpokladu je obor pravdivosti P^U podmnožinou oboru Q^U . Dle druhého předpokladu neleží prvek universa označený konstantou a v množině Q^U . Tedy neleží ani v P^U , neboť všechny prvky P^U leží také v Q^U . Názorně:



Nepřímý důkaz.

Nechť jsou pravdivé předpoklady a necht' prvek označený konstantou a leží v P^U . Pak ale není pravda, že neleží v Q^U neboť všechny prvky z P^U leží také v Q^U , což je spor.

V další kapitole představíme tzv. Aristotelovu logiku, která se zabývá úsudky podobnými výše uvedeným, a to takovými, ve kterých se vyskytují pouze unární predikáty. Situace se poněkud komplikuje, jakmile naše formule obsahují predikátové symboly s aritou větší než jedna, tedy binární, ternární, atd. Víme, že v tom případě jsou takovéto predikátové symboly interpretovány nikoli jako podmnožiny universa, ale jako binární, ternární, atd. (dle arity symbolů) *relace*.²⁹ Avšak relace není snadné znázornit obrázkem tak, jak to děláme v případě jednoduchých podmnožin universa. Přesto i v tomto případě můžeme sémanticky ověřit platnost úsudku. Ukážeme si opět na příkladě.

Příklad.

Ověříme platnost tohoto úsudkového schématu:

$$\forall x [P(a,x) \supset Q(x)]$$

²⁹ Pojem relace zavedl do logiky a matematiky až koncem 19. století slavný německý matematik, logik a filosof Gottlob Frege, zakladatel moderní logiky. Do té doby se užíval v podstatě pouze Aristotelův systém.

$$\frac{\neg Q(b)}{\neg P(a,b)}$$

Může to být formalizace např. tohoto úsudku:

Adam obdivuje pouze vítěze.
Bertík není vítěz.

Adam neobdivuje Bertíka.

Nejprve znázorníme, jaké budou obory pravdivosti predikátů P a Q nad libovolným universem, tedy znázorníme modely formulí předpokladů. Poté ověříme, zda každá takováto situace zaručuje pravdivost závěru. Predikát P je binární, jeho interpretací bude tedy binární relace P^U , Q je unární, tedy Q^U bude množina individuí.

První premisa: ta individua, která jsou v relaci s Adamem, musí ležet v množině Q^U :

$$P^U = \{ \langle Adam, i_1 \rangle, \langle Adam, i_2 \rangle, \dots, \langle Adam, i_n \rangle, \dots \}$$

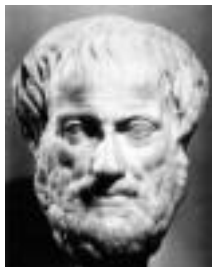
$$Q^U = \{ i_1, i_2, \dots, i_n, \dots, \text{Bertík} \}$$

Dle *druhé* premisy individuum Bertík neleží v Q^U .

Kdyby byla dvojice $\langle Adam, Bertík \rangle$ prvkem P^U , musel by dle první premisy být Bertík prvkem Q^U . Ale to není. Tedy dvojice $\langle Adam, Bertík \rangle$ není prvkem P^U , pravdivost předpokladů zaručuje pravdivost závěru, což bylo dokázat.

Vidíme, že takovéto sémantické úvahy nad modely bychom těžko automatizovali. Proto si v kapitole 4 představíme syntaktické důkazové metody, kdy se nebudeme zabývat modely formulí, ale budeme provádět důkaz pouze na základě logické formy formulí, čili jejich syntaxe. Nyní však představíme ještě Aristotelovu logiku a poměrně jednoduchou sémantickou metodu, a tou je metoda Vennových diagramů.

2.2.3.1. Aristotelova logika



Aristoteles ze Stageiry byl řecký filozof, jeden z nejvýznamnějších myslitelů ve starověku, žák Platónův. Narodil se v roce 384 př. n. l. v Thrákii (v dnešním severním Řecku) v rodině lékaře. Byl dvacet let žákem Platónovy Akademie, později založil v Aténách svoji vlastní filosofickou školu, zvanou Lykeion (Lyceum).

Aristotelovo dílo je velice rozsáhlé a mnohostranné. Zachovalo se několik stovek Aristotelových spisů, které obsahují spisy filosofické, přírodovědné, metafyzické, etické, o literatuře a rétorice, a v neposlední řadě spisy o logice, tj. *Organon*, neboli „nástroj“ ke správnému, filosofickému uvažování, myšlení.

Tradiční Aristotelova logika je dnes považována za fragment predikátové logiky 1. řádu, který je omezen pouze na jednomístné predikáty jejichž interpretací (oborem pravdivosti) je vždy *neprázdna* podmnožina universa. Tato logika byla (v podstatě jako jediná) vyučována ještě v 19. století. Umožňuje kontrolovat správnost zvláštního typu jednoduchých úsudků, které se nazývají *kategorické sylogismy*. Aristotelova logika vznikla zřejmě dříve než výroková logika, kterou zkoumali *stoici*. Stoici byli v jisté opozici vůči Aristotelovi a z jejich díla se zachovaly jen fragmenty, ze kterých je však zjevné, že používali rozvinutý systém výrokové logiky a v podstatě (i když poněkud v jiné formě) i systém predikátové logiky 1. řádu.³⁰

Aristotelova logika zkoumá tzv. *subjekt – predikátové* výroky (S-P výroky), kde S i P jsou nějaké vlastnosti (zastupované jednomístnými predikáty), a dělí se na obecné a částečné, kladné a záporné. Pro subjekt – predikátové výroky

³⁰ Viz Gahér (2006).

jsou často užívány zkratky, které jsou odvozeny z latinského *affirmo* (tvrdím) a *nego* (popírám):

SaP – Všechna S jsou P

SeP – Žádné S není P

SiP – Některá S jsou P

SoP – Některá S nejsou P

Všechny možnosti a jejich vzájemný vztah jsou znázorněny v tzv. *logickém čtverci*:

Logický čtverec znázorňuje jednoduché vztahy, které platí mezi těmito výroky.

1. *Kontradiktorické* (protikladné, jeden je vždy ekvivalentní negaci druhého):

$$P \Leftrightarrow \neg SoP$$

$$SeP \Leftrightarrow \neg SiP$$

Důkazy těchto vztahů provedeme snadno tak, že si jednotlivé úsudky zapíšeme v jazyce PL1 a použijeme *de Morganovy* zákony:

Všechna S jsou P \Leftrightarrow Není pravda, že některá S nejsou P

Důkaz (de Morgan):

$$\forall x [S(x) \supset P(x)] \Leftrightarrow \neg \exists x [S(x) \wedge \neg P(x)]$$

Žádné S není P \Leftrightarrow Není pravda, že některá S jsou P

Důkaz (de Morgan):

$$\forall x [S(x) \supset \neg P(x)] \Leftrightarrow \neg \exists x [S(x) \wedge P(x)]$$

2. *Kontrární* (z jednoho vyplývá negace druhého):

$$\text{SaP} \models \neg \text{SeP}$$

$$\text{SeP} \models \neg \text{SaP}$$

(Může však být zároveň nepravda jak SaP tak SeP (tedy ani Sap ani Sep nemusí být pravda): Všechny houby jsou jedlé, všechny houby jsou nejedlé.)

Opět, zapíšeme-li tyto úsudky v jazyce PL1, snadno ověříme jejich platnost. Nyní to provedeme na základě množinových úvah:

Všechna S jsou P \models Není pravda, že žádné S není P

$$\forall x [S(x) \supset P(x)] \models \neg \forall x [S(x) \supset \neg P(x)]$$

Důkaz (sémanticky): Je-li $S^U \subseteq P^U$, pak S^U nemůže být podmnožinou komplementu P^U , tedy *není* $S^U \subseteq \neg P^U$

Žádné S není P \models Není pravda, že všechna S jsou P

$$\forall x [S(x) \supset \neg P(x)] \models \neg \forall x [S(x) \supset P(x)]$$

Důkaz (sémanticky): Je-li $S^U \subseteq \neg P^U$ (komplementu P^U), pak S^U nemůže být podmnožinou P^U , tedy *není* $S^U \subseteq P^U$

3. *Subkontrární* (podprotivné):

$$\neg \text{SiP} \models \text{SoP}$$

$$\neg \text{SoP} \models \text{SiP}$$

(Může však být SiP i SoP pravdivé: Některé labutě jsou černé, některé labutě nejsou černé.)

Opět zapíšeme tyto úsudky v jazyce PL1 a ověříme jejich platnost:

Není pravda, že některá S jsou P \models Některá S nejsou P

$$\neg \exists x [S(x) \wedge P(x)] \models \exists x [S(x) \wedge \neg P(x)]$$

Jelikož platí ekvivalence

$$\neg \exists x [S(x) \wedge P(x)] \Leftrightarrow \forall x [S(x) \supset \neg P(x)],$$

ověříme platnost tohoto úsudku:

$$\forall x [S(x) \supset \neg P(x)] \models \exists x [S(x) \wedge \neg P(x)]$$

Důkaz: Je-li $S^U \subseteq \neg P^U$ (komplementu P^U) a $S^U \neq \emptyset$ (předpoklad *neprázdnoti oborů pravdivosti*), pak je neprázdný také průnik S^U a komplementu P^U , tj. $\exists x [S(x) \wedge \neg P(x)]$.

4. *Subalterní* (podřazené):

$$\text{SaP} \models \text{SiP}$$

$$\text{SeP} \models \text{SoP}$$

Důkaz platnosti druhého subkontrárního úsudku a subalterních úsudků je zcela analogický.

Dále platí tzv. obraty:

5. *Obraty.*

$$\text{SiP} \models \text{PiS}$$

$$\text{SeP} \models \text{PeS}$$

Někteří studenti jsou ženatí \models Některí ženatí jsou studenti
Žádný člověk není strom \models Žádný strom není člověk

$$\text{SaP} \models \text{PiS}$$

$$\text{SeP} \models \text{PoS}$$

Všichni učitelé jsou státní zaměstnanci \models Některí státní zaměstnanci jsou učitelé

Žádné jedovaté houby nejsou jedlé \models Některé jedlé houby nejsou jedovaté

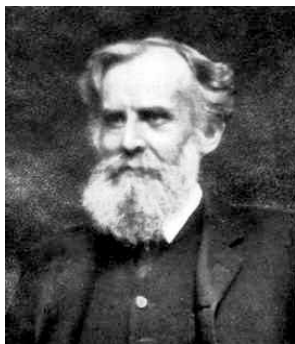
(Kategorické) **Sylogismy** jsou úsudky, které sestávají ze tří S-P výroků tvaru (4 figury):

M P	P M	M P	P M
S M	S M	M S	M S
S P	S P	S P	S P

Kombinací **a, e, i, o** lze nyní vytvořit 64 tzv. módů, z nichž jen některé jsou platné. Pro platné módy existují mnemotechnické pomůcky, které se naši rodiče učili nazpaměť:

- I. aaa, eae, aii, eio (barbara, celarent, darii, ferio)
- II. aoo, aee, eae, eio (baroco, camestres, cesare, festino)
- III. oao, aai, aii, iai, eao, eio (bocardo, darapti, datisi, disamis, felapton, ferison)
- IV. aai, aee, iai, eao, eio (bamalip, calemes, dimatis, fesapo, fresison)

My se je pochopitelně nemusíme učit nazpaměť, neboť jejich platnost můžeme snadno dokázat nebo ověřit sémanticky, na základě množinových úvah. Za tím účelem je nejčastěji používána metoda tzv. *Vennových diagramů*.



John Venn (1834 – 1923), anglický matematik, logik a filosof.

2.2.3.2. Metoda Vennových diagramů

Obory pravdivosti predikátů S , P , M zakreslíme jako (vzájemně se protínající) kroužky. Poté znázorníme situaci, kdy jsou premisy pravdivé, a to v *tomto pořadí*:

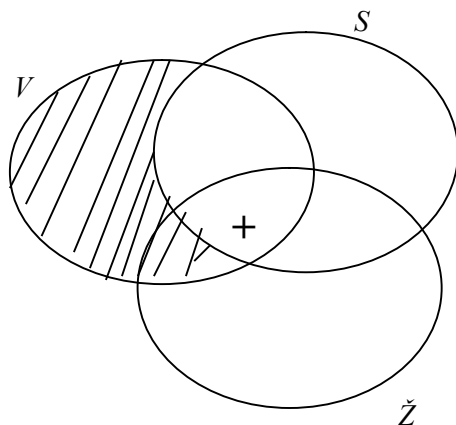
1. Vyšrafujeme plochy, které odpovídají prázdným třídám objektů
2. Označíme křížkem plochy, které jsou jistě neprázdné. Křížek přitom klademe jen tehdy, když jeho umístění je *jednoznačné*, tj. neexistuje jiná plocha, kam by mohl být umístěn

Nakonec ověříme, zda vzniklá situace znázorňuje pravdivost závěru.

Příklady:

- a) Všechny velryby (V) jsou savci (S).
Někteří vodní živočichové (Z) jsou velryby.

Někteří vodní živočichové jsou savci.



Vidíme, že úsudek je *platný*. Pravdivost závěru je zaručena pravdivostí premis, neboť na ploše, která odpovídá průniku vodních živočichů a saveců je umístěn křížek, což znamená, že tato plocha je neprázdná. Pro úplnost ještě úsudek formalizujeme v PL1:

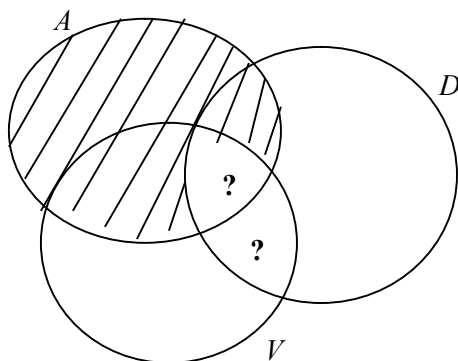
$$\forall x [V(x) \supset S(x)]$$

$$\exists x [Z(x) \wedge V(x)]$$

$$\exists x [Z(x) \wedge S(x)]$$

- b) Všechna auta (A) jsou dopravní prostředky (D)
 Všechna auta mají volant (V)

Některé dopravní prostředky mají volant



Úsudek je *neplatný*. Pravdivostí premis není zaručeno, že průnik množin dopravních prostředků a těch s volantem je neprázdný. Opět ještě formalizace:

$$\forall x [A(x) \supset D(x)]$$

$$\forall x [A(x) \supset V(x)]$$

$$\exists x [D(x) \wedge V(x)]$$

Pozn.: Neplatnost tohoto úsudku možná některého čtenáře překvapí. Jak je možné, že je tento úsudek neplatný? Vždyť přece za předpokladu pravdivosti premis musí platit, že některé dopravní prostředky mají volant, a to alespoň ta auta! Pokud si však situaci znázorníme Vennovými kroužky, zjistíme, že tomu tak není. Premisy nás opravňují pouze k vyšrafování prázdných ploch odpovídajících těmto formulím:

$$\neg\exists x [A(x) \wedge \neg V(x)]$$

$$\neg\exists x [A(x) \wedge \neg D(x)]$$

(“neexistují auta bez volantu” a “neexistují auta, která by nebyla dopravním prostředkem”). Avšak křížek na ploše odpovídající formuli $\exists x [D(x) \wedge V(x)]$, tedy průniku “volantů a dopravních prostředků” se nenachází! Jistě, vždyť pravdivost premis nám *nezaručuje existenci aut*. V době, kdy žádná auta neexistovala, byly premisy triviálně pravdivé, ale závěr být pravdivý nemusel.

Tedy ze *všeobecných premis nemůžeme usuzovat na existenci*. Je to také jeden z důsledků toho, jak v PL1 chápeme všeobecné premisy. Totiž, jak se snadno přesvědčíme, formule

$$\forall x [P(x) \supset Q(x)]$$

je pravdivá v každé interpretaci takové, která přiřadí predikátu P prázdnou množinu. Proto např. tvrzení „Všichni vodníci jsou nejlepší manažeři Microsoft“ je dle PL1 pravdivé (za předpokladu ovšem, že vodníci neexistují).³¹

Obdobný příklad zjevně nesprávného úsudku je znám od Bertranda Russella:

³¹ Takováto analýza není samozřejmě jediná možná. Přesnější by zřejmě bylo chápat věty tohoto typu tak, že mají *presupozici* existence čili neprázdnoti predikátu P . To ale v PL1 možné není, potřebovali bychom systém s větší expresivitou, např. Transparentní intensionální logiku, viz např. Duží, Materna (2012).

Všechny skleněné hory jsou hory
Všechny skleněné hory jsou skleněné

Některé hory jsou skleněné

R. M. Smullyan uvádí ve své velmi zdařilé knize “Jak se jmenuje tato knížka?” příklad uplatnění takového argumentu, pomocí kterého “dokáže” existenci jednorožce.

Poznamenejme ještě, že v tradiční Aristotelově logice je tento mód (tedy úsudkové schéma) považován za *platný*. Je to proto, že jak jsme již zmínili, Aristoteles pracuje pouze s *neprázdnými pojmy*. Dodáme-li další předpoklad, a to že existují skleněné hory, bude úsudek platný. Podobně, dodáme-li v úsudku *ad b*) příkladu 3.4.1 předpoklad *existence aut*, bude poté úsudek platný.

- c) Některí politici jsou moudří
Nikdo, kdo je moudrý, není pyšný
-

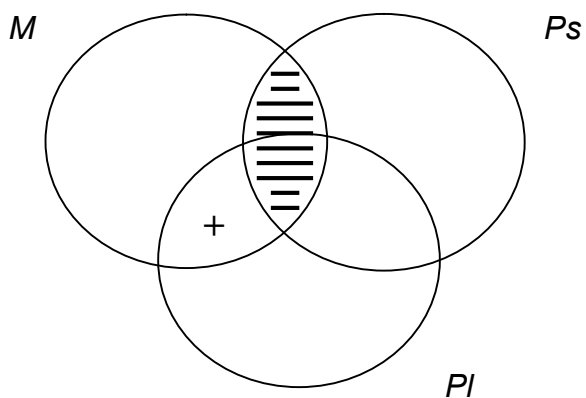
Některí politici nejsou pyšní

$$\exists x [Pl(x) \wedge M(x)]$$

$$\forall x [M(x) \supset \neg Ps(x)]$$

$$\exists x [Pl(x) \wedge \neg Ps(x)]$$

Opět znázorníme Vennovým diagramem pravdivost premis. Nejprve dle druhé premisy vyškrtáme prázdnou plochu odpovídající průniku *Moudrých (M)* a *Pyšných (Ps)*. Poté se pokusíme umístit křížek na plochu odpovídající neprázdnému průniku *Politiků (Pl)* a *Moudrých (M)*:



Úsudek je platný, pravdivost premis zaručuje pravdivost závěru.

2.2.4 Cvičení.

- 1) Analyzujte v jazyce PL1 následující výroky:
 - a) Nikdo, kdo není zapracován (P), nepracuje samostatně (S).
 - b) Ne každý talentovaný (T) spisovatel (Sp) je slavný (Sl).
 - c) Pouze zaměstnanci (Z) používají výtah (V).
 - d) Všichni zaměstnanci (Z) používají výtah (V).
 - e) Ne každý člověk (C), který hodně mluví (M), má co říci (R).
 - f) Někdo je spokojen (Sn) a někdo není spokojen.
 - g) Někteří chytrí lidé (Ch) jsou líní (L).
 - h) Nutnou podmínkou toho, aby rovnice $y = 2653/x$ měla řešení, je nenulové x .
- 2) Najděte modely formulí, které jste obdrželi v předchozím cvičení 1, a to nad universem celých čísel Z .
- 3) *Vyjádřete slovně* následující formule za předpokladu, že predikát P znamená „mít rád“ (kdo, koho), individuová konstanta m označuje Marii a individuová konstanta k Karla.

$$\exists x \exists y P(x,y)$$

$$\exists x \forall y P(x,y)$$

$$\exists y \forall x P(x,y)$$

$$\forall x \exists y P(x,y)$$

$$\forall x \forall y P(x,y)$$

$$\forall x P(x,m)$$

$$\forall y P(k,y)$$

4) Převed'te následující věty do formulí jazyka PL1 a ověřte jejich ekvivalenci pomocí *de Morganových* zákonů:

- a) Všechna prvočísla větší než 2 jsou lichá.
Je-li prvočíslo větší než 2, pak je liché.
Neexistuje prvočíslo větší než 2, které by nebylo liché.
Není-li číslo liché, pak to není prvočíslo větší než 2.
- b) Některá prvočísla nejsou lichá.
Není pravda, že všechna prvočísla jsou lichá.
- c) Někteří studenti nejsou líní.
Ne všichni studenti jsou líní.
- d) Žádné prvočíslo není sudé.
Je-li číslo sudé, pak to není prvočíslo.
Neexistuje sudé prvočíslo.
- e) Žádný učený z nebe nespádl.
Kdo spádl z nebe, není učený.
Neexistuje učený spadlý z nebe.
- f) Některá čísla jsou rovna jejich druhé mocnině.
Není pravda, že žádné číslo není rovno jeho druhé mocnině.
- g) Někteří mají rádi svou matku.
Není pravda, že nikdo nemá rád svou matku.

5) Ukažte, že formule $\exists x P(x) \supset P(a)$, kde a je individuová konstanta, není logicky pravdivá, ale je splnitelná.

Návod: Jelikož formule nemá volné proměnné, stačí nalézt interpretaci, ve které je pravdivá, a interpretaci, ve které není pravdivá.

- 6) Dokažte, že *neplatí* $\exists x P(x) \models P(a)$, tedy že formule $P(a)$ *nevyplyvá* za formule $\exists x P(x)$. Využijte přitom řešení úlohy 4).
- 7) Ověřte metodou Vennových diagramů úsudky z Cvičení 1.5.1.
- 8) Formalizujte a ověřte platnost tohoto úsudku:

Kdo hraje fotbal a hokej, ten hokej miluje.
Někteří nemilují hokej, ačkoliv jej hrají.

Někdo hraje hokej, ale ne fotbal.

Kapitola 3. Fuzzy logika

V této kapitole vyložíme základní principy fuzzy logiky. Je to obor, který se v posledních letech bouřlivě rozvíjel, a dnes je natolik rozsáhlý, že je zcela mimo možnosti této knihy podat jeho vyčerpávající přehled.³² Proto v této kapitole vyložíme pouze základní myšlenky a naznačíme možné aplikace.³³ Termín „fuzzy“ byl převzat z angličtiny, kde znamená neostrý, rozostřený, nepřesný, ale také opilý, apod. Jak říká Běhounek, tento termín přispěl k popularitě fuzzy logiky, ale také k nedorozuměním. Fuzzy logika není nepřesná: je přesnou teorií neostrých vlastností.

Viděli jsme, že v klasické logice pracujeme s výroky, které jsou striktně buď pravdivé nebo nepravdivé. V běžném jazyce však často užíváme výroky, které jsou pravdivé pouze do určité míry, neostře. Je to dáno tím, že mnohé predikáty vymezují vlastnosti, jejichž extenze nejsou přesně určeny a neexistuje tedy ostrá hranice, kdy je možno říct, že daný předmět vlastnost ještě má, a poté již ne. Jsou to vlastnosti jako mladý, starý, vysoký, nízký, dobrý, špatný, apod. Do kolika let věku je člověk ještě mladý a kdy začne být starý? Dá se říct přesně, kde přestává být krajina hornatá a stává se rovinou? Nebo dá se říct přesně, kde ve spektru začíná a končí zelená barva? To jistě ne. Aplikujeme-li v takovýchto neostrých případech klasickou dvouhodnotovou logiku,

³² O rozvoj fuzzy logiky se podstatnou měrou zasloužili čeští logici, zejména pak Petr Hájek, viz např. Hájek (1998). Teorie i významné aplikace jsou studovány také na Ostravské universitě, viz např. Novák, Perfilieva a Močkoř (1999).

³³ Ve výkladu v této kapitole se opírám o materiály z přednášky Libora Běhounka „Jak je důležité být fuzzy“, a to v Olomouci 2012.

dostáváme se do jistých problémů, které můžeme ilustrovat různými paradoxy.

Slovo „*paradox*“ má více významů. Zde je budeme používat jako označující takový myšlenkový postup, kdy vyjdeme z pravdivých předpokladů, použijeme logicky správné postupy odvozování, a přitom dojdeme k závěru, který je evidentně nepravdivý. Paradoxy znepokojovaly matematiky, logiky a filosofové již od starověku. Jistě je znepokojující, když je možno zdánlivě korektní aplikací správných logických pravidel dospět od pravdivých předpokladů k nepravdivému závěru! Podrývá to naši víru v logiku a obecně v racionální myšlení.

Již od starověku jsou známy paradoxy související s nekonečně malými veličinami, např. Zénónovy paradoxy, připisované Zénónovi z Eleje, zejména "Achilles a želva" a "Letící šíp", které zpochybňují možnost pohybu, nebo tzv. autoreferenční paradoxy, které vycházejí z vlastnosti jazyka umožňující hovořit v něm o jazyce, tedy o sobě samém. V této skupině je snad nejznámější paradox lháře, který byl údajně vysloven krétským filosofem Epimenidem z Knósu někdy okolo roku 600 př. n. l.: člověk, který o sobě říká, že lže, buď lže a tedy nelže, anebo skutečně lže, a pak mluví pravdu. Paradox typu Achilles a želva spočívá v tom, že stačí, aby pomalá želva odstartovala jen o malou chvíli dříve než rychlý Achilles, a ten ji nedohoní. Totiž v každém časovém okamžiku sice zmenší vzdálenost mezi nimi, ovšem vždy malý kousek, který je dělí, zůstává. Paradoxy tohoto typu obvykle řešíme zavedením infinitesimálního počtu, tedy posloupnost vzdálenosti Achilla a želvy konverguje k nule. Paradoxy lháře mají také různá řešení. Např. takové, že prohlásíme, že věta „ted' lžu“ vlastně nemá smysl, čili že žádný výrok nebyl vyřčen, čímž paradox odstraníme, nebo budeme přísně oddělovat jazyk a metajazyk, abychom zabránili auto-referencím.

Pro nás bude nyní z hlediska úvodu do fuzzy logiky nejzajímavější tzv. *paradox hromady* neboli *Sorités paradox*.³⁴ Představme si hromadu písku, ve které je miliarda zrněk písku. Odebráním jednoho zrnka písku hromada nepřestane být hromadou. Tedy 999 999 999 zrněk písku je hromada. Opět, odebráním jednoho zrnka tato hromada nepřestane být hromadou. Opakujeme-li tento postup miliarda-krát, dojdeme k závěru, že 0 zrněk písku je hromada.

Jistě si sami vymyslíte varianty na tento paradox, je jich spousta. Například, představme si člověka s bujnou kšticí. Vypadne-li mu jeden vlas, nestane se holohlavým. Vypadne-li mu druhý vlas, nestane se holohlavým. Opakujme n -krát pro dostatečně velké n , a dojdeme k závěru, že člověk s nulovým počtem vlasů není holohlavý.

Řešením, jak si poradit s těmito paradoxy typu hromady, může být např. diskrétní škálování. Prostě nějak stanovíme ostré hranice, odtud až potud je to málo, odtud až potud je to středně mnoho, odtud až potud je to už hodně. V některých případech to vyhovuje, např. ve školní klasifikaci. Zde máme pět prospěchových stupňů a je jasné, kdo vyhověl a je výborný, chvalitebný, dobrý, dostatečný, či kdo nevyhověl. V jiných případech již takovéto řešení není právě ideální. Např. trestní zákoník stanoví poloviční sazby pro mladistvé v porovnání s dospělými pachateli. Mladiství jsou v rozmezí od 15 do 18 let věku. Osoby mladší 15 let nejsou za své trestné činy odpovědné. Spáchá-li osoba, která dovršila 12. rok svého věku a je mladší než 15 let, některý čin, za který trestní zákon ve zvláštní části dovoluje uložení výjimečného trestu, může soud nanejvýš uložit její ochrannou výchovu. Jistě, zde to zřejmě jinak nejde, vždyť nechceme trestat děti, je však otázkou, nakolik jsou dnešní náctiletí ještě děti, a není náhodou, že se neustále vedou diskuse na téma snížení věkové

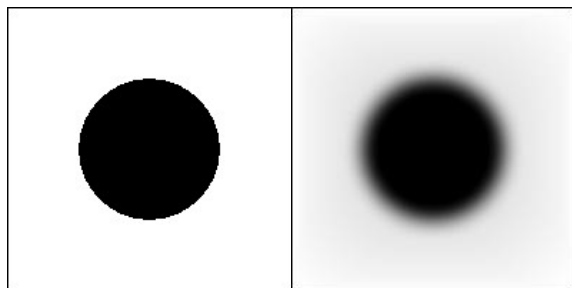
³⁴ Sorités (σωρίτης) je ve starořečtině hromada. Tento paradox vyslovil ve čtvrtém století p.n.l. Eubúlídés z Mílétu.

hranice pro beztrestnost. Navíc, evidentně není zrovna ideální onen ostrý přechod mezi beztrestností a trestní odpovědností. Spáchá-li vraždu mladistvý den před svými patnáctými narozeninami, zůstane bez trestu, spáchá-li tentýž čin o den později, čeká jej zřejmě mnoho let ve vězení.

Druhá možnost řešení paradoxů typu hromada je změnit nějak logiku, se kterou pracujeme. Tím však nechceme říct, že budeme měnit základní logické zákony, které jsou platné universálně. Změníme však předpoklad, že každý výrok je buď (ostře) pravdivý nebo nepravdivý a připustíme, že výroky obsahující neurčité predikáty mohou být pravdivé *do určité míry*. Abychom mohli s takovými výroky pracovat, zavedeme stupně pravdivosti odpovídající stupňům příslušnosti do extense neurčitého (fuzzy) predikátu. Příslušná pravdivostní funkce tak bude mít více hodnot, nejčastěji pak pracujeme se *spojitými* pravdivostními funkcemi s hodnotami v intervalu $[0, 1]$. Je pravda, že tím se nám změní také některé logické zákony. Např. zákon vyloučeného třetího, tj. buď A nebo $\text{non-}A$, platit nebude.³⁵

Libor Běhounek uvádí tento příklad. Na obrázku 1 vlevo je znázorněna vlastnost být černý jakožto ostrá vlastnost, kdežto na obrázku vpravo je tato vlastnost neostrá. Tedy na obrázku vlevo platí zákon vyloučeného třetího. Každý bod vyznačené oblasti buď je černý nebo není černý. Pro body ve druhé oblasti vpravo to neplatí. Některé body jsou černé, některé nejsou černé a konečně některé jsou „trochu černé“, tj. šedé.

³⁵ To ovšem není žádné překvapení, vždyť tento zákon není universální. Např. v logice *parciálních* funkcí, tj. takových funkcí, které na některých argumentech nemají hodnotu, tento zákon neplatí. Výrok zde může být pravdivý, nebo nepravdivý, nebo nemít žádnou pravdivostní hodnotu (ani Pravda ani Nepravda). Tato logika je však stále ještě *dvou*-hodnotová, pravdivostní hodnoty jsou dvě, pouze mohou někdy chybět.



Obr. 1: ostře černé vs. „fuzzy“ černé

Místo dvou pravdivostních hodnot zavedeme tedy stupně pravdivosti v intervalu $[0, 1]$. Hodnota 0 bude znamenat Nepravda, hodnota 1 Pravda, a hodnoty uvnitř intervalu pak pravda do určité míry. Množina stupňů pravdivosti může být diskrétní, např. 0, 0.25, 0.5, 0.75 a 1, ovšem takováto stupnice může vést k problémům popsaným výše, tj. příliš ostrý přechod mezi jednotlivými hodnotami. V praxi se proto častěji používá a více se osvědčila spojitá stupnice pravdivostních hodnot. Místo dvou pravdivostních hodnot 0 a 1 tedy máme nekonečně mnoho pravdivostních stupňů z intervalu $[0, 1]$.

Za zakladatele fuzzy logiky je pokládán Lotfi A. Zadeh, který v r. 1965 publikoval svůj první článek o fuzzy množinách. Jsou to množiny takové, kde příslušnost prvků do množiny není ostrá, nýbrž neostrá, jako na obrázku 1 vpravo. Postupně byla vyvinuta teorie fuzzy množin a relací, na níž je pak založena fuzzy logika, kterou v této kapitole stručně popíšeme.

3.1. Jazyk fuzzy logiky

V té nejjednodušší podobě může být *syntax jazyka výrokové fuzzy logiky* stejná jako v klasické logice, např. taková, jak jsme ji zavedli v Definicí 2. Změní se však pochopitelně způsob, jak vyhodnotit pravdivost formule výrokové logiky.

Bude to opět na základě *pravdivostní funkce* f , která však nyní bude (většinou spojité) zobrazení typu $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Vstupem tedy budou dvojice reálných čísel z uzavřeného intervalu $[0, 1]$ a výstupem reálné číslo z intervalu $[0, 1]$. Pokud nabude funkce f hodnotu 1, jedná se o Pravdu, hodnota 0 pak znamená Nepravdu, stejně jako v klasické výrokové logice.

V každém případě je zřejmé, že tento přístup je řešením paradoxu hromady. Oproti klasické logice, která zná pouze ostrý přechod od Pravdy k Nepravdě, fuzzy logika umožňuje a zdůvodňuje pozvolné snižování stupně pravdivosti. Odebráním jednoho zrnka písku se o něco málo sníží „stupeň hromadovistosti“, např. o 0,000000001, až postupně dojdeme ke stupni 0, což znamená Nepravda. Nula zrněk písku tedy není hromada.

Ještě je nutno zdůraznit, že stupeň pravdivosti, tj. hodnota pravdivostní funkce, *není* totéž jako *pravděpodobnost*, že určitý jev nastal. Pravděpodobnost počítá *neznámý* výsledek toho, že určitý *ostrý* jev nastane. Např. při házení kostkou můžeme spočítat pravděpodobnost toho, že padne šestka. Na druhé straně fuzzy logika počítá se *známým* výsledkem *neostrého* jevu, jako např. stupeň mladosti třicetiletého člověka. Čili ve fuzzy logice jde o *přesné usuzování o přibližných hodnotách*. Např. skupina lidí o 543 členech je zhruba stejně velká jako skupina o 547 členech.

Jak budeme nyní pracovat s fuzzy výrokovými spojkami? Jistě, budou to různé pravdivostní funkce, čili binární spojky jsou zobrazení typu $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ a unární typu $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Ovšem na rozdíl od klasické logiky, ve fuzzy logice máme více možností, jak definovat pravdivostní funkce, a podle toho pak máme více různých systémů fuzzy logiky, např. *Gödelova*, *Lukasiewiczova*, *produktová*, *Hájková BL*, atd.

Rozdílů oproti klasické logice můžeme shrnout takto. Nemusí platit zákon vyloučeného třetího, tj. $A \vee \neg A$, neplatí,

že $A \wedge A \Leftrightarrow A$, neboť vícenásobné použití neurčitého předpokladu zvyšuje neurčitost závěru, a obecně, některé úsudky platné pro ostré usuzování nejsou platné pro neurčité výroky.

Intuitivně se zdá jasné, jaké vlastnosti by měly pravdivostní funkce jednotlivých fuzzy systémů mít.

Začneme např. konjunkcí (\wedge), neboť ostatní spojky pak lze definovat na základě konjunkce a negace. Spojka „a“ čili fuzzy konjunkce (\wedge) musí splňovat to, že její hodnota bude menší nebo rovna oběma vstupním hodnotám, neboť spojíme-li dva neurčité výroky pravdivé do určité míry konjunktivně, neurčitost se zvýší, tedy stupeň pravdivosti sníží.

3.2. Fuzzy pravdivostní funkce

3.2.1. Fuzzy konjunkce

Fuzzy konjunkce tedy bude (obvykle spojitá) funkce typu $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Může být definována různým způsobem, avšak musí splňovat tyto požadavky (axiomy):

- *Extenzionalita*: Stupeň pravdivosti konjunkce $p \wedge q$ závisí pouze na stupních pravdivosti výroků p, q .³⁶
- *Komutativita* (nezáleží na pořadí): $p \wedge q = q \wedge p$
- *Asociativita* (nezáleží na prioritě):

$$p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$$
- *Monotonie*: jestliže $p \leq q$, pak $(p \wedge r) \leq (q \wedge r)$
- *Okrajové podmínky*: $1 \wedge p = p, 0 \wedge p = 0$
(1 = plná pravdivost, 0 = plná nepravdivost)
- *Spojitosť* (malá změna stupňů p, q může způsobit pouze malou změnu stupně $p \wedge q$).

³⁶ Zkoumají se rovněž systémy, které tento požadavek extenzionality nespĺňují, ale ty jsou složitější a poměrně méně intuitivní.

Ovšem *Idempotence*, tj. $p \wedge p = p$ není vždy vhodná, nemusí platit, proto ji nevyžadujeme.

Pravdivostní funkce konjunkce se ve fuzzy logice nazývají *t-normy* (neboli trojúhelníkové normy).³⁷ Základní t-normy pro konjunkci jsou tři:

- **Gödelova** (minimová) t-norma: $p \wedge_G q = \min(p, q)$
- **Lukasiewiczova** t-norma: $p \wedge_L q = \max(0, p+q-1)$
- **Součinnová** (produktová) t-norma: $p \wedge_P q = p \cdot q$

Tyto t-normy jsou základní, neboť platí věta (Mostert & Shields) z r. 1957, že všechny spojité t-normy lze jistým způsobem složit z těchto tří základních t-norem.

Snadno se přesvědčíme, že takto definované t-normy splňují požadavky, které jsme stanovili. Ovšem idempotenci splňuje pouze Gödelova: $p \wedge_G p = p$.

Součinnová fuzzy konjunkce je *striktně monotónní*, tj. platí pro ni, že jestliže $p < q$, pak $(p \wedge_P r) < (q \wedge_P r)$.

Lukasiewiczova fuzzy konjunkce je Archimedovská, tj. platí $p \wedge_L p < p$ a je monotónní, avšak ne striktně. Říkáme také, že je *nilpotentní*.

3.2.2. Fuzzy disjunkce

Duální k fuzzy konjunkci je fuzzy disjunkce, která se také nazývá *spojitá t-konorma*. Opět je více způsobů, jak fuzzy disjunkci definovat, základní ko-normy jsou definovány takto:

- **Gödelova** (minimová, standardní): $p \vee_G q = \max(p, q)$
- **Lukasiewiczova**: $p \vee_L q = \min(1, p+q)$

³⁷ Termín „trojúhelníková“ norma byl zde převzat z pravděpodobnosti, a není zcela vhodný, avšak je užívaný. Blíže k t-normám viz anglická Wikipedie, heslo *t-norm*.

- **Součinnová** (produktová) t-norma: $p \vee_P q = (p+q) - (p \cdot q)$

Takto definované konormy jsou podobně jako fuzzy konjunkce *komutativní, asociativní, monotónní*, a splňují *okrajové podmínky*:

$$p \vee 0 = p$$

$$p \vee 1 = 1$$

Opět platí, že idempotentní je pouze Gödelova: $p \vee_G p = p$. Dále, podobně jako u konjunkce můžeme definovat striktní monotónnost, která platí pro součinnovou disjunkci, tj. platí, že jestliže $p < q$, pak $(p \vee_P r) < (q \vee_P r)$. Duální Archimedovská podmínka platí pro Łukasiewiczovu disjunkci, tj. $p \vee_L p > p$, která však není striktně monotónní ale pouze monotónní (tedy je nilpotentní).

3.2.3. Fuzzy negace

Až doposud jsme se nezabývali negací ve fuzzy logice. Nicméně, negace je nutná pro jakoukoli logiku, tedy i fuzzy. Především, fuzzy negace je (obvykle spojitá) funkce typu $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Jaké bude splňovat tato funkce? Měla by být nerostoucí, neboť čím větší je stupeň pravdivosti daného výroku, tím menší by měl být stupeň pravdivosti negovaného výroku. Dále se požaduje, aby platil zákon dvojí negace a aby opět platily okrajové podmínky. Axiomy pro fuzzy negaci můžeme tedy zapsat takto:

- *Nerostoucí*: jestliže $p \leq q$, pak $\neg q \leq \neg p$.
- *Zákon dvojí negace*: $\neg\neg p = p$
- *Okrajové podmínky*: $\neg 1 = 0, \neg 0 = 1$

Existuje mnoho způsobů, jak negaci definovat. Tzv. standardní fuzzy negace je definována takto: $\neg_s p = 1-p$.

Každá fuzzy negace je bijektivní, tj. jedno-jednoznačné zobrazení intervalu $[0, 1]$ na $[0, 1]$, a existuje vždy tzv. rovnovážná hodnota e (anglicky *equilibrium*), pro kterou platí

$$\neg e = e.$$

Platí *věta o reprezentaci* fuzzy negací, která říká, že každá fuzzy negace má svůj *generátor*, což je rostoucí bijekce na intervalu $[0, 1]$. Přesněji, necht' f je rostoucí bijekce $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Pak funkce \neg definovaná tak, že pro všechna p platí

$$\neg p = f^{-1}(\neg_s f(p)),$$

je fuzzy negace. Obráceně, každá fuzzy negace je uvedeného tvaru pro nějakou rostoucí bijekci f , což je *generátor* fuzzy negace.

Různé fuzzy negace se budou jevit odlišně z hlediska uživatele, který chce jimi popsat vágnost informací, avšak z matematického hlediska není mezi nimi rozdíl. Proto v dalším textu budeme používat pouze standardní fuzzy negaci a značit ji prostě \neg , tedy bez indexu s .

3.2.4. Fuzzy výrokové algebry reálných čísel

Jakmile máme definovány fuzzy negaci, konjunkci a disjunkci, můžeme budovat různé fuzzy výrokové algebry. V klasické výrokové logice platí tyto zákony Booleovy algebry tak, jak jsou shrnuty v Tab. 1.

Je zřejmé, že ve fuzzy logice nebudou všechny tyto klasické zákony platit. Avšak pro libovolnou fuzzy negaci, fuzzy konjunkci a fuzzy disjunkci platí tyto zákony z Tab 1: involuce, komutativita, asociativita, absorpce s jedničkou a nulou, neutrální prvky.

involuce	$\neg\neg p = p$	
komutativita	$p \wedge q = q \wedge p$	$p \vee q = q \vee p$
asociativita	$(p \wedge q) \wedge r =$ $p \wedge (q \wedge r)$	$(p \vee q) \vee r =$ $p \vee (q \vee r)$
distributivita	$p \wedge (q \vee r) =$ $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \vee (q \wedge r) =$ $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
idempotence	$p \wedge p = p$	$p \vee p = p$
absorpce	$p \wedge (p \vee q) = p$	$p \vee (p \wedge q) = p$
absorpce s 1 a 0	$p \wedge 0 = 0$	$p \vee 1 = 1$
neutrální prvky	$p \wedge 1 = p$	$p \vee 0 = p$
zákon kontradikce	$p \wedge \neg p = 0$	
zákon vyloučeného třetího		$p \vee \neg p = 1$
de Morgan	$\neg(p \wedge q) =$ $(\neg p \vee \neg q)$	$\neg(p \vee q) =$ $(\neg p \wedge \neg q)$

Tab. 1: Booleova algebra klasické výrokové logiky

Gödelova fuzzy logika splňuje téměř všechny zákony z tabulky 1 kromě zákona kontradikce a zákona vyloučeného třetího. Tak např. pro pravdivost stupně $1/3$, tedy $p = 1/3$ dostáváme:

$$\neg p \wedge_G p = 2/3 \wedge_G 1/3 = 1/3 \neq 0$$

$$\neg p \vee_G p = 2/3 \vee_G 1/3 = 2/3 \neq 1$$

Zdůrazněme, že Gödelova logika splňuje i distributivní zákony.

Łukasiewiczovy operace (se standardní negací) splňují všechny zákony z tabulky 1 kromě distributivity, idempotence a zákonů absorpce. Speciálně tedy Łukasiewiczova logika splňuje zákon kontradikce a zákon vyloučeného třetího.

Pro produktovou fuzzy logiku platí pouze involuce, komutativita, asociativita, absorpce s jedničkou a nulou, neutrální prvky a de Morganovy zákony.

Platí následující věta:

Věta: Pokud fuzzy operace splňují de Morganovy zákony, zákon kontradikce a zákon vyloučeného třetího, pak nespĺňují distributivitu.

Důkaz: Necht' $e \in [0, 1]$ je rovnovážná hodnota fuzzy negace, tj. $\neg e = e$. Pak

$$e \vee e = \neg e \vee e = 1$$

$$e \wedge e = \neg e \wedge e = 0$$

Z distributivity však plyne např.

$$e \wedge (e \vee e) = (e \wedge e) \vee (e \wedge e)$$

Podle předchozího však levá strana $e \wedge (e \vee e) = e \wedge 1 = e$, zatímco pravá strana je $0 \wedge 0 = 0$, což je spor. Není tedy možné, aby byly všechny uvedené vlastnosti splněny současně.

3.2.5. Fuzzy implikace

Na rozdíl od předchozích pravdivostních funkcí, pro fuzzy negaci nejsou stanoveny řádné axiomy. Proto je za fuzzy implikaci možno považovat jakoukoli funkci typu $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, která se na 0 a 1 shoduje s klasickou implikací. Fuzzy implikace jsou většinou definovány pomocí jiných fuzzy operací, přitom tři nejčastější způsoby jsou tyto:

$$(SI) \quad p \rightarrow_S q = \neg p \vee q$$

$$(QI) \quad p \rightarrow_Q q = \neg p \vee (p \wedge q)$$

$$(RI) \quad p \rightarrow_R q = \sup \{ \alpha : (p \wedge \alpha) \leq q \}$$

Poznámka. Supremum (*sup*) dané množiny čísel α je nejmenší číslo, které je větší nebo rovno než všechna všechna čísla té množiny.

Podle toho, jako konjunkci použijeme, pak můžeme z reziduové fuzzy implikace (RI) odvodit jednotlivé fuzzy implikace, a to Gödelovu, Łukasiewiczovu a Gainesovu (neboli Goguenovu, ta je odvozena z produktové konjunkce) takto:

Gödelova: $(p \rightarrow_G q) = 1$, pokud $p \leq q$, jinak q .

Łukasiewiczova: $(p \rightarrow_L q) = 1$, pokud $p \leq q$, jinak $1 - p + q$.

Gainesova: $(p \rightarrow_P q) = 1$, pokud $p \leq q$, jinak q/p .

Dá se dokázat, že pro libovolnou reziduovou fuzzy implikaci platí následující podmínky:

$$p \rightarrow_R q = 1, \text{ právě když } p \leq q, \\ 1 \rightarrow_R q = q$$

Implikace typu (QI) se také nazývají kvantové a hrají důležitou roli v kvantové logice. Opět je možno definovat více druhů takovýchto funkcí, s různými vlastnostmi. Obecně můžeme konstatovat, že pojem fuzzy implikace je poměrně problematický a v literatuře dosud není ustálen. Někteří autoři uvažují pouze reziduové implikace, a někdy je jako implikace označována i taková funkce, která se na absolutní pravdě 1 a nepravdě 0 neshoduje s klasickou implikací.

Na závěr se ještě zmíníme o *fuzzy ekvivalenci* (čili *bi-implikaci*). Ať už je implikace definována jakkoliv, fuzzy ekvivalence je pak definována vztahem

$$p \leftrightarrow q = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

Z reziduové implikace pak můžeme opět odvodit Gödelovu, Łukasiewiczovu a produktovou bi-implikaci.

Z uvedeného stručného přehledu je zřejmé, že fuzzy logika je zajímavá jak z hlediska matematiky, tak logiky. Ovšem její rozvoj byl dán také tím, že má celou řadu

užitečných praktických aplikací, o nichž se zmíníme v následující kapitole.

3.3. Praktické aplikace fuzzy logiky

Existuje mnoho aplikací, které fuzzy logiku využívají, ale nechlubí se tím. Asi nejmarkantnějším důvodem je to, že pojem „fuzzy logika“ (neurčitá, mlhavá logika) může mít negativní nádech. Fuzzy logiku lze použít i u netechnických aplikací, jak ukazuje příklad aplikace pro obchodování na burze. Využívá se také v lékařských diagnostických systémech a při rozpoznávání ručně psaného písma. Systém fuzzy logiky lze vlastně použít téměř v jakémkoli systému, který má vstupy a výstupy. Systémy fuzzy logiky se dobře hodí pro nelineární systémy a systémy s více vstupy a výstupy. Mohou pracovat s jakýmkoli přiměřeným počtem vstupů a výstupů. Fuzzy logika se rovněž osvědčuje v případech, kdy systém nelze snadno modelovat tradičními prostředky.

Od svého vzniku v šedesátých až sedmdesátých letech našla fuzzy logika mnoho aplikací v průmyslu, medicíně i robotice – například ve strojovém řízení, v expertních diagnostických systémech, v automatických pračkách i digitálních fotoaparátech.

Zdroj: [http://technet.idnes.cz/tyden-vedy-a-techniky-0tp-
/veda.aspx?c=A121108_163909_veda_vse](http://technet.idnes.cz/tyden-vedy-a-techniky-0tp-/veda.aspx?c=A121108_163909_veda_vse)

Technológia Fuzzy Logic dokáže pomocou senzorov rozpoznať, ako prebieha pranie a podľa nameraných hodnôt nastaviť spotrebu vody, pracieho prostriedku a dĺžku cyklu. Nastaviť však musíte druh tkaniny, ktorú budete prať.

The theory of fuzzy logic is based on the notion of relative graded membership, as inspired by the processes of human perception and cognition. Lotfi A. Zadeh published his first famous research paper on fuzzy sets in 1965. Fuzzy logic can deal with information arising from computational perception and cognition, that is, uncertain, imprecise, vague, partially true, or without sharp boundaries. Fuzzy logic allows for the inclusion of vague human assessments in computing problems. Also, it provides an effective means for conflict resolution of multiple criteria and better assessment of options. New computing methods based on

fuzzy logic can be used in the development of intelligent systems for decision making, identification, pattern recognition, optimization, and control.

Fuzzy logic is extremely useful for many people involved in research and development including engineers (electrical, mechanical, civil, chemical, aerospace, agricultural, biomedical, computer, environmental, geological, industrial, and mechatronics), mathematicians, computer software developers and researchers, natural scientists (biology, chemistry, earth science, and physics), medical researchers, social scientists (economics, management, political science, and psychology), public policy analysts, business analysts, and jurists.

Indeed, the applications of fuzzy logic, once thought to be an obscure mathematical curiosity, can be found in many engineering and scientific works. Fuzzy logic has been used in numerous applications such as facial pattern recognition, air conditioners, washing machines, vacuum cleaners, antiskid braking systems, transmission systems, control of subway systems and unmanned helicopters, knowledge-based systems for multiobjective optimization of power systems, weather forecasting systems, models for new product pricing or project risk assessment, medical diagnosis and treatment plans, and stock trading. Fuzzy logic has been successfully used in numerous fields such as control systems engineering, image processing, power engineering, industrial automation, robotics, consumer electronics, and optimization. This branch of mathematics has instilled new life into scientific fields that have been dormant for a long time.

Thousands of researchers are working with fuzzy logic and producing patents and research papers. According to Zadeh's report on the impact of fuzzy logic as of March 4, 2013, there are 26 research journals on theory or applications of fuzzy logic, there are 89,365 publications on theory or applications of fuzzy logic in the INSPEC database, there are 22,657 publications on

theory or applications of fuzzy logic in the MathSciNet database, there are 16,898 patent applications and patents issued related to fuzzy logic in the USA, and there are 7149 patent applications and patents issued related to fuzzy logic in Japan. The number of research contributions is growing daily and is growing at an increasing rate. Zadeh started the Berkeley Initiative in Soft Computing (BISC), a famous research laboratory at University of California, Berkeley, to advance theory and applications of fuzzy logic and soft computing.

The objective of this special issue is to explore the advances of fuzzy logic in a large number of real-life applications and commercial products in a variety of fields. Although fuzzy logic has applications in a number of different areas, it is not yet known to people unfamiliar with intelligent systems how it can be applied in different products that are currently available in the market. For many people, the engineering and scientific meaning of the word fuzzy is still fuzzy. It is important that these people understand where and how fuzzy logic can be used.

In “Detection and elimination of a potential fire in engine and battery compartments of hybrid electric vehicles” by M. S. Dattathreya et al, the authors present a novel fuzzy deterministic noncontroller type (FDNCT) system and an FDNCT inference algorithm (FIA). The FDNCT is used in an intelligent system for detecting and eliminating potential fires in the engine and battery compartments of a hybrid electric vehicle. They also present the simulation results of the comparison between the FIA and singleton inference algorithms for detecting potential fires and determining the actions for eliminating them.

In “Comparison of detection and classification algorithms using boolean and fuzzy techniques” by R. Dixit and H. Singh, the authors compare various logic analysis methods and present results for a hypothetical target classification scenario. They show how preprocessing can reasonably preserve result

confidence and compare the results between Boolean, multiquantization Boolean, and fuzzy techniques.

In “BDD, BNN, and FPGA on fuzzy techniques for rapid system analysis” by R. Dixit and H. Singh, the authors look at techniques to simplify data analysis of large multivariate military sensor systems.

In “A fuzzy preprocessing module for optimizing the access network selection in wireless networks” by F. Kaleem et al, the authors present the design and implementation of a fuzzy multicriteria scheme for vertical handoff necessity estimation. Their method determines the proper time for vertical handoff while considering the continuity and quality of the currently utilized service and end-user satisfaction.

In “A soft computing approach to crack detection and impact source identification with field-programmable gate array implementation” by A. M. Dixit and H. Singh, the authors present a fuzzy inference system to automate crack detection and impact source identification (CDISI) and present their work on a microchip for automated CDISI.

In “Analysis of adaptive fuzzy technique for multiple crack diagnosis of faulty beam using vibration signatures” by A. K. Dash, the author proposes a method for multicrack detection of structure using a fuzzy Gaussian technique.

In “Effect of road traffic noise pollution on human work efficiency in government offices, private organizations, and commercial business centres in agartala city using fuzzy expert system: a case study” by D. Pal and D. Bhattacharya, the authors examine the reduction in human work efficiency due to growing road traffic noise pollution. Using fuzzy logic, they monitor and model disturbances from vehicular road traffic and the effect on personal work performance.

In “A Hybrid approach to failure analysis using stochastic petri nets and ranking generalized fuzzy numbers” by A. D. Torshizi and J. Parvizian, the authors present an innovative failure analysis approach that combines the flexibility of fuzzy logic with the structural properties of stochastic Petri nets. This algorithm has a diverse range of industrial applications.

In “Excluded-mean-variance neural decision analyzer for qualitative group decision making” by K.-Y. Song et al, the authors introduce an innovative mean-variance neural approach for group decision making in uncertain situations. The authors provide a case study with the excluded-mean-variance approach that shows that this approach can improve the effectiveness of qualitative decision making by providing the decision maker with a new cognitive tool to assist in the reasoning process.

In “Warren, McCain, and Obama needed fuzzy sets at presidential forum” by A. M. G. Solo, the author shows how the moderator and presidential candidates in a presidential forum needed fuzzy logic to properly ask and answer a debate question. The author shows how an understanding of fuzzy logic is needed to properly ask and answer queries about defining imprecise linguistic terms. Then A. M. G. Solo distinguishes between qualitative definitions and quantitative definitions of imprecise linguistic terms and between crisp quantitative definitions and fuzzy quantitative definitions of imprecise linguistic terms.

In “A fuzzy rule-based expert system for evaluating intellectual capital” by M. H. F. Zarandi et al, the authors describe their fuzzy expert system for evaluating intellectual capital. This assists managers in understanding and evaluating the level of each asset created through intellectual activities.

There were 20 research papers submitted. Only 11 research papers were accepted. Therefore, 55% of submitted research papers were accepted. Research papers were accepted from 22

researchers at 13 universities and research institutions in the USA, Canada, India, Japan, and Iran.

This special issue describes many important research advancements in real-life applications of fuzzy logic. Also, it creates awareness of real-life applications of fuzzy logic and thereby encourages others to do research and development in more real-life applications of fuzzy logic. There are numerous other applications of fuzzy logic that have to be researched and developed.

Harpreet Singh
Madan M. Gupta
Thomas Meitzler
Zeng-Guang Hou
Kum Kum Garg
Ashu M. G. Solo

Foreword by Lotfi A. Zadeh, Father of Fuzzy Logic

I am deeply appreciative of the dedication to me of this special issue, of the journal of Advances in Fuzzy Systems. Additionally, I appreciate very much being asked by the editors to contribute a brief foreword. For me, the foreword is an opportunity to offer a comment on the theme of the special issue.

First, a bit of history, my 1965 paper on fuzzy sets was motivated by my feeling that the then existing theories provided no means of dealing with a pervasive aspect of reality—unsharpness (fuzziness) of class boundaries. Without such means, realistic models of human-centered and biological systems are hard to construct. My expectation was that fuzzy set theory would be welcomed by the scientific communities in these and related fields. Contrary to my expectation, in these fields, fuzzy set theory was met with skepticism and, in some instances, with hostility. What I did not anticipate was that, for many years after the debut of fuzzy set theory, its main applications would be in the realms of engineering systems and consumer products.

The first significant real-life applications of fuzzy set theory and fuzzy logic began to appear in the late seventies and early eighties. Among such applications were fuzzy logic-controlled cement kilns and production of steel. The first consumer product was Matsushita's shower head, 1986. Soon, many others followed, among them home appliances, photographic equipment, and automobile transmissions. A major real-life application was Sendai's fuzzy logic control system which began to operate in 1987 and was and is a striking success. In the realm of medical instrumentation, a notable real-life application is Omron's fuzzy-logic-based and widely used blood pressure meter.

The past two decades have witnessed a significant change in the nature of applications of fuzzy logic. Nonengineering applications have grown in number, visibility, and importance. Among such applications are applications in medicine, social sciences, policy sciences, fraud detection systems, assessment of credit-worthiness systems, and economics. Particularly worthy of note is the path-breaking work of Professor Rafik Aliev on application of fuzzy logic to decision making in the realm of economics. Once his work is understood, it is certain to have a major impact on economic theories.

Underlying real-life applications of fuzzy logic is a key idea. Almost all real-life applications of fuzzy logic involve the use of linguistic variables. A linguistic variable is a variable whose values are words rather than numbers. The concept of a linguistic variable was introduced in my 1973 paper. In science, there is a deep-seated tradition of according much more respect for numbers than for words. In fact, scientific progress is commonly equated to progression from the use of words to the use of numbers. My counter traditional suggestion to use words in place of numbers made me an object of severe criticism and derision from prominent members of the scientific community. The point which I was trying to make was not understood.

Underlying the concept of a linguistic variable is a fact which is widely unrecognized—a fact which relates to the concept of precision. Precision has two distinct meanings—precision in value and precision in meaning. The first meaning is traditional. The second meaning is not. The second meaning is rooted in fuzzy logic. Example. Consider the proposition, p : Robert is young. So far as Robert's age is concerned, p is imprecise in value, but so far as meaning is concerned, p is precise in meaning if tall is interpreted as a fuzzy set with a specified membership function. More concretely, when in fuzzy logic a word represents the value of a variable, the word is precisiated by treating it as a specified fuzzy set. This is the key idea which underlies the concept of a linguistic variable—an idea which opens the door to exploitation of tolerance for imprecision. Precision carries a cost. When there is some tolerance for imprecision, the use of words serves to reduce cost. Equally importantly, the use of words serves to construct better models of reality. This is what my prominent critics did not appreciate. There is a lesson to be learned.

In conclusion, a word about the methodology of computing with words (CWW). CWW is rooted in the concept of a linguistic variable. CWW opens the door to construction of mathematical solutions of computational problems which are stated in natural language. In coming years, CWW is likely to play an increasingly important role in origination and development of real-life applications of fuzzy logic.

Lotfi A. Zadeh

Fuzzy Logic Applications

Almost any control system can be replaced with a fuzzy logic based control system. This may be overkill in many places however it simplifies the design of many more complicated cases. So fuzzy logic is not the answer to everything, it must be used when appropriate to provide better control. If a simple closed loop or PID controller works fine then there is no need for a fuzzy controller. There are many cases when tuning a PID controller or designing a control system for a complicated system is overwhelming, this is where fuzzy logic gets its chance to shine.

One of the most famous applications of fuzzy logic is that of the Sendai Subway system in Sendai, Japan. This control of the Nanboku line, developed by Hitachi, used a fuzzy controller to run the train all day long. This made the line one of the smoothest running subway systems in the world and increased efficiency as well as stopping time. This is also an example of the earlier acceptance of fuzzy logic in the east since the subway went into operation in 1988. For more information on this see: <http://sipi.usc.edu/~kosko/Scientific%20American.pdf>(pdf) or http://www.smart.sunderland.ac.uk/f_succ.htm

The most tangible applications of fuzzy logic control have appeared commercial appliances. Specifically, but not limited to heating ventilation and air conditioning (HVAC) systems. These systems use fuzzy logic thermostats to control the heating and cooling, this saves energy by making the system more efficient. It also keeps the temperature more steady than a traditional thermostat. For more information on this application see: http://www.fuzzytech.com/e/e_a_esa.html

Another significant area of application of fuzzy control is in industrial automation. Fuzzy logic based PLCs have been developed by companies like [Moeller](#). These PLCs, as well as

other implementations of fuzzy logic, can be used to control any number of industrial processes. For some examples see: http://www.fuzzytech.com/e/e_a_plc.html

Fuzzy logic also finds applications in many other systems. For example, the [MASSIVE3D](#) animation system for generating crowds uses fuzzy logic for artificial intelligence. This program was used extensively in the making of the Lord of the Rings trilogy as well as The Lion, The Witch and the Wardrobe films.

As a final example of fuzzy logic, it can be used in areas other than simply control. Fuzzy logic can be used in any decision making process such as signal processing or data analysis. An example of this is a fuzzy logic system that analyzes a power system and diagnoses any harmonic disturbance issues. The system analyzes the fundamental voltage, as well as third, fifth and seventh harmonics as well as the temperature to determine if there is cause for concern in the operation of the system. A complete explanation of this project can be found in this paper: [Harmonic Distortion Diagnostic using Fuzzy Logic](#)(pdf)

<http://www.intechopen.com/books/fuzzy-logic-controls-concepts-theories-and-applications>

<http://slideslive.com/38890809/fuzzy-modelovani>

Kapitola 4. Rezoluční metoda

4.1. Rezoluční metoda ve výrokové logice

Další důležitou metodou ověřování tautologií, logického vyplývání, řešení úlohy – co vyplývá z daných předpokladů, apod. je tzv. metoda *základní rezoluce*. Tato metoda je uplatnitelná na formule v *konjunktivní normální formě (KNF)*.

Obecně, jak se dovíme v kapitole 3, je rezoluční metoda důkaz sporem. Ovšem ve výrokové logice ji můžeme použít také pro přímý důkaz. Je tomu tak proto, že rezoluční pravidlo zachovává pravdivost. Tedy rezolventa, kterou z daných předpokladů odvodíme, z nich *vyplývá*. A nyní přesněji:

Rezoluční pravidlo odvozování: Nechť l je literál. Z formule $(A \vee l) \wedge (B \vee \neg l)$ odvod' formuli $(A \vee B)$. Zapisujeme:

$$\frac{(A \vee l) \wedge (B \vee \neg l)}{(A \vee B)}$$

Toto pravidlo není přechodem k ekvivalentní formuli, ale zachovává *pravdivost* tedy rezolventa z daných předpokladů *vyplývá*.

Důkaz: Nechť je formule $(A \vee l) \wedge (B \vee \neg l)$ pravdivá při nějaké valuaci v . Pak při této valuaci musí být pravdivé oba disjunktivy (tzv. klausule) $(A \vee l)$ a $(B \vee \neg l)$. Nechť je dále $v(l) = 0$. Pak $w(A) = 1$ a tedy $w(A \vee B) = 1$. Nechť je naopak $v(l) = 1$. Pak $w(\neg l) = 0$ a musí být $w(B) = 1$, a tedy $w(A \vee B) = 1$. V obou případech je tedy formule $(A \vee B)$ pravdivá v modelu původní formule, a tedy je pravdivá v každém modelu předpokladů, neboť jsme zkoumali *libovolnou* valuaci v :

$$(A \vee l) \wedge (B \vee \neg l) \models (A \vee B).$$

To nám poskytuje návod, jak řešit úlohu, **co vyplývá** z dané formule, resp. množiny formulí.

Postup řešení.

Pozn.: Jednotlivé disjunktivy v KNF nazýváme **klausule**, a proto je KNF také nazývána **klausulární forma**.

a) Nepřímý důkaz, že formule A je tautologie: Formulí A znegujeme a převedeme do KNF. Nyní uplatňujeme pravidlo rezoluce. Pokud při postupném "vyškrtávání" literálů s opačným znaménkem dospějeme k prázdné klausuli, je tato evidentně nespílitelná, tedy také původní $\neg A$ je nespílitelná a A je tautologie.

b) Nepřímý důkaz správnosti úsudku $P_1, \dots, P_n \models Z$. Závěr Z znegujeme a dokazujeme, že množina $\{P_1, \dots, P_n, \neg Z\}$ je sporná. Jinými slovy, dokazujeme, že formule

$$(P_1 \wedge \dots \wedge P_n) \supset Z$$

je tautologie (viz věta 2.1.2, která nás k tomu opravňuje), tedy že její negace

$$P_1 \wedge \dots \wedge P_n \wedge \neg Z \text{ je kontradikce.}$$

Příklad

1) Ověříme platnost úsudku $p \supset q, r \vee \neg q, \neg r / \neg p$ nepřímým důkazem. Jednotlivé klausule zapíšeme pod sebe (s negovaným závěrem) a uplatňujeme pravidlo rezoluce:

$$1. \neg p \vee q$$

$$2. r \vee \neg q$$

$$3. \neg r$$

$$4. p$$

negovaný závěr

$$5. q \quad (1. \text{ a } 4.)$$

$$6. r \quad (2. \text{ a } 5.)$$

$$7. \square \quad (3. \text{ a } 6.)$$

alternativně:

$$5' \neg p \vee r \quad (1. \text{ a } 2.)$$

$$6' \neg p \quad (5' \text{ a } 3.)$$

$$7' \quad \square \quad (6' \text{ a } 4.)$$

Dostali jsme prázdnou klausuli, která je nesplnitelná. Tedy negovaný závěr je ve sporu s předpoklady, proto je úsudek platný.

1a) Nyní provedeme přímý důkaz platnosti výše uvedeného úsudku:

- | | |
|--------------------|---------------|
| 1. $\neg p \vee q$ | |
| 2. $r \vee \neg q$ | |
| 3. $\neg r$ | |
| | |
| 4. $\neg q$ | rezoluce 2, 3 |
| 5. $\neg p$ | rezoluce 1, 4 |

Alternativně:

- | | |
|--------------------|---------------|
| 1. $\neg p \vee q$ | |
| 2. $r \vee \neg q$ | |
| 3. $\neg r$ | |
| | |
| 4. $\neg p \vee r$ | rezoluce 1, 2 |
| 5. $\neg p$ | rezoluce 3, 4 |

2) Ověříme platnost úsudku č. 4 z kap. 1:

Je doma nebo odešel do kavárny.
 Je-li doma, pak nás očekává.

Jestliže nás neočekává, pak odešel do kavárny.

Označíme jednotlivé elementární výroky: d – "je doma", k – "odešel do kavárny",

o – "očekává nás" a formalizujeme:

- | | | |
|--------------------|------------------------|-------------------------|
| $d \vee k$ | 1. $d \vee k$ | |
| $d \supset o$ | 2. $\neg d \vee o$ | |
| ----- | 3. $\neg o$ | |
| $\neg o \supset k$ | 4. $\neg k$ | (klausule 3. a 4. tvoří |
| negovaný závěr | $\neg o \wedge \neg k$ | |
| | | |

- | | |
|--------|-----------|
| 5. d | (1. a 4.) |
| 6. o | (2. a 5.) |

7. (3. a 6.)

#

Dostali jsme prázdnou klausuli, která je nesplnitelná. Tedy negovaný závěr je ve sporu s předpoklady, proto je úsudek platný.

2a) Nyní provedeme přímý důkaz.

$d \vee k$	1. $d \vee k$
$d \supset o$	2. $\neg d \vee o$
-----	3. $k \vee o$
rezoluce 1, 2	
$\neg o \supset k$	

Klauzule 3 je ekvivalentní závěru, který jsme chtěli odvodit: $\neg o \supset k$
 $\Leftrightarrow o \vee k \Leftrightarrow k \vee o$

3) Dokažte, že formule $[(p \supset q) \wedge \neg q] \supset \neg p$ je tautologie.

Formuli znegujeme a převedeme do klausulární formy:

$[(\neg p \vee q) \wedge \neg q] \wedge p$

Klausule:

1. $\neg p \vee q$	
2. $\neg q$	
3. p	
4. $\neg p$	rezoluce 1.2.
5. #	

Negovaná formule je nesplnitelná, proto je původní formule tautologie.

4) Odvodte logické důsledky formule $\neg a \downarrow (c \wedge (\neg b \vee a))$, kde \downarrow je Pierceova spojka NOR (negace disjunkce, v přirozeném jazyce "ani, ani"). Formuli převedeme do KNF:

$[\neg a \downarrow (c \wedge (\neg b \vee a))] \Leftrightarrow \neg[\neg a \vee (c \wedge (\neg b \vee a))] \Leftrightarrow [a \wedge (\neg c \vee (b \wedge \neg a))] \Leftrightarrow$

$[a \wedge (b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee \neg c)].$

1. a	
2. $b \vee \neg c$	
3. $\neg a \vee \neg c$	
4. $\neg c$	(rezoluce 1 a 3)

Z dané formule vyplývají všechny klausule tvořící KNF a klausule obdržené rezolucí, tedy platí:

$$\begin{aligned} \neg a \downarrow (c \wedge (\neg b \vee a)) & \models a \\ \neg a \downarrow (c \wedge (\neg b \vee a)) & \models b \vee \neg c \\ \neg a \downarrow (c \wedge (\neg b \vee a)) & \models \neg a \vee \neg c \\ \neg a \downarrow (c \wedge (\neg b \vee a)) & \models \neg c \end{aligned}$$

Pozn.: Pokud bychom chtěli obdržet *všechny* logické důsledky dané formule, museli bychom vycházet z UKNF. V našem případě je UKNF tvořena následujícími disjunktami (ověřte např. z tabulky pravdivostní funkce):

- | | |
|-------------------------------------|------------------|
| 1. $a \vee b \vee c$ | |
| 2. $a \vee b \vee \neg c$ | |
| 3. $a \vee \neg b \vee c$ | |
| 4. $a \vee \neg b \vee \neg c$ | |
| 5. $\neg a \vee b \vee \neg c$ | |
| 6. $\neg a \vee \neg b \vee \neg c$ | |
| | |
| 7. $a \vee b$ | (rezoluce 1, 2) |
| 8. a | (rezoluce 2, 3) |
| 9. $a \vee \neg b$ | (rezoluce 3, 4) |
| 10. $\neg a \vee \neg c$ | (rezoluce 5, 6) |
| 11. $b \vee \neg c$ | (rezoluce 7, 10) |
| 12. $\neg c$ | (rezoluce 8, 10) |

Logickými důsledky naší formule jsou tedy všechny formule 1. až 12.

Vidíme tedy, že na rozdíl od sémantické metody pravdivostních funkcí (metody 0-1) popsané v kapitole 2.1, je rezoluční metoda formální čili syntaktická, tj. nepracuje s pravdivostními modely (s dalšími syntaktickými důkazovými metodami se seznámíme v kap. 2.3 a 2.4). Navíc je dobře zobecnitelná i pro teoremy predikátové logiky (jakož i teoremy libovolných širších formálních teorií, které vždy obsahují predikátovou logiku jako svou část). Tato metoda – *metoda automatického dokazování* – nalezla široké uplatnění v

počítačovém dokazování (je na ní, resp. na obecné rezoluci pro predikátovou logiku, založen např. programovací jazyk PROLOG), v expertních systémech a v dalších oblastech umělé inteligence.

Metoda automatického dokazování se opírá o tři principy:

- **Princip vyvrácení**, převádějící problém důkazu dané formule na problém důkazu nesplnitelnosti negace této formule. Viz věta 2.2.1.
- **Rezoluční odvozovací pravidlo** – jediné odvozovací pravidlo používané metodou. Viz věta 2.2.2.
- **Robinsonův rezoluční princip** umožňující vyvodit spor z nesplnitelné formule a tak dokázat její nesplnitelnost (a tím dokázat platnost původní formule). Viz věta 2.2.3.

Nyní popíšeme tuto metodu přesněji. V následující definici zavedeme několik termínů většinou jen nově označujících již dříve zavedené pojmy.

Definice 4.1.1 (klauzulární forma):

1. *Klauzule* je konečná disjunkce literálů. Připomeňme, že *literál* je výrokový symbol nebo jeho negace. Klauzule je tedy totéž co elementární disjunkce (ED) – viz definice 2.1.6.
2. *Prázdná klauzule* je klauzule, která neobsahuje ani jeden literál. Prázdnou klauzuli označujeme symbolem \square .
3. *Hornova klauzule* je klauzule s nejvýše jedním pozitivním (nenegovaným) literálem.
4. *Klauzulární forma* dané formule je ekvivalentní formule ve tvaru konjunkce klauzulí. Klauzulární forma je tedy totéž, co konjunktivní normální forma /KNF/ dané formule - viz definice 2.1.6.

Poznámky:

1. Vzhledem k asociativitě a komutativitě disjunkce nezáleží na pořadí literálů v klauzuli a klauzuli můžeme také pojímat jako **disjunktivní množinu literálů**.

2. Vzhledem k tomu, že disjunkce je pravdivá, je-li pravdivý alespoň jeden její člen, představuje prázdná klauzule vždy nepravdivou, nesplnitelnou formuli, tj. spor.

3. Klauzuli

$$\neg q_1 \vee \neg q_2 \vee \dots \vee \neg q_m \vee p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n$$

můžeme přepsat, na základě de Morganova zákona, ve tvaru

$$\neg(q_1 \wedge q_2 \wedge \dots \wedge q_m) \vee (p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n)$$

a dále, na základě ekvivalence $\neg A \vee B \Leftrightarrow A \supset B$, ve tvaru implikace

$$(q_1 \wedge q_2 \wedge \dots \wedge q_m) \supset (p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n).$$

Často se používá pro zápis klauzule také následující množinová notace

$$\{q_1, q_2, \dots, q_m\} \Rightarrow \{p_1, p_2, \dots, p_n\},$$

kde $\{q_1, q_2, \dots, q_m\}$ je **konjunktivní množina antecedentů** a $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ **disjunktivní množina konsekventů** klauzule. Klauzule je nepravdivá jedině tehdy, jsou-li všechny antecedenty pravdivé a současně všechny konsekventy nepravdivé.

4. Speciálními případy klauzulí jsou:

- Klauzule bez antecedentů ($m = 0$):

$$\{ \} \Rightarrow \{p_1, p_2, \dots, p_n\}, \text{ neboli } 1 \supset \{p_1, p_2, \dots, p_n\}.$$

- Klauzule bez konsekventů ($n = 0$), tj. Hornova klauzule se všemi literály negativními:

$$\{q_1, q_2, \dots, q_m\} \Rightarrow \{ \}, \text{ neboli } (q_1 \wedge q_2 \wedge \dots \wedge q_m) \supset 0.$$

- Klauzule s jediným konsekventem ($n = 1$), tj. Hornova klauzule s jediným pozitivním literálem:

$$\{q_1, q_2, \dots, q_m\} \Rightarrow \{p_1\}, \text{ neboli } (q_1 \wedge q_2 \wedge \dots \wedge q_m) \supset p_1.$$

- Prázdná klauzule ($m = n = 0$):

$$\{ \} \Rightarrow \{ \}, \text{ neboli } 1 \supset 0, \text{ neboli } \#.$$

5. Vzhledem k asociativitě a komutativitě konjunkce nezáleží na pořadí klauzulí v klauzulární formě a klauzulární formu můžeme také pojímat jako **konjunktivní množinu klauzulí**.

6. Podle věty 2.1.3 o normálním tvaru lze každou formuli výrokové logiky, která není tautologií, vyjádřit ve tvaru UKNF a tedy také KNF, tj. v klauzulární formě.

Věta 4.1.1 (*princip vyvrácení – důkaz sporem*): Formule B vyplývá z předpokladů A_1, A_2, \dots, A_n , značíme $A_1, A_2, \dots, A_n \models B$, právě tehdy, je-li formule $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \wedge \neg B$ kontradikcí.

Důkaz:

Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. $A_1, A_2, \dots, A_n \models B$
2. $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \supset B$ je tautologií
3. $\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \dots \vee \neg A_n \vee B$ je tautologií
4. $\neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \wedge \neg B)$ je tautologií
5. $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \wedge \neg B$ je kontradikcí

Speciálně pro $n = 1$:

1. $A \models B$
2. $A \supset B$ je tautologií
3. $\neg A \vee B$ je tautologií
4. $\neg(A \wedge \neg B)$ je tautologií
5. $A \wedge \neg B$ je kontradikcí

Věta 4.1.2 (*rezoluční odvozovací pravidlo*): Jsou-li v nějaké valuaci v pravdivé klausule

$$A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_m \vee l, B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_n \vee \neg l,$$

pak je v této valuaci pravdivá také klausule

$$A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_m \vee B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_n,$$

neboli:

$$A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_m \vee l, B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_n \vee \neg l \models A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_m \vee B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_n.$$

Poznámky:

1. Klausule na levé straně pravidla nazýváme *rodičovskými klauzulemi* a klauzuli na pravé straně *rezolventou* rodičovských klauzulí vzhledem k formuli l .

2. Speciálně platí:

- $m = 0, n = 0$: $l, \neg l \vdash \#$ odvození sporu
- $m = 0, n = 1$: $l, \neg L \vee B \vdash B$ pravidlo MP
- $m = 1, n = 1$: $l \vee A, \neg l \vee B \vdash A \vee B$ základní tvar rezolučního pravidla

Definice 4.1.2 (Rezoluční uzávěr): Nechť F je formule v klauzulárním tvaru (neboli konjunktivní množina klauzulí). Symbolem $R(F)$ označme formuli F rozšířenou o všechny rezolventy všech rezoluce schopných dvojic klauzulí z F . *Rezolučním uzávěrem formule F n -tého řádu* nazveme formuli $R_n(F)$ definovanou rekurzivně takto:

- $R_0(F) = F$,
- $R_i(F) = R(R_{i-1}(F))$, $i=1,2,\dots,n$

Věta 4.1.3 (Robinsonův rezoluční princip): Formule F v klauzulárním tvaru je kontradikcí (nesplnitelná) právě tehdy, existuje-li přirozené číslo n takové, že $R_n(F)$ obsahuje prázdnou klauzuli.

Důkaz (nástin): Důkaz se opírá o následující úvahy:

- Je-li aspoň jedna klauzule ve formuli F kontradikcí, pak je kontradikcí celá formule F .
- Prázdná klauzule $\# = l \wedge \neg l$ je kontradikcí.
- Při použití rezolučního pravidla (rozšíření formule F o rezolventu) se nemění pravdivostní funkce formule F . Metodou pravdivostních funkcí (metodou 0-1) se snadno přesvědčíme, že konjunkce rodičovských klauzulí $(A \vee l) \wedge (B \vee \neg l)$ má stejnou pravdivostní funkci jako konjunkce této konjunkce s rezolventou $(A \vee l) \wedge (B \vee \neg l) \wedge (A \vee B)$. Pravdivostní funkce formulí $R_{i-1}(F)$ a $R_i(F)$ jsou tedy ekvivalentní a tedy také jsou pravdivostní funkce formule F a jejího rezolučního uzávěru libovolného řádu ekvivalentní.

Příklad: Dokažme nesplnitelnost následující konjunktivní množiny klauzulí

$$\{p \vee q, p \vee r, \neg q \vee \neg r, \neg p\}$$

neboli následující konjunktivní normální formy

$$(p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p).$$

Důkaz:

1.	$p \vee q$	výchozí klauzule		
2.	$p \vee r$	výchozí klauzule		
3.	$\neg q \vee \neg r$	výchozí klauzule		
4.	$\neg p$	výchozí klauzule		
	Systematicky:			
	Optimálně:			
5.	$p \vee \neg r$	rezoluce: 1,3	5'. q	rezoluce: 1,4
6.	q	rezoluce: 1,4	6'. r	rezoluce: 2,4
7.	$p \vee \neg q$	rezoluce: 2,3	7'. $\neg q$	rezoluce: 3,6'
8.	r	rezoluce: 2,4	8'. $\neg q$	rezoluce: 5',7'
	Q.E.D. \square			
9.	p	rezoluce: 2,5		
10.	$\neg r$	rezoluce: 3,6		
11.	$\neg q$	rezoluce: 3,8		
12.	$\neg r$	rezoluce: 4,5		
13.	$\neg q$	rezoluce: 4,7		
14.	\square	rezoluce: 4,9	Q.E.D.	

Příklad: Dokažme, že z platnosti formulí $p \supset q \vee r$, $\neg s \supset \neg q$, $t \vee \neg r$ vyplývá platnost formule $p \supset (s \vee t)$, neboli dokažme platnost tohoto odvozovacího pravidla:

$$p \supset q \vee r, \neg s \supset \neg q, t \vee \neg r \vdash p \supset (s \vee t),$$

neboli tohoto teorému:

$$\models (p \supset q \vee r) \wedge (\neg s \supset \neg q) \wedge (t \vee \neg r) \supset [(p \supset (s \vee t))]$$

Podle principu vyvrácení budeme dokazovat, že formule

$$(p \supset q \vee r) \wedge (\neg s \supset \neg q) \wedge (t \vee \neg r) \wedge \neg[p \supset (s \vee t)]$$

je nesplnitelná.

Formuli převedeme do klauzulárního tvaru

$$(\neg p \vee q \vee r) \wedge (s \vee \neg q) \wedge (t \vee \neg r) \wedge p \wedge \neg s \wedge \neg t$$

a z odpovídající konjunktivní množiny klauzulí

$$\{\neg p \vee q \vee r, s \vee \neg q, t \vee \neg r, p, \neg s, \neg t\}$$

odvodíme (rezolvujeme) spor (prázdnou klauzuli):

1.	$\neg p \vee q \vee r$	výchozí klauzule
2.	$s \vee \neg q$	výchozí klauzule
3.	$t \vee \neg r$	výchozí klauzule
4.	p	výchozí klauzule
5.	$\neg s$	výchozí klauzule
6.	$\neg t$	výchozí klauzule
7.	$q \vee r$	rezoluce: 1,4
8.	$\neg q$	rezoluce: 2,5
9.	$\neg r$	rezoluce: 3,6
10.	r	rezoluce: 7,8
11.	#	rezoluce: 9,10 Q.E.D

Poznámky (strategie generování rezolvent):

1. Generování rezolvent striktně podle Robinsonova rezolučního principu, tj. v posloupnosti $F, R_1(F), R_2(F), \dots$, může vést ke kombinatorické explozi a k zdlouhavému odvozování prázdné klauzule. Tato strategie generování rezolvent, tzv. **generování do šířky**, je značně neefektivní. Efektivnější bývá opačná strategie, tzv. **generování do hloubky**. (Viz následující příklad 2.2.4.)
2. Rezoluční metoda se výrazně zefektivní, je-li výchozí množina klauzulí tvořena výhradně *Hornovými klauzulemi*, tj. klauzulemi s nanejvýš jedním pozitivním literálem.
3. K zvýšení efektivity (zkrácení) rezolučního procesu byla navržena řada strategií, které stanoví pořadí provádění rezolucí (**strategie uspořádání**) nebo některé klauzule z rezolučního procesu přímo vylučují (**strategie zjemňování**). Má-li být zvolená strategie ekvivalentní Robinsonovu rezolučnímu principu, musí platit:
 - libovolná formule dokázaná při použití dané strategie je logicky pravdivá (strategie je **korektní**),

- libovolná logicky pravdivá formule je při použití dané strategie dokazatelná (strategie je *úplná*).
4. Nejpoužívanějšími strategiemi generování rezolvent jsou následující dvě metody:

- **Lineární metoda.** Rezolventy se řadí do lineární posloupnosti (v čele této posloupnosti jsou výchozí klauzule) a v každém kroku je jedním účastníkem rezoluce poslední člen této posloupnosti, tj. jednou z rodičovských klauzulí nové rezoluce je vždy rezolventa z předchozí rezoluce.
- **Metoda podpůrné množiny.** Předpokládá se, že množina výchozích klauzulí K je rozdělena na podmnožinu A , o které *a priori* víme, že tvoří bezsporný systém (např. je tvořena klauzulemi představující axiomy teorie, v jejímž rámci důkaz hledáme) a z podmnožiny $B = K - A$ (tvořené klauzulemi vzniklými z formulí, které chceme z bezsporného systému axiómů dokázat). Strategie podpůrné množiny spočívá v tom, že nikdy nerezolvujeme klauzule z množiny A navzájem (je-li předpoklad o jejich bezspornosti správný, pak z nich spor neodvodíme a zbytečně ztrácíme čas).

Příklad: Vyřešíme předchozí úlohu se současným užitím lineární metody a metody podpůrné množiny. Máme dokázat

$$p \supset q \vee r, \neg s \supset \neg q, t \vee \neg r \vdash p \supset (s \vee t),$$

což znamená odvodit spor z množiny těchto klauzulí:

$$\{\neg p \vee q \vee r, s \vee \neg q, t \vee \neg r, p, \neg s, \neg t\},$$

kterou můžeme rozdělit na dvě části:

$A = \{\neg p \vee q \vee r, s \vee \neg q, t \vee \neg r\}$... bezsporný systém předpokladů,

$B = \{p, \neg s, \neg t\}$... závěr.

Důkaz (odvození sporu):

1.	$\neg p \vee q \vee r$	výchozí klauzule skupiny <i>A</i>	
2.	$s \vee \neg q$	výchozí klauzule skupiny <i>A</i>	
3.	$t \vee \neg r$	výchozí klauzule skupiny <i>A</i>	
4.	p	výchozí klauzule skupiny <i>B</i>	
5.	$\neg s$	výchozí klauzule skupiny <i>B</i>	
6.	$\neg t$	výchozí klauzule skupiny <i>B</i>	
7.	$\neg r$	rezoluce: 3,6	
8.	$\neg p \vee q$	rezoluce: 1,7	
9.	$\neg p \vee s$	rezoluce: 2,8	
10.	s	rezoluce: 4,9	
11.	#	rezoluce: 5,10	Q.E.D

Příklad: Strategie prohledávání do hloubky a do šířky.

Uvažujme "program" – množinu klausulí:

1. D
2. E
3. $B \vee \neg E$
4. $A \vee \neg D$
5. $A \vee \neg B$

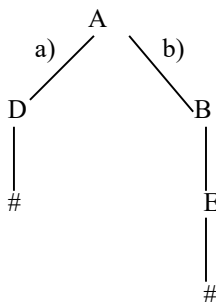
Položíme-li dotaz "Kdy platí A ?" neboli "Vyplývá z dané množiny A ?", pak vlastně připojíme 6. klausuli $\neg A$ a provádíme rezoluci. Máme zde dvě možnosti, jak dokázat A z předpokladů 1 – 5:

- | | | | |
|----|------------------------|----|-------------------------|
| a) | 7. $\neg D$ (rez. 6,4) | b) | 7' $\neg B$ (rez. 6,5) |
| | 8. # (rez. 7,1) | | 8' $\neg E$ (rez. 7',3) |
| | 9 # (rez. 8',2) | | |

Pozn.: Jak jsme již zmínili, rezoluční metoda je základem automatického dokazování, a to především v programovacím jazyce Prolog. V Prologu zapíšeme uvedené klauzule takto:

D.	fakt
E.	fakt
$B :- E.$	pravidlo (B pokud E)
$A :- D.$	pravidlo (A pokud D)
$A :- B.$	pravidlo (A pokud B)
?A.	cíl (dotaz)

Strategie prohledávání do hloubky spočívá v tom, že provedeme nejprve větev a), tj. zjistíme, že A platí za podmínky D (nový podcíl), která je splněna, a teprve poté (v procesu navracení) provedeme větev b), zjistíme, že A platí za podmínky B (další podcíl) a ta platí za podmínky E (podcíl), která je splněna. V případě strategie do šířky se pokoušíme "splnit obě větve paralelně", tedy vygenerujeme klausule 7 a 7', poté 8 a 8', atd. Vše můžeme znázornit tzv. *výpočtovým stromem* programu:



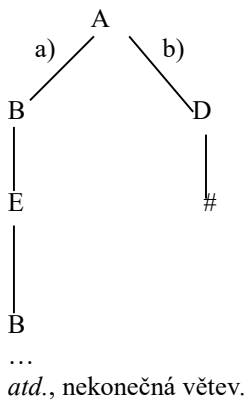
Strategie do hloubky "prohledá nejprve do hloubky" první větev a pak druhou. Je efektivnější, avšak program může "uvíznout v tautologii" – nekonečné větvi. Kdybychom např. upravili náš program tak, že bychom přehodili 4. a 5. klausuli a druhou bychom změnili na $E \vee \neg B$, druhá větev b) by se stala nekonečnou a prováděla by se jako první. I když náš cíl A z programu vyplývá, nikdy bychom se to nedověděli:

1. D
2. $E \vee \neg B$
3. $B \vee \neg E$

4. $A \vee \neg B$
5. $A \vee \neg D$
6. $\neg A$

V programovacím jazyce Prolog bude uvedený program zapsán takto:

D.	fakt
E :- B.	pravidlo (E pokud B)
B :- E.	pravidlo (B pokud E)
A :- B.	pravidlo (A pokud B)
A :- D.	pravidlo (A pokud D)
?A.	cíl (dotaz)



Cvičení ke kapitole 4.1.

1. *Ověřte rezoluční metodou platnost těchto úsudků*

Jestliže studuji, dosáhnu dobrého postavení.
Jestliže nestuduji, užívám si.

Dosáhnu dobrého postavení, nebo si užívám.

Jestliže pracuji, pak vydělávám peníze, ale jsem-li líný, pak si užívám.

Buď pracuji nebo jsem líný.

Nicméně, jestliže pracuji, potom si neužívám, zatímco jestliže jsem líný, potom nevydělávám peníze.

Proto si užívám.

Neběží-li motor, je vada v motoru nebo nejde proud.

Je-li vada v motoru, je třeba volat opraváře.

Proud jde.

Neběží-li motor, je třeba volat opraváře.

Není pravda, že uchazeč umí anglicky i německy.

Uchazeč neumí anglicky.

Uchazeč neumí německy.

Návod: Uvažme první úsudek. Nejprve jej formalizujeme a pak provedeme důkaz rezoluční metodou:

Jestliže studuji (s), dosáhnu dobrého postavení (p).

Jestliže nestuduji, užívám si (u).

Dosáhnu dobrého postavení, nebo si užívám.

$$\begin{array}{l}
 s \supset p \\
 \neg s \supset u \\
 \hline
 p \vee u
 \end{array}$$

Převedeme nyní uvedené formule do klauzulární formy a provedeme přímý důkaz:

- 1) $\neg s \vee p$
- 2) $s \vee u$
- 3) $p \vee u$ rezoluce 1, 2

Tedy úsudek je platný.

2. Co vyplývá z následujících předpokladů?

Karel pojedí autobusem nebo vlakem.

Jede-li Karel autobusem nebo svým vozem, pak přijede pozdě a zmešká schůzku.

Karel nepřišel pozdě.

Je-li úterý, je přednáška, ale není cvičení.

Dnes je přednáška i cvičení.

Je-li cvičení, pak nepotřebujeme projektor.

Je-li Karel v Praze, je Helena v Brně.

Je-li úterý, není Helena v Brně.

Je úterý nebo středa.

Návod: Vyřešíme první úlohu takto:

- 1) Karel pojedí autobusem (a) nebo vlakem (v).
- 2) Jede-li Karel autobusem nebo svým vozem (s), pak přijede pozdě (p) a zmešká schůzku (z).
- 3) Karel nepřišel pozdě.

1. $a \vee v$
2. $[(a \vee s) \supset (p \wedge z)]$
3. $\neg p$

Nyní převedeme uvedené formule do klauzulární formy. Nejprve upravíme druhou formuli:

$$\begin{aligned} [\neg(a \vee s) \vee (p \wedge z)] &\Leftrightarrow [(\neg a \wedge \neg s) \vee (p \wedge z)] \Leftrightarrow [\neg a \vee (p \wedge z)] \wedge \\ &[(\neg s \vee (p \wedge z))] \Leftrightarrow [(\neg a \vee p) \wedge (\neg a \vee z)] \wedge [(\neg s \vee p) \wedge (\neg s \vee z)] \end{aligned}$$

1. $a \vee v$
2. $\neg a \vee p$
3. $\neg a \vee z$
3. $\neg s \vee p$
4. $\neg s \vee z$
5. $\neg p$
6. $v \vee p$ rezoluce 1, 2
Karel jel vlakem nebo přišel pozdě
7. $v \vee z$ rezoluce 1, 3
Karel jel vlakem nebo zmeškal schůzku
8. $\neg a$ rezoluce 2, 5 Karel nejel autobusem
9. $\neg s$ rezoluce 3, 5 Karel nejel svým vozem
10. v rezoluce 5, 6 Karel jel vlakem

3. Najděte **chybějící předpoklad** v následujících úsudcích tak, aby úsudek byl platný:

$$p \vee \neg r, q \supset (p \wedge r), ? \models \neg q \vee \neg r$$

$$p \supset r, \neg q \vee \neg r, r \supset (q \vee s), ? \models p \wedge s$$

$$(p \vee r) \supset (q \wedge s), q \supset \neg r, ? \models p \supset \neg s$$

Návod na řešení první úlohy sporem:

1. $p \vee \neg r$
2. $\neg q \vee p$
3. $\neg q \vee r$
4. q negovaný závěr

5. r	negovaný závěr
6. p	rezoluce 1, 5
7. r	rezoluce 3, 4
8. $\neg r$	(chybějící předpoklad)
9. #	rezoluce 7, 8

4.2. Obecná rezoluční metoda (predikátová logika 1. řádu)

Jak jsme demonstrovali v předchozích kapitolách, sémantický důkaz logické pravdivosti, a tedy i logického vyplývání, platnosti úsudku apod., zkoumáním všech možných interpretací, je v predikátové logice často obtížný ne-li nemožný. Jednou z efektivních metod je však rezoluční metoda, která je pro PL^1 zobecněním základní rezoluční metody výrokové logiky, kterou jsme se zabývali v kap. 2.2. Tato obecná rezoluční metoda se stala základem pro logické programování, zejména programovací jazyk PROLOG (Programming in Logic).

Rezoluční metoda je jedna z procedur (algoritmů), které parciálně rozhodují, zda daná formule PL^1 je nesplnitelná. Pro předloženou formuli A , která nesplnitelná je, tedy procedura v konečném čase tuto skutečnost zjistí a zastaví se. V případě, že A je pouze splnitelná (ale ne logicky pravdivá), algoritmus nemusí nikdy skončit svou činnost. Chceme-li tedy rozhodnout, zda daná formule A je logicky pravdivá, použijeme rezoluční metodu na formuli $\neg A$ a zjišťujeme, zda je nesplnitelná. Je-li tomu tak, procedura to zjistí a po konečném počtu kroků vydá kladnou odpověď. V případě, že A je pouze splnitelná, proces nemusí nikdy skončit. Speciálně, chceme-li zjistit, zda $\{A_1, \dots, A_n\} \models B$, aplikujeme rezoluční metodu na formuli $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \wedge \neg B$, neboť pokud je tato formule nesplnitelná, pak je formule $(A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \supset B$ tautologie a vztah vyplývání platí. Jinými slovy, v případě dokazování platnosti úsudku $\{A_1, \dots, A_n\} \models B$ stačí dokázat nesplnitelnost množiny formulí $\{A_1, \dots, A_n, \neg B\}$.

Pozn.: Musíme mít ovšem na paměti, že uvedené ekvivalence, tj. $\{A_1, \dots, A_n\} \models B$ právě když $\models (A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \supset B$, právě když $(A_1 \wedge \dots \wedge A_n \wedge \neg B)$ je kontradikce, platí pouze pro uzavřené formule bez volných proměnných.

Rezoluční metodu lze aplikovat pouze na formule ve speciálním tvaru, v tzv. *klauzulární (Skolemově) formě*. Nejprve proto ukážeme, že každou formuli je možno převést do klauzulární formy tak, že výsledná formule je splnitelná, právě když výchozí formule je

splnitelná. Potom uvedeme Herbrandovu větu, o níž se opírají první známé rozhodovací procedury pro dokazování nespelnitelnosti v predikátové logice 1. řádu. Uplatnění rezolučního pravidla výrokové logiky je totiž v PL^1 komplikováno tím, že v literálech se vyskytují termy obecně různého tvaru, které je nutno nějak unifikovat. Popíšeme tzv. základní rezoluční metodu pro PL^1 , která je značně neefektivní. Průlomem v těchto metodách se však stal *Robinsonův* objev *unifikačního algoritmu*, který umožnil zobecnění základní rezoluční metody na mnohem účinnější obecnou rezoluční metodu, která se pak stala základem logického programování.

Automatické dokazování v predikátové logice zobecňuje postupy automatického dokazování ve výrokové logice. Oproti situaci ve výrokové logice je situace v predikátové logice složitější, a to z těchto důvodů:

- Komplikovanější je procedura převedení formule na klauzulární tvar, tj. do Skolemovy klauzulární formy. Skolemova klauzulární forma je formule v konjunktivní normální formě, která má v prefixu pouze všeobecné kvantifikátory a matice formule je konjunkce *klauzulí*, kde klauzule je disjunkce literálů. Proto oproti výrokové logice je tato metoda složitější. Zejména si musíme poradit s kvantifikátory, a to tak, aby všeobecné kvantifikátory byly v prefixu a existenční se nevyskytovaly vůbec. Musíme tedy provést
 - převod formule do konjunktivní normální formy
 - eliminaci existenčních kvantifikátorů z formule (tzv. Skolemizace).
- Složitější je tvar rezolučního odvozovacího pravidla. Jeho použití vyžaduje simultánní úpravu literálů, tzv. unifikaci.

Než uvedeme přesné definice, ukážeme si postup nejprve na jednoduchých příkladech. Připomeňme si sémantická ověření platnosti úsudků v Příkladu 3.3.4. Takovéto ověřování je poněkud složité a nedá se automatizovat. Ukážeme nyní, jak elegantním způsobem dokázat platnost úsudků *ad b)* a *c)* tohoto příkladu za pomoci rezoluční metody:

Marie má ráda pouze vítěze.
Karel není vítěz.

$\forall x [R(m,x) \supset V(x)]$
 $\neg V(k)$

Marie nemá ráda Karla.

$\neg R(m,k)$

Nejprve negujeme závěr úsudku: $R(m,k)$. Pak převedeme jednotlivé formule do klauzulární formy. Je to taková formule, která má v prefixu pouze všeobecné kvantifikátory a matice formule je v *konjunktivní normální formě*, tedy je to konjunkce disjunkcí literálů (klauzulí). Připomeňme, že literál je atomická formule nebo její negace. Formule $R(m,k)$ je již v klauzulární formě (té nejjednodušší): obsahuje pouze jeden literál $R(m,k)$. Druhý předpoklad $\neg V(k)$ je rovněž v klauzulární formě. Jedná se opět o jeden literál, tentokrát je to negace atomické formule $V(k)$. Zbývá upravit první předpoklad. Formule neobsahuje žádné existenční kvantifikátory, proto je naše situace jednoduchá. Stačí převést formuli $[R(m,x) \supset V(x)]$ do konjunktivní formy $[\neg R(m,x) \vee V(x)]$. Je to opět velice jednoduchá konjunktivní forma, která obsahuje jedinou klauzuli, tj. disjunkci dvou literálů $\neg R(m,x)$ a $V(x)$. Nyní sepíšeme klauzule pod sebe a snažíme se aplikovat rezoluční pravidlo „vyškrtávání literálů s opačným znaménkem“.

1. $\neg R(m,x) \vee V(x)$
2. $\neg V(k)$
3. $R(m,k)$

Nyní bychom mohli uplatnit rezoluční pravidlo např. na klauzule 1 a 2, neboť literály $V(x)$ a $\neg V(k)$ mají „opačná znaménka“. Avšak atomické formule $V(x)$ a $V(k)$ nejsou identické. Pomoc je jednoduchá. Uvědomme si, že proměnná x je v prvním předpokladu vázána všeobecným kvantifikátorem. Můžeme tedy uplatnit pravidlo konkretizace „co platí pro všechny, platí i pro některé“ (viz Příklad 3.3.3 pravidlo 1) a dosadit za proměnnou x konstantu k . Tím provedeme *unifikaci* termů $V(x)$ a $\neg V(k)$. Výsledkem bude nová klauzule:

- | | |
|------------------|------------------------|
| 4. $\neg R(m,k)$ | 1, 2, substituce x/k |
| 5. # | 3, 4 |

Došli jsme k prázdné klauzuli, která je nesplnitelná. Tedy negovaný závěr je ve sporu s předpoklady, *úsudek je platný*.

Kdo zná Marii i Pavla, ten Marii lituje.

$$\forall x ([Z(x,m) \wedge Z(x,p)] \supset L(x,m))$$

Někteří nelitují Marii, ačkoliv ji znají.

$$\exists x [\neg L(x,m) \wedge Z(x,m)]$$

Někdo zná Marii, ale ne Pavla.

$$\exists x [Z(x,m) \wedge \neg Z(x,p)]$$

Provedeme důkaz sporem, tedy budeme předpokládat, že nastane v nějaké interpretaci případ, kdy jsou předpoklady pravdivé a závěr nepravdivý, tedy je pravdivá jeho negace: $\forall x [Z(x,m) \supset Z(x,p)]$. Nyní převedeme jednotlivé formule do klauzulární formy (všeobecný kvantifikátor vynecháváme, protože víme, že zůstanou pouze proměnné vázané všeobecným kvantifikátorem, na které pak můžeme uplatňovat substituci za účelem unifikace literálů).

1. *předpoklad*:

$$([Z(x,m) \wedge Z(x,p)] \supset L(x,m)) \Leftrightarrow \neg[Z(x,m) \wedge Z(x,p)] \vee L(x,m) \Leftrightarrow \neg Z(x,m) \vee \neg Z(x,p) \vee L(x,m).$$

Obdrželi jsme jednu klausuli.

2. *předpoklad*: Nyní máme problém. Formule je uzavřena *existenčním* kvantifikátorem, který potřebujeme odstranit. Jediná možnost, která se nabízí, je tato: Pokud existuje nějaké individuum x , předpokládejme, že je to např. nějaké individuum a . *Pozor!* Musíme však použít takovou konstantu, která dosud ještě nebyla použita, neboť toto individuum a jistě nemusí být totožné s individuem p nebo m . Převedeme tedy tento předpoklad na formuli

$$[\neg L(a,m) \wedge Z(a,m)]$$

Obdrželi jsme *dvě* jednoduché klausule, literály $\neg L(a,m)$ a $Z(a,m)$. Pozor, jsou to opravdu dvě klausule, neboť klausulární forma je *konjunkce* disjunkcí literálů.

3. *negovaný závěr*: $\neg Z(y,m) \vee Z(y,p)$. Přitom jsme vázanou proměnnou x přejmenovali na y , neboť tato proměnná je jistě jiná, než to x v prvním předpokladu.

Opět sepišeme klausule pod sebe a budeme se pokoušet generovat resolventy za pomoci unifikace literálů (substituce vhodných termů za (všeobecně kvantifikované) proměnné):

- | | | |
|----|--|------------------------|
| 1. | $\neg Z(x,m) \vee \neg Z(x,p) \vee L(x,m)$ | |
| 2. | $\neg L(a,m)$ | |
| 3. | $Z(a,m)$ | |
| 4. | $\neg Z(y,m) \vee Z(y,p)$ | |
| 5. | $\neg Z(a,m) \vee \neg Z(a,p)$ | 1, 2, substituce x/a |
| 6. | $\neg Z(a,p)$ | 3, 5 |
| 7. | $\neg Z(a,m)$ | 4,6, substituce y/a |
| 8. | # | 3, 7 prázdná klausule |

Tedy negovaný závěr je ve sporu s předpoklady, *úsudek je platný*.

Pozn.:

- Unifikace je vždy dosazování termů za proměnné (ne naopak!)
- Při unifikaci musíme vždy dosadit substituovaný term za *všechny* výskytů dané proměnné ve formuli, do které substituujeme.
- Odstranění existenčního kvantifikátoru (tj. úprava druhého předpokladu) jistě *není přechod k ekvivalentní* formuli (viz cvičení 3.3, úlohy 1 a 2). Situace však není tak špatná, neboť provádíme *důkaz sporem*, a tento přechod sice nezachovává pravdivost, zachovává však *splnitelnost*, což pro důkaz sporem postačuje. Jistě, je-li např. formule $\exists x A(x)$ splnitelná, pak alespoň jeden prvek universa splňuje podmínku A, tedy formule $A(a)$ bude také splnitelná, protože *existuje taková interpretace konstanty a*, pro kterou nabude formule $A(a)$ hodnoty pravda. Musíme však volit pokaždé *novou konstantu*, která dosud nebyla v jazyce použita.

Po těchto úvodních příkladech přejdeme k přesným definicím. První definice je spíše pomocnou, pro ilustraci dalšího postupu.

Definice 4.2.1 (prenexní tvar formule): Formule A predikátové logiky je v *prenexním tvaru*, má-li tvar $Q_1x_1 Q_2x_2 \dots Q_nx_n B$, kde $n \geq 0$ a pro každé $i = 1, 2, \dots, n$ je Q_i buď všeobecný kvantifikátor \forall nebo existenční \exists , x_1, x_2, \dots, x_n jsou navzájem různé individuové proměnné, B je formule utvořená z elementárních formulí pouze užitím výrokových spojek \neg, \wedge, \vee . Výraz $Q_1x_1 Q_2x_2 \dots Q_nx_n$ se nazývá *prefix* (charakteristika) a B *otevřeným jádrem (maticí)* formule A v prenexním tvaru.

Věta 4.2.1: Každou formuli lze ekvivalentně přepsat do prenexního tvaru, tj. ke každé formuli predikátové logiky A existuje formule A^* v prenexním tvaru, která je s formulí A ekvivalentní, tj. $A \Leftrightarrow A^*$.

Důkaz: Matematickou indukcí podle hierarchického řádu formule A .

1. *Báze indukce.* Formule řádu 0 (elementární formule) neobsahují žádné spojky ani kvantifikátory a jsou tedy automaticky v prenexním tvaru. Tvrzení věty tedy platí.

2. *Indukční krok.* Ukážeme, že platí-li tvrzení věty pro formule B , C , pak platí také pro formule $\forall xB$, $\exists xB$, $\neg B$, $B \wedge C$, $B \vee C$, $B \supset C$, $B \equiv C$ (tj. platnost věty se přenáší z formulí nižšího řádu na formule řádu vyššího).

- Je-li $A = \forall xB$ nebo $A = \exists xB$, pak vzhledem k tomu, že B je v prenexním tvaru (indukční předpoklad), je i A v prenexním tvaru, tj. $A \Leftrightarrow A^*$.

- Necht' $A = \neg B$. Formule B je podle indukčního předpokladu v prenexním tvaru, tj. $B = Q_1x_1 Q_2x_2 \dots Q_nx_n D$, kde Q_i jsou \forall nebo \exists a D je formule bez kvantifikátorů. Potom n -násobným použitím de Morganova zákona $\neg Qx F \equiv Q'x \neg F$ (Q' je duální kvantifikátor ke Q), dostáváme $A = \neg Q_1x_1 Q_2x_2 \dots Q_nx_n D \Leftrightarrow Q_1'x_1 Q_2'x_2 \dots Q_n'x_n \neg D \Leftrightarrow A^*$ a formule A je převedena do ekvivalentního prenexního tvaru A^* .

- Necht' $A = B \wedge C$. Formule B , C jsou podle indukčního předpokladu v prenexním tvaru, tj. $B = Q_1x_1 Q_2x_2 \dots Q_mx_m F$, $C = Q_1y_1 Q_2y_2 \dots Q_ny_n G$, kde F , G jsou formule bez kvantifikátorů. Máme dokázat, že existuje formule A^* ekvivalentní s formulí A . To zajisté platí, je-li $k = n + m = 0$. Tvrzení bude dokázáno, jestliže z předpokládané platnosti pro $k = n + m - 1$ dokážeme platnost pro $k = n + m$. Důkazem je následující řetěz ekvivalencí:

$$A = B \wedge Q_1y_1 G_1 \Leftrightarrow Q_1y_1 B \wedge G_1 \Leftrightarrow Q_1y_1 (B \wedge G_1)^* \Leftrightarrow A^*.$$

Formule $B \wedge G_1$ obsahuje totiž jen $n + m - 1$ kvantifikátorů a lze tedy na ni použít indukční předpoklad.

- Pro složené formule $B \vee C$, $B \supset C$, $B \equiv C$ lze indukční krok dokázat podobným způsobem jako v předchozím bodě.

Vzhledem k tomu, že

$$B \vee C \Leftrightarrow \neg(\neg B \wedge \neg C), \quad B \supset C \Leftrightarrow \neg(B \wedge \neg C), \quad B \equiv C \Leftrightarrow \neg(B \wedge \neg C) \wedge \neg(C \wedge \neg B),$$

je však důkaz indukčního kroku pro \forall, \supset, \equiv nadbytečný.

Algoritmus (převod formule do prenexního tvaru):

(1) Eliminace funktorů \supset a \equiv . Použijeme ekvivalence:

$$A \supset B \Leftrightarrow \neg A \vee B,$$

$$A \equiv B \Leftrightarrow (A \supset B) \wedge (B \supset A) \Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A).$$

(2) Převod formulí na tvar s čistými proměnnými.

a) Použijeme následující ekvivalence (náhrady levé strany pravou):

$$(\forall x A \wedge \forall x B) \Leftrightarrow \forall x (A \wedge B) \quad (\exists x A \vee \exists x B) \Leftrightarrow \exists x (A \vee B)$$

b) Přejmenování vázaných proměnných tak, aby žádná proměnná nebyla ve formuli současně volná i vázaná a tak, aby všechny proměnné vázané různými kvantifikátory byly navzájem různé. To platí nejenom pro celou formuli, ale i pro každou její podformuli.

(3) Vypuštění nadbytečných kvantifikátorů, tj. kvantifikátorů jejichž dosah působnosti neobsahuje žádný výskyt kvantifikované proměnné.

(4) Přenesení všech výskytů spojky negace bezprostředně před elementární formuli. Toho lze dosáhnout opakovaným užitím následujících ekvivalencí (náhrady jejich levé strany pravou stranou):

$$\neg\neg A \Leftrightarrow A,$$

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B, \quad (\textit{de Morgan})$$

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B, \quad (\textit{de Morgan})$$

$$\neg\forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x), \quad (\textit{de Morgan})$$

$$\neg\exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x). \quad (\textit{de Morgan})$$

(5) Přenesení všech kvantifikátorů na začátek formule. Toho lze dosáhnout opakovaným užitím následujících ekvivalencí (náhrady jejich levé strany pravou stranou):

$$\forall x A \wedge B \Leftrightarrow \forall x (A \wedge B) \quad \exists x A \vee B \Leftrightarrow \exists x (A \vee B)$$

B neobsahuje volnou x

$$A \wedge \forall x B \Leftrightarrow \forall x (A \wedge B) \quad A \vee \exists x B \Leftrightarrow \exists x (A \vee B)$$

A neobsahuje volnou x

$$\exists x A \wedge B \Leftrightarrow \exists x (A \wedge B) \quad \forall x A \vee B \Leftrightarrow \forall x (A \vee B)$$

B neobsahuje volnou x

$$A \wedge \exists x B \Leftrightarrow \exists x (A \wedge B) \qquad A \vee \forall x B \Leftrightarrow \forall x (A \vee B)$$

A neobsahuje volnou x

Příklad 4.2.1: Nalezneme prenexní formu formule na řádce 1:

1. $\forall x [P(x) \wedge \forall y \exists x (-Q(x,y) \supset \forall z R(a,x,y))]$
výchozí formule
2. $\forall x [P(x) \wedge \forall y \exists x (Q(x,y) \vee \forall z R(a,x,y))]$
eliminace \supset
3. $\forall x [P(x) \wedge \forall y \exists x_1 (Q(x_1,y) \vee \forall z R(a,x_1,y))]$
přejmenování proměnné
4. $\forall x [P(x) \wedge \forall y \exists x_1 (Q(x_1,y) \vee R(a,x_1,y))]$
vypuštění nadb. kvantifikátoru
5. $\forall x \forall y [P(x) \wedge \exists x_1 (Q(x_1,y) \vee R(a,x_1,y))]$
přesun kvantifikátoru doleva
6. $\forall x \forall y \exists x_1 [P(x) \wedge (Q(x_1,y) \vee R(a,x_1,y))]$
přesun kvantifikátoru doleva

Pozn.: Prenexní tvar formule není určen jednoznačně. Konečná podoba prenexní formule závisí na pořadí provádění úprav a na způsobu přejmenování vázaných proměnných. Všechny prenexní tvary jsou však ekvivalentní.

Definice 4.2.2 (Skolemova klauzulární forma):

- 1) *Literál* je atomická formule nebo negace atomické formule (např. $P(f(x))$, $\neg Q(y)$).
- 2) *Klausule* je disjunkce literálů (např. $[P(f(x)) \vee \neg Q(y)]$).
- 3) *Konjunktivní normální tvar* formule predikátové logiky je prenexní tvar formule, jejíž matice je konjunkce disjunkcí literálů (tj. konjunkce *klauzulí*).
- 4) *Skolemova klauzulární forma* uzavřené formule je prenexní tvar této formule, která neobsahuje žádné existenční kvantifikátory a matice formule je konjunkce klauzulí.

Skolemovu formu formule A označíme zápisem A^S .

Eliminace existenčních kvantifikátorů (Skolemizace).

Skolemova forma vznikne z formule opakovaným použitím následujících dvou operací (**skolemizací**):

- a) $\exists x \forall y_1 \dots \forall y_n A(x, y_1, \dots, y_n) \rightarrow \forall y_1 \dots \forall y_n A(c, y_1, \dots, y_n)$,
kde c je nová (v jazyce dosud nepoužitá) individuová konstanta, tzv. *Skolemova konstanta*
- b) $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n \exists y A(x_1, x_2, \dots, x_n, y) \rightarrow \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n A(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n))$,
kde f je nový (v jazyce dosud nepoužitý) n -ární funkční symbol, tzv. *Skolemova funkční konstanta*.



Thoralf Albert Skolem (23.5.1887 – 23.3.1963) byl norský matematik a logik. Publikoval více než 180 článků (matematika – teorie grup, svazů, matematická logika, atd.).

Pozn.: Každému eliminovanému existenčnímu kvantifikátoru odpovídá jiná Skolemova konstanta.

1. Skolemovy konstanty představují individua, o jejichž existenci vypovídají původní formule. Tak např.
 - $\exists x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall y P(c, y)$
Je-li univerzem množina všech přirozených čísel a realizací (interpretací) predikátu P je relace \leq (tedy $P(x, y)$ chápeme jako $x \leq y$), pak konstantu c lze interpretovat jako číslo 0. Tedy, je-li formule na levé straně v této interpretaci pravdivá, pak je i formule na pravé straně pravdivá v této interpretaci. V tomto modelu je konstanta c jediná, ale v jiných modelech tomu tak být nemusí. Ovšem toto pravidlo nezachovává pravdivost. Kdybychom interpretovali konstantu c např. číslem 3, pak formule na levé straně je

v této interpretaci pravdivá, kdežto formule na pravé straně je nepravdivá.

- $\forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \forall x P(x, f(x))$

Důležité: jestliže je existenčně vázaná proměnná y v dosahu nějakých všeobecných kvantifikátorů vázajících proměnné x_1, x_2, \dots, x_n , pak musíme volit *funkční* symbol f arity n a za proměnnou y dosadíme term $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, neboť hodnoty y závisí na x_1, x_2, \dots, x_n .

Je-li např. univerzem množina reálných čísel a oborem pravdivosti predikátu P je relace $<$, pak interpretací funkčního symbolu f může být např. funkce F , která je zadána předpisem: $F(x) = x + \sqrt{3}$. V tomto modelu jsou obě formule pravdivé. V jiné interpretaci tomu tak být nemusí, pravidlo *nezachovává pravdivost*, není ve shodě s vyplýváním. Avšak zachovává *splnitelnost*. Je-li formule na levé straně pravdivá v nějaké interpretaci, pak lze vždy volit interpretaci symbolu f , tedy nalézt funkci $F(x)$, takovou, aby byla pravdivá i formule vpravo.

Tedy *Skolemova klausulární forma* formule má tento tvar:

$$\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n [C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_k],$$

kde C_i jsou klausule (disjunkce literálů). Vzhledem k tomu, že uvažujeme pouze uzavřené formule, není nutné všeobecné kvantifikátory explicitně uvádět.

Věta 4.2.2. Skolemova forma A^S uzavřené formule A není ekvivalentní s formulí A , ale platí:

$$|= A^S \supset A, \text{ neboli } A^S |= A.$$

Důkaz:

Nechť má formule $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n P(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n))$ libovolný model I . To znamená, že pro libovolnou n -tici d_1, d_2, \dots, d_n prvků universa platí, že $(n+1)$ -tice prvků universa

$$\langle d_1, d_2, \dots, d_n, f^I(d_1, d_2, \dots, d_n) \rangle \in P^U$$

(leží v oboru pravdivosti P), kde f^I je funkce přiřazená interpretací I symbolu f a P^U je relace – obor pravdivosti P v interpretaci I . Pak je ovšem interpretace I rovněž modelem formule $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n \exists y P(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$. Každý model formule A^S je tedy i modelem formule

A. Je-li tedy formule A nespíitelná (kontradikce – nemá model), pak je nespíitelná i formule A^S , což pro důkaz sporem postačuje.

Věta 4.2.3 (Skolem).

Každá formule A může být převedena na formuli A^S v *klauzulární* (Skolemově) *formě* takovou, že A je splnitelná, právě když A^S je splnitelná.

Z předchozí věty vyplývá, že je-li A^S splnitelná, pak je splnitelná i A . Obráceně, je-li formule A splnitelná (má aspoň jeden model) je splnitelná i formule A^S , neboť pak lze vždy nalézt takovou interpretaci symbolu f , aby v ní byla A^S pravdivá. Obě formule A^S , A jsou současně splnitelné nebo nespíitelné, nemusí však být ekvivalentní (tj. nemůžeme psát $A^S \Leftrightarrow A$ nebo $\models (A^S \equiv A)$).

Algoritmus převodu $A \rightarrow A^S$.

Krok 1. Utvoření existenčního uzávěru formule A . (Krok zachovává splnitelnost.)

Krok 2. Eliminace nadbytečných kvantifikátorů. (ekvivalentní krok)
Z formule A vypustíme všechny kvantifikátory $\forall x_i, \exists x_i$, v jejichž dosahu se nevyskytuje proměnná x_i .

Krok 3. Přejmenování proměnných. (ekvivalentní krok)
Přejmenujeme všechny proměnné, které jsou v A kvantifikovány více než jednou tak, aby všechny kvantifikátory měly ve svém dosahu navzájem různé proměnné.

Krok 4. Eliminace spojek \supset, \equiv podle těchto vztahů (ekvivalentní krok):
 $(A \supset B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$, $(A \equiv B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$

Krok 5. Přesun spojky \neg dovnitř dle de Morganových zákonů. (ekvivalentní krok)

Krok 6. Přesun kvantifikátorů doprava. (ekvivalentní krok)
Provádíme náhrady podle těchto ekvivalencí (Q je kvantifikátor \forall nebo \exists ; \odot je symbol \wedge nebo \vee ; A, B neobsahují volnou proměnnou x):

$$Qx (A \odot B(x)) \Leftrightarrow A \odot Qx B(x), Qx (A(x) \odot B) \Leftrightarrow Qx A(x) \odot B$$

Pozn.: Před provedením kroku 7. je vhodné provést ekvivalentní zjednodušující úpravy formule.

Krok 7. Eliminace existenčních kvantifikátorů (krok zachovává splnitelnost.)

Provádíme postupně *Skolemizaci podformulí* $Qx B(x)$, $Qx A(x)$, které jsme obdrželi v předchozím kroku 6, tedy náhradu existenčně kvantifikovaných formulí formulemi bez existenčního kvantifikátoru dle Definice 4.2.2 (část Skolemizace).

Krok 8. Přesun všeobecných kvantifikátorů doleva. (Ekvivalentní krok, neboť jsme již provedli krok 3. a platí ekvivalence dle 6.)

Krok 9. Použití distributivních zákonů. (ekvivalentní krok)

Provedeme postupné náhrady vlevo formulemi vpravo:

$$(A \wedge B) \vee C \Leftrightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C), A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

Rezoluční metoda je tedy metoda nepřímého důkazu, *sporem*:

- a) Důkaz logické pravdivosti formule A : dokazujeme nesplnitelnost negované formule $\neg A$.
- b) Důkaz platnosti úsudku $A_1, \dots, A_n \models Z$: dokazujeme nesplnitelnost množiny formulí $\{A_1, \dots, A_n, \neg Z\}$

Příklad 4.2.2:

- 1) Uvažujme formuli $A = \forall x \exists y \forall z \exists v [P(z, y) \wedge Q(x, v)]$.

Pokud bychom aplikovali Skolemizaci bez kroku 6, dostali bychom formuli:

$A^S = \forall x \forall z [P(z, f(x)) \wedge Q(x, h(x, z))]$, kde f, h jsou zavedené Skolemovy funkční konstanty. Použijeme-li však nejprve krok 6, dostaneme

$A' = \exists y \forall z P(z, y) \wedge \forall x \exists v Q(x, v)$ a z ní eliminací existenčních kvantifikátorů

$A'' = \forall z P(z, a) \wedge \forall x Q(x, h(x))$. Odtud pak přesunem kvantifikátorů doleva:

$A^S = \forall z \forall x [P(z, a) \wedge Q(x, h(x))]$, v níž zavedené Skolemovy konstanty a, h jsou mnohem jednodušší.

- 2) Krok 6 však je důležitý nejen proto, že výsledná klauzulární forma je jednodušší. Na tomto místě chceme upozornit na **důležitost kroku 6** algoritmu převodu do klauzulární formy. Častým omylem je domněnka, že je možno provést převod tak, že formulí nejprve převedeme do prenexní konjunktivní formy, a pak provedeme Skolemizaci. Na jednoduchém příkladě ukážeme, že takovýto postup by *nebyl úplným důkazovým kalkulem* (nedokázali bychom všechny tautologie PL¹):

Uvažme jednoduchou tautologii:

$$\neg \forall x P(x) \vee \forall y P(y).$$

Negací získáme formulí

$$\forall x P(x) \wedge \exists y \neg P(y),$$

kteřá je nespíitelná, což snadno dokážeme: Skolemizací obdržíme formulí $\forall x P(x) \wedge \neg P(a)$, a substitucí $\{x/a\}$ pak kontradikci $P(a) \wedge \neg P(a)$, tedy spor, prázdnou klausuli #.

Provedeme-li (**chybně!**) nejprve převod do prenexní formy a pak Skolemizaci, dostaneme:

$$[\forall x P(x) \wedge \exists y \neg P(y)] \vdash \forall x [P(x) \wedge \exists y \neg P(y)] \vdash \forall x \exists y [P(x) \wedge \neg P(y)] \vdash \forall x [P(x) \wedge \neg P(f(x))].$$

Nespíitelnost této formule uvedenými důkazovými postupy *nedokážeme*, neboť literály $P(x)$ a $\neg P(f(x))$ nejsou unifikovatelné: nelze nalézt takovou substituci termu $f(x)$ za proměnnou x , která by tyto literály unifikovala.

- 3) Převedeme formulí A na formulí v klauzulární (Skolemově) formě A^S:

$$A = \forall x \{P(x) \supset \exists z \{\neg \forall y [Q(x, y) \supset P(f(x_1))] \wedge \forall y [Q(x, y) \supset P(x)]\}\}.$$

Kroky 1. a 2. Utvoření existenčního uzávěru a eliminace $\exists z$:

$$\exists x_1 \forall x \{P(x) \supset \{\neg \forall y [Q(x, y) \supset P(f(x_1))] \wedge \forall y [Q(x, y) \supset P(x)]\}\}.$$

Krok 3. Přejmenování proměnné y :

$$\exists x_1 \forall x \{P(x) \supset \{\neg \forall y [Q(x,y) \supset P(f(x_1))] \wedge \forall z [Q(x,z) \supset P(x)]\}\}.$$

Krok 4. Eliminace \supset :

$$\exists x_1 \forall x \{\neg P(x) \vee \{\neg \forall y [\neg Q(x,y) \vee P(f(x_1))] \wedge \forall z [\neg Q(x,z) \vee P(x)]\}\}.$$

Krok 5. Přesun negace dovnitř:

$$\exists x_1 \forall x \{\neg P(x) \vee \{\exists y [Q(x,y) \wedge \neg P(f(x_1))] \wedge \forall z [\neg Q(x,z) \vee P(x)]\}\}.$$

Krok 6. Přesun kvantifikátorů $\exists y$ a $\forall z$ doprava:

$$\exists x_1 \forall x \{\neg P(x) \vee \{\{\exists y Q(x,y) \wedge \neg P(f(x_1))\} \wedge [\forall z \neg Q(x,z) \vee P(x)]\}\}.$$

Krok 7. Eliminace existenčních kvantifikátorů:

$$\forall x \{\neg P(x) \vee \{[Q(x,h(x)) \wedge \neg P(f(a))] \wedge [\forall z \neg Q(x,z) \vee P(x)]\}\}.$$

Krok 8. Přesun $\forall z$ doleva:

$$\forall x \forall z \{\neg P(x) \vee \{[Q(x,h(x)) \wedge \neg P(f(a))] \wedge [\neg Q(x,z) \vee P(x)]\}\}.$$

Krok 9. Použití distributivního zákona:

$$\forall x \forall z \{[\neg P(x) \vee Q(x,h(x))] \wedge [\neg P(x) \vee \neg P(f(a))] \wedge [\neg P(x) \vee \neg Q(x,z) \vee P(x)]\}.$$

Nyní můžeme ještě formuli zjednodušit:

- i) Vypustíme třetí klausuli, protože je to tautologie
- ii) Odstraníme kvantifikátor $\forall z$ (stal se zbytečným)
- iii) Ve druhé klausuli odstraníme $\neg P(x)$, neovlivníme tím splnitelnost

Výsledná Skolemova klauzulární forma je:

$$A^S = \forall x \{[\neg P(x) \vee Q(x,h(x))] \wedge \neg P(f(a))\}.$$

Příklad 4.2.3: Uvažujme formuli A v klausulární formě:

$$\forall x \forall y \forall z \forall v [P(x, f(x)) \wedge Q(y, h(y)) \wedge (\neg P(a, z) \vee \neg Q(z, v))].$$

Dokážeme, že tato formule je nesplnitelná. Vypišme jednotlivé klausule pod sebe a pokusme se uplatňovat pravidlo rezoluce:

1. $P(x, f(x))$
2. $Q(y, h(y))$
3. $\neg P(a, z) \vee \neg Q(z, v)$

Klausule 1 a 3 obsahují literály s opačným znaménkem, avšak uplatnění rezoluce brání to, že $P(x, f(x)) \neq P(a, z)$. UVědomíme-li si však, že všechny proměnné jsou univerzálně kvantifikovány a že platí zákon konkretizace (viz Příklad 3.3.3, pravidlo 1: Je-li term t substituovatelný za proměnnou x ve formuli $A(x)$, pak $\forall x A(x) \models A(x/t)$, "co platí pro všechny, platí i pro t "), můžeme se pokusit najít vhodnou substituci termů za proměnné tak, abychom dostali shodné, tj. *unifikované* literály. V našem příkladě taková substituce existuje:

$$x/a, z/f(a).$$

Po provedení této substituce dostaneme klausule:

- 1'. $P(a, f(a))$
2. $Q(y, h(y))$
- 3'. $\neg P(a, f(a)) \vee \neg Q(f(a), v)$

kde na 1' a 3' již lze uplatnit pravidlo rezoluce:

$$4. \neg Q(f(a), v)$$

Abychom nyní mohli rezolvovat klausule 2 a 4, zvolíme opět substituci:

$$y/f(a), v/h(f(a)).$$

Dostaneme

- 2'. $Q(f(a), h(f(a)))$
- 4'. $\neg Q(f(a), h(f(a)))$

a jejich rezolucí již obdržíme prázdnou klausuli #. Tedy formule A je nesplnitelná.

V našem příkladu jsme se opřeli o zákon konkretizace, tedy postup byl korektní. Problémem ovšem je to, že příslušné substituce jsme hledali zkusmo, intuitivně. Aby mohl být celý proces automatizován (a mohl tak sloužit jako základ pro logické programování), musíme najít nějaký *algoritmus*, jak provádět příslušné *unifikace*. Takové algoritmy existují. Uvedeme zde dva z nich, a to Herbrandovu proceduru a Robinsonův unifikační algoritmus. *Herbrandova procedura* byl historicky první takový algoritmus, avšak není příliš efektivní. Teprve objev Robinsonův umožnil prudký rozvoj automatického dokazování teorémů a logického programování.



Jacques Herbrand (12.2.1908 – 27.7.1931) byl velice nadaný francouzský matematik a logik. Již v 17 letech absolvoval École Normale Supérieure. Doktorandskou práci obhájil v 21 letech, poté musel narukovat do armády. V r. 1931 publikoval významnou studii na téma obecných rekurzivních funkcí a odjel na dovolenou jako horolezec do Alp. Zde však měl smrtelnou nehodu.

4.2.1 Herbrandova procedura

Podle definice je daná formule A nesplnitelná, právě když nabývá hodnoty *nepravda* ve všech interpretacích nad *všemi* možnými obory interpretace. Důkaz toho, že A je nesplnitelná, by samozřejmě usnadnilo, kdybychom našli jistý pevný obor interpretace D takový, že A je nesplnitelná, právě když nabývá hodnoty *nepravda* ve všech interpretacích nad tímto pevným oborem D . Takový obor ke každé formuli A existuje a nazývá se *Herbrandovo universum* formule A (budeme značit H_A). Je tvořeno množinou všech termů, které mohou být sestaveny z individuových konstant a_i a funkčních konstant f_i , které se vyskytují v A . (Pokud ve formuli A není žádná individuová konstanta, použijeme libovolnou, např. a .)

Příklad 4.2.4:

- a) Pro formuli $A = \forall x [P(a) \vee Q(b) \supset P(f(x))]$
je $H_A = \{a, b, f(a), f(b), f(f(a)), f(f(b)), \dots\}$
- b) Pro formuli $B = \forall x \forall y P(f(x), y, g(x, y))$
je $H_B = \{a, f(a), g(a, a), f(f(a)), g(a, f(a)), g(f(a), a), \dots\}$

Definice 4.2.3 (Základní instance).

Buď A formule v klausulární formě: $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n [C_1 \wedge \dots \wedge C_k]$. *Základní instancí* klausule C_i ($1 \leq i \leq k$) rozumíme klausuli, která vznikne z C_i tím, že *všechny* individuové proměnné v C_i nahradíme nějakými prvky z H_A .

Věta 4.2.4 (Herbrand)

Formule A v klausulární formě je nespíitelná, právě když existuje konečná konjunkce základních instancí jejich klausulí, která je nespíitelná.

Příklad 4.2.5: Uvažujme opět formuli A z příkladu 4.2.3:

$$\forall x \forall y \forall z \forall v [P(x, f(x)) \wedge Q(y, h(y)) \wedge (\neg P(a, z) \vee \neg Q(z, v))]$$

Dokážeme pomocí Herbrandovy věty, že tato formule je nespíitelná. Vypíšeme jednotlivé klausule pod sebe a budeme postupně generovat jejich základní instance:

1. $P(x, f(x))$
2. $Q(y, h(y))$
3. $\neg P(a, z) \vee \neg Q(z, v)$

V našem případě je $H_A = \{a, f(a), h(a), f(f(a)), f(h(a)), h(f(a)), h(h(a)), \dots\}$. Nyní budeme po řadě dosazovat prvky Herbrandova universa za proměnné x, y, z, v tak dlouho, dokud nenalezneme “protipříklad”, čili spor.

Substituce 1: $\{x/a, y/a, z/a, v/a\}$

$$P(a, f(a)) \wedge Q(a, h(a)) \wedge [\neg P(a, a) \vee \neg Q(a, a)]$$

Substituce 2: $\{x/a, y/a, z/a, v/f(a)\}$

$$P(a, f(a)) \wedge Q(a, h(a)) \wedge [\neg P(a, a) \vee \neg Q(a, f(a))]$$

atd., až

Substituce n : $\{x/a, y/f(a), z/f(a), v/h(f(a))\}$

$$P(a, f(a)) \wedge Q(f(a), h(f(a))) \wedge [\neg P(a, f(a)) \vee \neg Q(f(a), h(f(a)))]$$

Rezoluční metodou výrokové logiky nyní snadno ověříme, že tato konjunkce je nespíitelná. Tedy jsme našli protipříklad splnitelnosti formule A (matice formule nemůže být pravdivá pro všechna x, y, z, v , neboť není splněna valuací, která těmto proměnným přiřadí individua z H_A dle substituce n), a proto je tato formule nespíitelná.

Herbrandova procedura parciálně rozhoduje, zda je daná formule A nespíitelná. K dané formuli postupně generujeme základní instance jejich klausulí a resoluční metodou vždy testujeme, zda je jejich konjunkce nespíitelná. Jestliže tomu tak je, pak A je nespíitelná a tato procedura to po konečném počtu kroků zjistí.

V případě splnitelnosti A může procedura generovat donekonečna nové a nové základní instance a testovat jejich konjunkce.

Podstatným problémem této metody je skutečnost, že generování základních klausulí je neefektivní. Počet základních instancí, které musí být generovány, dokud nenarazíme na protipříklad, tj. nesplnitelnou konjunkci, může být často tak velký, že nám přeplní paměť počítače, nehledě na časovou složitost takového algoritmu. *J.A. Robinson* navrhl v r. 1965 metodu, která na rozdíl od Herbrandovy procedury nevyžaduje generování základních instancí, ale rozhodne přímo, zda k *libovolné* konjunkci klausulí existuje substituce taková, která unifikuje některé literály a umožní dokázat nesplnitelnost (pokud tato konjunkce nesplnitelná je).

4.2.2 *Robinsonův unifikační algoritmus.*

Pozn.: John Alan Robinson (narozen v r. 1928) je vzděláním filosof, dále matematik a zabývá se teoretickou informatikou. Je emeritním profesorem na Syracuse universitě v USA. Jeho nejdůležitější výsledky se týkají automatizovaného dokazování teorémů, logického programování založeného na rezolučním principu a unifikaci termů (r. 1965). *Robinson* obdržel v r. 1996 Herbrandovu cenu za významný přínos k automatickému usuzování a dokazování.

Definice 4.2.3 (substituce a instance formule):

Nechť A je formule obsahující individuové proměnné x_i , $i=1,2,\dots,n$, a to buď přímo (jako bezprostřední argumenty) nebo zprostředkovaně (jako argumenty funkcí). Označme

$$\sigma = \{x_1/t_1, x_2/t_2, \dots, x_n/t_n\}$$

simultánní substituci termů t_i za (*všechny výskyty*) individuové proměnné x_i pro $i=1,2,\dots,n$. Potom zápisem

$A\sigma$

označíme formuli, která vznikne z formule A *provedením substituce* σ . Poznamenejme, že substituce se může týkat všech, nebo jen některých, nebo dokonce žádné individuové proměnné obsažené v A (v tomto případě pro některá nebo všechna i substituujeme x_i/x_i).

Formule B je *instancí* formule A, jestliže existuje substituce σ taková, že $B = A\sigma$.

Pozn.: Substitute lze skládat. Pro skládání (superpozici) substitucí platí:

- $(\sigma\rho)\tau = \sigma(\rho\tau) = \sigma\rho\tau$, tj. skládání substitucí je asociativní.
- Pro identickou substituci (tj. x_i/x_i pro všechna i) ε platí $\varepsilon\sigma = \sigma\varepsilon = \sigma$, tj. identická substituce hraje v algebře substitucí úlohu jednotkového prvku.
- $\sigma\rho \neq \rho\sigma$, tj. skládání substitucí není obecně komutativní.

Definice 4.2.4 (unifikace):

Unifikace (unifikační substituce, unifikátor) formulí A, B je substituce σ taková, že

$$A\sigma = B\sigma.$$

Nejobecnější unifikace formulí A, B je unifikace σ taková, že pro každou jinou unifikaci ρ formulí A, B platí $\rho = \sigma\tau$, kde $\tau \neq \varepsilon$, tj. každá unifikace vznikne z nejobecnější unifikace provedením další dodatečné substituce.

Pozn.:

1. Unifikace atomických formulí (literálů) A, B nemusí existovat, např.:
 - literály $P(x,y)$, $Q(z,a)$ nelze unifikovat, protože se jedná o dva různé predikáty (byť se stejnou aritou)
 - literály $P(x)$, $P(f(x))$ nelze unifikovat, přestože se jedná o stejné predikáty (neexistuje žádná unifikující substituce).
2. K daným dvěma formulím může existovat více různých unifikací. Nechť např.

$$A = P(x, y), B = P(u, 2).$$

Potom:

- $\sigma = \{x/u, y/2\}$ je unifikační substituce, neboť $A\sigma = B\sigma = P(u,2)$,
- $\rho = \{x/3, y/2, u/3\}$ je unifikační substituce, neboť $A\rho = B\rho = P(3,2)$,
- $\tau = \{x/f(y), y/2, u/f(y)\}$ je unifikační substituce, neboť $A\tau = B\tau = P(f(y), 2)$.

$A\sigma$, $A\rho$, $A\tau$ jsou různými instancemi formule A , přitom formule $A\rho$ je základní instancí (podobně $B\tau$, $B\rho$, $B\sigma$ jsou různými instancemi formule B a $B\rho$ je základní instancí).

σ , ρ , τ jsou různými unifikacemi formulí A , B . Unifikace σ je nejobecnější unifikace těchto formulí. Každou jinou unifikaci získáme z této dodatečnou substitucí, např.:

- $\rho = \sigma.\{u/3\}$,
- $\tau = \sigma.\{u/f(y)\}$.

(Tedy nejobecnější unifikace je ta "nejjednodušší", která ponechává co nejvíce proměnných volných.)

Robinsonův algoritmus nalezení nejobecnější unifikace:

Formulace zcela obecného algoritmu je poměrně složitá (patří do výpočetních metod umělé inteligence) a jeho „ruční“ simulace značně nepřehledná. Omezíme se proto pouze na případ, kdy unifikované elementární formule nemají na obou místech stejnohlých argumentů současně nějaké složené termy (v tomto případě by bylo třeba rekurzivním algoritmem postupně tyto struktury rozkrývat).

Předpokládejme tedy

$$A = P(t_1, t_2, \dots, t_n), B = P(s_1, s_2, \dots, s_n),$$

kde $t_1, t_2, \dots, t_n, s_1, s_2, \dots, s_n$ jsou termy takové, že t_i, s_i nejsou současně složené termy (dle Def. 3.1.1, bod II a), tedy alespoň jeden z těchto termů je proměnná. Potom nejobecnější unifikaci získáme takto:

1. Pro $i = 1, 2, \dots, n$ prováděj:
 - Je-li $t_i = s_i$, pak polož $\sigma_i = \varepsilon$.
 - Není-li $t_i = s_i$, pak zjisti, zda jeden z termů t_i, s_i představuje nějakou individuovou proměnnou x a druhý nějaký term r , který proměnnou x *neobsahuje*.
 - Jestliže ano, pak polož $\sigma_i = \{x/r\}$.
 - Jestliže ne, pak ukonči práci s tím, že formule A, B nejsou unifikovatelné.
2. Po řádném dokončení cyklu urči $\sigma = \sigma_1\sigma_2\dots\sigma_n$. Substituce σ je nejobecnější unifikací formulí A, B .

Příklad 4.2.6:

1. Necht' $A = P(x, f(x), u)$, $B = P(y, z, g(x, y))$
- $\sigma_1 = \{x/y\}$, $A\sigma_1 = P(y, f(y), u)$, $B\sigma_1 = P(y, z, g(y, y))$
 - $\sigma_2 = \{z/f(y)\}$, $A\sigma_1\sigma_2 = P(y, f(y), u)$, $B\sigma_1\sigma_2 = P(y, f(y), g(y, y))$
 - $\sigma_3 = \{u/g(y, y)\}$, $A\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = P(y, f(y), g(y, y))$, $B\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = P(y, f(y), g(y, y))$.

Složená substituce $\sigma = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$ je unifikací formulí A, B ($A\sigma = P(y, f(y), g(y, y)) = B\sigma$), a to nejobecnější unifikací.

2. Necht' $A = P(x, f(x), z)$, $B = P(y, z, g(x, y))$
- $\sigma_1 = \{x/y\}$, $A\sigma_1 = P(y, f(y), z)$, $B\sigma_1 = P(y, z, g(y, y))$
 - $\sigma_2 = \{z/f(y)\}$, $A\sigma_1\sigma_2 = P(y, f(y), f(y))$, $B\sigma_1\sigma_2 = P(y, f(y), g(y, y))$

Termy $f(y)$ a $g(y, y)$ unifikovat nelze, neboť se jedná o dva různé funkční symboly. Formule A, B nelze tedy unifikovat.

Věta 4.2.5 (Robinsonovo zobecněné rezoluční odvozovací pravidlo):

Necht' A_i, B_i, L_i jsou atomické formule predikátové logiky. Potom platí následující odvozovací pravidlo:

$$A_1 \vee \dots \vee A_m \vee L_1, B_1 \vee \dots \vee B_n \vee \neg L_2 \mid\text{-} A_1\sigma \vee \dots \vee A_m\sigma \vee B_1\sigma \vee \dots \vee B_n\sigma,$$

kde σ je unifikace formulí L_1, L_2 , tj. $L_1\sigma = L_2\sigma$.

Klauzule na levé straně odvozovacího pravidla nazýváme *rodičovskými klauzulemi* a klauzuli na pravé straně *rezolventou*.

Formule A^S v klausulární formě je nesplnitelná, právě když z ní lze opakovaným použitím obecného pravidla rezoluce odvodit prázdnou klauzuli #.

Poznámky:

1. Speciální případy rezolučního odvozovacího pravidla (předpokládáme $L_1\sigma = L_2\sigma$):
 - $m=0, n=0$: $L_1, \neg L_2 \vdash \#$
odvození sporu
 - $m=0, n=1$: $L_1, \neg L_2 \vee B \vdash B\sigma$
pravidlo MP
 - $m=1, n=1$: $L_1 \vee A, \neg L_2 \vee B \vdash A\sigma \vee B\sigma$
základní tvar rez. pravidla
2. Unifikace σ formulí L_1, L_2 může být jakákoliv; chceme-li však vyvodit z předpokladů (rodičovských klauzulí) nejobecnější závěr (rezolventu) je třeba použít nejobecnější unifikaci.

Důkaz (základního tvaru):

Předpoklady $L_1 \vee A, \neg L_2 \vee B$ se transformují na tvar $L_1\sigma \vee A\sigma, \neg L_2\sigma \vee B\sigma$, kde σ je unifikace formulí $L_1, \neg L_2$. S těmito předpoklady se dále pracuje stejným způsobem jako s původními předpoklady $L_1 \vee A, \neg L_1 \vee B$ v důkazu věty 2.2.3.

Příklad 4.2.7 (rezoluční metoda v predikátové logice):

- I. *Dokážeme analytickou pravdivost* věty:

„Jistý filosof odporuje všem filosofům, tedy odporuje sám sobě.“

Větu analyzujeme jako (zamýšlená interpretace je nad množinou individuí, $P \rightarrow$ podmnožina filosofů, $Q \rightarrow$ relace, ve které budou ty dvojice, kde první odporuje druhému)

$\exists x \{ [P(x) \wedge \forall y (P(y) \supset Q(x,y))] \supset Q(x,x) \}$

Formuli znegujeme a převedeme na klausulární tvar:

$\forall x \forall y \{ P(x) \wedge [\neg P(y) \vee Q(x,y)] \wedge \neg Q(x,x) \}$. K jednotlivým klausulím

1. $P(x)$
2. $\neg P(y) \vee Q(x,y)$
3. $\neg Q(x,x)$

je nejobecnějším unifikátorem substituce $\{y/x\}$:

4. $Q(x,x)$ 1. a 2.
 5. # 3. a 4.

Negovaná formule je nespelnitelná (kontradikce), proto je původní formule logicky pravdivá.

II. *Dokažme správnost úsudku:*

Všichni členové vedení jsou majiteli obligací nebo akcionáři.
 Žádný člen vedení není zároveň majitel obligací i akcionář.
 Všichni majitelé obligací jsou členy vedení.

Žádný majitel obligací není akcionář.

- $\forall x [V(x) \supset (O(x) \vee A(x))]$
 $\forall x [V(x) \supset \neg(O(x) \wedge A(x))]$
 $\forall x [O(x) \supset V(x)]$

$\forall x [O(x) \supset \neg A(x)]$

Klausule:

- | | |
|--|------------------|
| 1. $\neg V(x) \vee O(x) \vee A(x)$ | 1. předpoklad |
| 2. $\neg V(x) \vee \neg O(x) \vee \neg A(x)$ | 2. předpoklad |
| 3. $\neg O(x) \vee V(x)$ | 3. předpoklad |
| 4. $O(k)$ | negovaný závěr |
| 5. $A(k)$ | (po Skolemizaci) |
| 6. $\neg O(x) \vee \neg A(x)$ | rezoluce 2., 3. |
| 7. $\neg A(k)$ | rezoluce 4., 6., |
| substituce x/k | |
| 8. # | rezoluce 5., 7. |

Negovaný závěr je ve sporu s předpoklady, proto závěr z předpokladů vyplývá, *úšudek je platný*.

Pozn.: Všimněme si, že jsme první klausuli při důkazu nepoužili. Tedy závěr vyplývá již z druhého a třetího předpokladu (první je pro odvození důsledku nadbytečný).

III. Dokažme správnost úsudku:

Každý, kdo má rád Jiřího, bude spolupracovat s Milanem.
Milan nekomarádí s nikým, kdo kamarádí s Lád'ou.
Petr bude spolupracovat pouze s kamarády Karla.

Jestliže Karel kamarádí s Lád'ou, pak Petr nemá rád Jiřího.

$$\forall x [R(x, j) \supset S(x, m)]$$
$$\forall x [K(x, l) \supset \neg K(m, x)]$$
$$\forall x [S(p, x) \supset K(x, kr)]$$

$$K(kr, l) \supset \neg R(p, j)$$

Klausule:

- | | |
|-------------------------------------|------------------------------------|
| 1. $\neg R(x, j) \vee S(x, m)$ | 1. předpoklad |
| 2. $\neg K(y, l) \vee \neg K(m, y)$ | 2. předpoklad |
| 3. $\neg S(p, z) \vee K(z, kr)$ | 3. předpoklad |
| 4. $K(kr, l)$ | negovaný |
| 5. $R(p, j)$ | závěr |
| 6. $\neg K(m, kr)$ | rezoluce 4., 2., substituce y/kr |
| 7. $\neg S(p, m)$ | rezoluce 3., 6., substituce z/m |
| 8. $\neg R(p, j)$ | rezoluce 1., 7., substituce x/p |
| 9. # | rezoluce 5., 8. |

Negovaný závěr je ve sporu s předpoklady, proto závěr z předpokladů vyplývá, *úšudek je platný.*

IV. Dokažme správnost úsudku:

Každý muž má rád fotbal a pivo.
Xaver má rád pouze milovníky fotbalu a piva.
Někteří milovníci fotbalu nemají rádi pivo.
Kdo není muž, je žena.

(musíme explicitně stanovit všechny předpoklady)

Některé ženy nemá Xaver rád.

Konstanty: f -fotbal, p -pivo, a -Xaver; Predikáty: M -muž, R -mít rád, Z -žena

$\forall x [M(x) \supset (R(x,f) \wedge R(x,p))]$	1. předpoklad
$\forall x [R(a,x) \supset (R(x,f) \wedge R(x,p))]$	2. předpoklad
$\exists x [R(x,f) \wedge \neg R(x,p)]$	3. předpoklad
$\forall x [\neg M(x) \supset Z(x)]$	4. předpoklad
$\forall x [\neg Z(x) \vee R(a,x)]$	negovaný závěr:
$\neg \exists x [Z(x) \wedge \neg R(a,x)]$	

Klausule:

1. $\neg M(x) \vee R(x,f)$	1. premisa
2. $\neg M(x) \vee R(x,p)$	1. premisa
3. $\neg R(a,y) \vee R(y,f)$	2. premisa
4. $\neg R(a,y) \vee R(y,p)$	2. premisa
5. $R(k,f)$	3. premisa po Skolemizaci x/k
6. $\neg R(k,p)$	3. premisa po Skolemizaci x/k
7. $M(z) \vee Z(z)$	4. premisa
8. $\neg Z(u) \vee R(a,u)$	negovaný závěr
<hr/>	
9. $\neg R(a,k)$	rezoluce 4., 6. (y/k)
10. $\neg Z(k)$	rezoluce 8., 9. (u/k)
11. $M(k)$	rezoluce 7., 10. (z/k)
12. $R(k,p)$	rezoluce 2., 11. (x/k)
13. #	rezoluce 6., 12.

V. *Dokažme:*

$\forall x \forall y (D(x,y) \supset P(x,y)), \forall x \forall y (D(x,y) \wedge P(y,z) \supset P(x,z)), D(a,b), D(b,c) \models P(a,c)$

Jedna z možných interpretací nad universem lidí je tato:

- a, b, c jsou individuové konstanty označující konkrétní lidi
- $D(x,y)$ je binární predikát s významem "x je dítětem y",
 $P(x,y)$ je binární predikát s významem "x je potomkem y"

Klausule:

1. $\neg D(x,y) \vee P(x,y)$	1. předpoklad
2. $\neg D(x,y) \vee \neg p(y,z) \vee p(x,z)$	2. předpoklad
3. $D(a,b)$	3. předpoklad
4. $D(b,c)$	4. předpoklad
5. $\neg P(a,c)$	negace závěru

Užitím rezolučního pravidla získáme po provedení potřebných unifikací následující rezolventy:

- | | | |
|-----------------------------------|---------------|---------------|
| 6. $\neg D(a,c)$ | rezoluce: 5,1 | $\{x/a,y/c\}$ |
| 7. $\neg D(a,y) \vee \neg P(y,c)$ | rezoluce: 5,2 | $\{x/a,z/c\}$ |
| 8. $\neg P(b,c)$ | rezoluce: 7,3 | $\{y/b\}$ |
| 9. $\neg D(b,c)$ | rezoluce: 8,1 | $\{x/b,y/c\}$ |
| 10. # | rezoluce: 9,4 | |

Odvodili jsme spor – závěr z předpokladů vyplývá.

VI. Dokažme: $P(a), \forall y [P(y) \supset P(f(y))] \models p(f(f(a)))$

Jedna z možných interpretací použitého jazyka predikátové logiky je tato:

- proměnná y probíhá množinu všech celých čísel,
- a je konstanta označující konkrétní celé číslo (např. 4),
- $P(y)$ je unární predikát s významem " y je sudé číslo",
- $f(y)$ je unární funkční symbol s významem "druhá mocnina čísla y ".

Klauzule:

- | | |
|-----------------------------|---------------|
| 1. $P(a)$ | předpoklad |
| 2. $\neg P(y) \vee P(f(y))$ | předpoklad |
| 3. $\neg P(f(f(a)))$ | negace závěru |

rezolventy:

- | | | |
|-------------------|----------------|--------------|
| 4. $\neg P(f(a))$ | rezoluce: 3, 2 | $\{y/f(a)\}$ |
| 5. $\neg P(a)$ | rezoluce: 4, 2 | $\{y/a\}$ |
| 6. # | rezoluce: 5, 1 | |

Spor byl odvozen, tj. závěr z předpokladů vyplývá.

4.2.3 Základní principy logického programování

Definice 4.2.5 (metoda logického programování):

Metoda logického programování (v Prologu) je speciálním případem obecné rezoluční metody. Oproti obecné rezoluční metodě splňuje následující omezení:

- pracuje pouze s Hornovými klauzulemi (které mají nanejvýš jeden pozitivní literál),
- používá *lineární strategii generování rezolvent* (viz kapitola 2.2) spolu s tzv. *navracením (backtrackingem)*.

Poznámky: Necht' Q_1, \dots, Q_n, P jsou klauzule.

1. Logické programy používají následující notaci pro zápis klauzulí:

Hornovy klauzule	Ekvivalentní logický tvar	Zápis v logickém programu (Prolog)	
$\neg Q_1 \vee \neg Q_2$ $\vee \dots \vee \neg Q_n \vee P$	$Q_1 \wedge Q_2 \wedge \dots \wedge Q_n \supset P$	$P :- Q_1, Q_2, \dots, Q_n.$	1.
$\neg Q_1 \vee \neg Q_2 \vee P$	$Q_1 \wedge Q_2 \supset P$	$P :- Q_1, Q_2.$	2.
$\neg Q_1 \vee P$	$Q_1 \supset P$	$P :- Q_1.$	3.
P	P	$P.$	4.
$\neg Q_1 \vee \neg Q_2 \vee \dots \vee \neg Q_n$	$\neg(Q_1 \wedge Q_2 \wedge \dots \wedge Q_n)$	$?- Q_1, Q_2, \dots, Q_n.$	5.
$\neg Q_1 \vee \neg Q_2$	$\neg(Q_1 \wedge Q_2)$	$?- Q_1, Q_2.$	6.
$\neg Q_1$	$\neg Q_1$	$?- Q_1.$	7.
#	#	#	8.

2. V logickém programování používáme následující terminologii:

Zápisy 1., 2., 3.: podmíněné příkazy (**pravidla**)
 Zápis 4.: nepodmíněný příkaz (**fakt**)
 Zápisy 5., 6., 7.: **cíle** /cílové klauzule/
 Zápis 8.: # **spor** /prázdná klauzule/

- (2) Je-li aktuální cílová klauzule prázdná, ukonči výpočet s odpovědí "ano" na otázky položené výchozí cílovou klauzulí. (Byly-li ve výchozí cílové klauzuli volné proměnné, pak poslední substituce termů za tyto proměnné je řešením – součást odpovědi.) Není-li aktuální cílová klauzule prázdná, přejdi k bodu (3).
- (3) Vezmi nejlevější cíl v aktuální cílové klauzuli a hledej v programu příkaz se stejným jménem, který dosud nebyl s tímto cílem konfrontován (neúspěšně). Při hledání tohoto cíle postupuj v programu shora dolů (podle pořadí příkazů). Nenalezneš-li takový příkaz, ukonči výpočet s odpovědí "ne" na otázku položenou aktuální cílovou klauzulí. Nalezneš-li, přejdi k bodu (4).
- (4) Pokus se unifikovat hlavu vybraného cíle s hlavou nalezeného stejnojmenného příkazu. Jestliže unifikace neexistuje, vrať se k bodu (3). Jestliže existuje, vezmi za novou aktuální cílovou klauzulí rezolventu dosavadní cílové klauzule s tělem nalezeného příkazu (při užití nejobecnější unifikace hlavy cíle a hlavy příkazu). Přejdi k bodu (2).

Příklad 4.2.8: Přepíšeme důkaz platnosti úsudku z předchozí kapitoly, příklad V, do logického programu s tím, že přidáme ještě jeden fakt – $d(f,c)$.

Program 1:

1. $p(X,Y):-d(X,Y)$.
2. $p(X,Z):-d(X,Y), p(Y,Z)$.
3. $d(a,b)$.
4. $d(b,c)$.
5. $d(f,c)$.

Úloha 1.:

- | | |
|-----------------|-------------|
| 6. $?-p(a,c)$. | cíl / dotaz |
|-----------------|-------------|

Výpočet úlohy 1 programem 1:

- | | |
|-----------------|-----------------|
| 7. $?-d(a,c)$. | rezoluce: 6.,1. |
|-----------------|-----------------|

6. $\neg p(a,c)$.	backtracking	–
navracení, neboť cíl 7. nelze splnit		
7. $\neg d(a,Y), p(Y,c)$.	rezoluce: 6.,2.	($X/a, Z/c$)
8. $\neg p(b,c)$.	rezoluce: 7.,3.	(Y/b)
9. $\neg d(b,c)$.	rezoluce: 8.,1.	($X/b, Y/c$)
10. ano	rezoluce: 9.,4.	

Úloha 2.:

6. $\neg p(f,a)$.	zadání – cíl
--------------------	--------------

Výpočet úlohy 2 programem 1:

7. $\neg d(f,a)$.	rezoluce: 6.,1.
6. $\neg p(f,a)$.	backtracking
7. $\neg d(f,Y), p(Y,a)$.	rezoluce: 6.,2.
8. $\neg p(c,a)$.	rezoluce: 7.,5.
9. $\neg d(c,a)$.	rezoluce: 8.,1.
8. $\neg p(c,a)$.	backtracking
9. $\neg d(c,Y), p(Y,a)$.	rezoluce: 8.,2.
10. ne	$d(c,Y)$ nelze rezolvovat s
žádným příkazem, pro splnění cíle $p(c,a)$ byly vyzkoušeny	
všechny (obě) možnosti programu	

Program 2.:

1. $p(X,Y):\neg d(X,Y)$.	
2. $p(X,Y):\neg p(X,Z), d(Z,Y)$.	
3. $d(a,b)$.	
4. $d(b,c)$.	
5. $d(f,c)$.	
6. $\neg p(a,c)$.	cíl / dotaz

Výpočet úlohy 1 programem 2:

7. $\neg d(a,c)$.	rezoluce: 6.,1.
6. $\neg p(a,c)$.	backtracking
7. $\neg p(a,Z), d(Z,c)$.	rezoluce: 6.,2.
8. $\neg d(a,Z), d(Z,c)$.	rezoluce: 7.,1.
9. $\neg d(b,c)$.	rezoluce: 8.,3.
10. ano	rezoluce: 9.,4.

Výpočet úlohy 2 programem 2:

7. $\neg d(f,a)$.	rezoluce: 6.,1.
6. $\neg p(f,a)$.	backtracking

- | | |
|-----------------------------------|--|
| 7. $\neg p(f,Z), d(Z,a).$ | rezoluce: 6.,2. |
| 8. $\neg d(f,Z), d(Z,a).$ | rezoluce: 7.,1. |
| 9. $\neg d(c,a).$ | rezoluce: 8.,5. |
| 7. $\neg p(f,Z), d(Z,a).$ | backtracking, |
| 10. $\neg p(f,U), d(U,Z), d(Z,a)$ | rezoluce: 7.,2., ... nekonečný výpočet |

Poznámky k výpočtu úlohy 2 programem 2:

- Kdybychom generovali rezolventy do šířky místo do hloubky, skončil by výpočet po konečném počtu kroků. Druhý cíl cílové klauzule 8. je zřejmě nesplnitelný a tedy celá klauzule 8. je nesplnitelná a odpověď na otázku 2.úlohy je tedy záporná.
- Potřebná přejmenování vázaných proměnných tak, aby nedocházelo ke kolizím (viz např. vznik poslední 10. klauzule rezolucí z klauzulí 7.a 2.) provádí automaticky interpret Prologu.

Další typy možných úloh, dotazů:

- | | |
|------------------------|--------------------------------------|
| $\neg p(a,c), p(b,a).$ | platí současně $p(a,c), p(b,a)$? |
| $\neg p(X,c).$ | existuje X takové, že $p(X,c)$? |
| $\neg p(a,X).$ | existuje X takové, že $p(a,X)$? |
| $\neg p(X,Y).$ | existují X,Y taková, že $p(X,Y)$? |

Výpočet druhého dotazu programem 2:

- | | |
|-----------------------|-------------------------|
| 6. $\neg p(X,c).$ | |
| 7. $\neg d(X,c).$ | rezoluce 6, 1 (Y/c) |
| 8. ano $X = b$ | rezoluce 7, 4 (X/b) |

Program vydá jako odpověď poslední substituci za volnou proměnnou obsaženou v dotazu. Tedy odpověď zní, ano, cíl $p(X,c)$ je splněn pro $X=b$. Zadáme-li středník ; pak se ptáme na další možné odpovědi, vyvoláme proces navracení (backtracking):

- | | |
|---------------------------|-------------------------------|
| 6. $\neg p(X,c).$ | |
| 9. $\neg p(X,Z), d(Z,c).$ | rezoluce 6, 2 (Y/c) |
| 10. $\neg p(X,Z).$ | |
| 11. $\neg d(X,Z).$ | rezoluce 10, 1 |
| 12. ano | rezoluce 11, 3 ($X/a, Z/b$) |
| 13. $\neg d(b,c).$ | . |
| 14. ano , $X = a$ | |

Příklad 4.2.9.

Program:

1. $s(f(X,Y)):\neg s(X)$.
2. $s(f(X,Y)):\neg s(Y)$.
3. $s(g(X,Y)):\neg s(X),s(Y)$.
4. $s(a)$.
5. $s(b)$.

Poznámka:

Jedna z možných interpretací použitého jazyka predikátové logiky je tato:

- x, y jsou proměnné probíhající množinu celých čísel,
- a, b jsou konstanty, tj. konkrétní celá čísla,
- funkce f, g mají význam: $f(x, y) = x.y, g(x, y) = x+y$,
- predikát $s(x)$ má význam: číslo x je sudé.

Úloha:

6. $?\neg s(g(f(a,c),f(d,b)))$. zadání (ptáme se, zda číslo $a.c + d.b$ je sudé)

Výpočet:

7. $?\neg s((f(a,c),s(f(d,b))))$. rezoluce: 6.,3.
8. $?\neg s(a),s(f(d,b)))$. rezoluce: 7.,1.
9. $?\neg s(f(d,b))$. rezoluce: 9.,2.
10. $?\neg s(d)$. rezoluce: 9.,1.
9. $?\neg s(f(d,b))$. backtracking
10. $?\neg s(b)$. rezoluce: 9.,2.
11. ano rezoluce: 10.,5.

Příklad 4.2.10 (Euklidův algoritmus):

Program:

1. $nsd(X,X,X)$.
2. $nsd(X,Y,Z):\neg p(X,Y), nsd(f(X,Y),Y,Z)$.
3. $nsd(X,Y,Z):\neg p(Y,X), nsd(X,f(Y,X),Z)$.

Poznámka: Jedna z možných interpretací použitého jazyka predikátové logiky je tato:

- x, y, z jsou proměnné probíhající množinu celých čísel,
- funkce f má význam: $f(x, y) = x - y$,
- binární predikát $p(x, y)$ má význam $x > y$,
- ternární predikát $nsd(x, y, z)$ má význam: největším společným dělitelem čísel x, y je číslo z .

S užitím obvyklého matematického značení můžeme program přepsat v čitelnějším tvaru:

1. $nsd(X, X, X)$.
2. $nsd(X, Y, Z) :- X > Y, nsd(X - Y, Y, Z)$.
3. $nsd(X, Y, Z) :- Y > X, nsd(X, Y - X, Z)$.

Pozn.: Předpokládáme, že kromě těchto tří klausulí má náš program k dispozici vestavěné matematické procedury, které počítají běžné matematické úlohy, jako $6 > 4$, $4 > 2$, apod.

Úloha:

4. $?-nsd(4, 6, Z)$ zadání (hledáme největšího společného dělitele čísel 4 a 6)

Výpočet:

- | | |
|--------------------------------|---------------------------------------|
| 5. $?-4 > 6, nsd(4 - 6, 6, Z)$ | rezoluce: 4., 2. |
| 4. $?-nsd(4, 6, Z)$ | backtracking |
| 5. $?-6 > 4, nsd(4, 6 - 4, Z)$ | rezoluce: 4, 3. |
| 6. $?-nsd(4, 2, Z)$ | fakt " $6 > 4$ ", výpočet klausule 5. |
| 7. $?-4 > 2, nsd(4 - 2, 2, Z)$ | rezoluce: 6., 2. |
| 8. $?-nsd(2, 2, Z)$ | fakt " $4 > 2$ ", výpočet klausule 7. |
| 9. ano, Z = 2 | rezoluce: 8., 1. |

Příklad 4.2.11 (generování přirozených čísel):

Poznámka: Interpretujme $p(x)$ jako predikát " x je přirozené číslo" a $f(x)$ jako funkci "následník čísla x ".

Program:

1. $p(0)$. 0 je přirozené číslo
2. $p(f(X)) :- p(X)$. následník přirozeného čísla je přirozené číslo

Zadání:

3. $\neg p(f(X))$. jaká jsou všechna přirozená čísla ?

Výpočet:

4. $\neg p(X)$. rezoluce: 3., 2.

5. $p(f(0))$. neboť otázka 3. je splněna pro $X=0$

3. $\neg p(f(X))$. backtracking

4. $\neg p(X)$. rezoluce: 3., 5.

6. $p(f(f(0)))$. neboť otázka 3. je splněna pro $X=f(0)$

..... $X=f(f(0)), \dots$

Na závěr této kapitoly uvedeme jednoduchý příklad toho, jak zapsat v jazyce PL^1 a v logickém programu (Prologu) dané znalosti a dotazy na to, co z nich vyplývá.

Příklad 4.2.12

Všichni studenti mají daňové úlevy.

Kdo má daňové úlevy, je na tom dobře.

Všichni studenti jsou mladší než Karlova matka.

Tom a Petr jsou studenti.

Je Karel student?

Kdo je mladší než Karlova matka?

Kdo je na tom dobře?

PL^1	Klausule
$\forall x [S(x) \supset U(x)]$	1. $\neg S(x) \vee U(x)$
$\forall x [U(x) \supset D(x)]$	2. $\neg U(x) \vee D(x)$
$S(t) \wedge S(p)$	5. $S(t)$
	6. $S(p)$
$\forall x [S(x) \supset M(x, m(k))]$	7. $\neg S(x) \vee M(x, m(k))$
$S(k)$	8. $\neg S(k)$
Ne, nelze unifikovat	
$M(x, m(k))$	9. $\neg M(x, m(k))$
	10. $\neg S(x)$ rez. 9, 7
	11. $x=t$ rez. 5, 10
	12. $x=p$ rez. 6, 10
$D(x)$	13. $\neg D(x)$

14. $\neg U(x)$	rez. 2, 13
15. $\neg S(x)$	rez. 1, 14
16. $x=t$	rez. 5, 15
17. $x=p$	rez. 6, 15

Program:

- | | | |
|-----|---------------------------------|----------------------------------|
| 1. | $uleva(X) :- student(X).$ | |
| 2. | $dobre(X) :- uleva(X).$ | |
| 3. | $mladsi(X,m(k)) :- student(X).$ | |
| 4. | $student(tom).$ | |
| 5. | $student(petr).$ | |
| 6. | $?student(karel).$ | Je Karel student? |
| 7. | NE | |
| 8. | $?mladsi(X,m(k)).$ | Kdo je mladší než Karlova matka? |
| 9. | ANO, $X=tom$; | Tom; a ještě někdo? |
| 10. | ANO, $X=petr$; | Petr; a ještě někdo? |
| 11. | NE | |
| 12. | $?dobre(X).$ | Kdo je na tom dobře? |
| 13. | $?uleva(X).$ | Kdo má úlevy na daních? |
| 14. | $?student(X).$ | Kdo je student? |
| 15. | ANO, $X=tom$; | Tom je na tom dobře; |
| | a ještě někdo? | |
| 16. | ANO, $X=petr$; | Petr; a ještě někdo? |
| 17. | NE | |

Cvičení ke kapitole 4.2.

1. Převeďte do *Skolemovy klauzulární formy* následující formule:
- $\exists x \forall y \forall z [P(x, y, z)]$
 - $\exists x \exists y \forall z [P(x, y, z)]$
 - $\exists x \forall y \exists z [P(x, y, z)]$
 - $\forall x \exists y \forall z [P(x, y, z)]$
 - $\forall x \exists y \exists z [P(x, y, z)]$
 - $\forall x \forall y \exists z [P(x, y, z)]$

- g) $\forall x \exists y \forall z \exists v [P(z, y) \wedge Q(x, v)]$
- h) $\forall x \exists y \forall z \exists v [P(z, y) \supset Q(x, v)]$
- i) $\forall x \exists y \forall z \exists v [P(z, y) \wedge Q(x, y)]$
- j) $\forall x \exists y \forall z [(P(x, y) \supset Q(y, z)) \vee Q(x, y)]$
- k) $[\forall x (P(x) \supset \exists y \forall z (P(y) \wedge Q(y, z) \wedge Q(x, z)))] \supset \exists x Q(x, a)$
- l) $\forall x [P(x) \supset \exists z [\neg \forall y [Q(x, y) \supset P(f(y))] \wedge \forall y [Q(x, y) \supset P(x)]]]$

2. *Unifikujte:*

- a) $P(x, y); P(z, g(t))$
- b) $P(f(x), z, g(y, a)); P(y, x, g(f(a), z))$
- c) $P(x, b, f(x)); P(a, y, f(y))$
- d) $P(x, f(x, z), h(a)); P(y, f(y, y), w)$

3. *Rezoluční metodou ověřte platnost úsudků, popřípadě upravte tak, aby byly platné:*

- a) Nikdo, kdo trpí klaustrofobií nemůže pracovat jako liftboy.
Všichni horolezci trpí klaustrofobií.

Proto žádný horolezec nemůže pracovat jako liftboy.

- b) Všechny dřevěné stoly jsou stoly.
Všechny dřevěné stoly jsou ze dřeva.

Některé stoly jsou ze dřeva.

- c) Všechny muchomůrky zelené jsou jedovaté.
Tato tužka je muchomůrka zelená.

Tato tužka je jedovatá.

- d) Každý, kdo miluje jachting a moře, cítí k moři respekt
Někteří respekt k moři necítí, ačkoli ho milují.

Zřejmě existují takoví, kteří milují moře, ale nikoli jachting.

- e) Každý někomu pije krev.
Komu pije krev Drákula, ten brzo zemře.

Někdo brzo zemře.

- f) Každý horolezec má rád pěkné počasí a pivo.
Michal má rád pouze milovníky pěkného počasí a piva.“
Někteří milovníci pěkného počasí nemají rádi pivo.
Kdo není horolezec, ten se bojí výšek.

Michal nemá rád některé lidi, kteří se bojí výšek.

4. Pomocí rezoluční metody ověřte logickou platnost formulí:

- a) $\exists xP(x) \vee \exists x\neg P(x)$
 b) $\forall x [\exists yQ(x,y) \vee \forall z\neg Q(x,z)]$
 c) $[\exists xP(x) \supset \exists xQ(x)] \supset \exists x [P(x) \supset Q(x)]$
 d) $\forall x [[\neg P(x) \vee Q(x,h(x))] \wedge \neg P(f(a))]$
 e) $\forall x_1 \forall x_2 \exists y \{ [P(x_1) \supset Q(x_2,y)] \supset \forall z [[Q(x_2,y) \supset R(z)] \supset [P(x_1) \supset R(z)]] \}$
 f) $\exists x \exists y [P(x,y) \wedge \forall r \neg Q(x,r)] \vee \forall s \forall t \exists z [\neg P(s,t) \vee Q(t,z) \vee [Q(s,z) \wedge \neg P(t,z)]]$

5. Použijte **rezoluční metodu** ke stanovení odpovědi na následující „hlavolam“:

Tom, Milan a Jan jsou členy jistého sportovního klubu. Každý člen tohoto klubu je lyžař nebo horolezec. Žádný horolezec nemá rád déšť, všichni lyžaři mají rádi sníh. Milan nemá rád to, co má rád Tom a má rád to, co Tom rád nemá. Tom má rád déšť a sníh.

- a) Existuje v klubu sportovec, který je horolezec, ale nikoliv lyžař?
 b) Pokud ano, který z nich to je?
 c) „Minimalizujte“ předpoklady nutné pro odvození odpovědi. Jinými slovy, které předpoklady jste při odvození odpovědi nepotřebovali?

6. Dokažte *rezoluční* metodou, že každý predikát P , který splňuje předpoklady A_1 , A_2 a A_3 , je reflexivní, tedy pro něj platí také R).

$$\begin{array}{ll} A_1) \quad \forall x \forall y [P(x,y) \supset P(y,x)] & \text{symetrie} \\ A_2) \quad \forall x \forall y \forall z [(P(x,y) \wedge P(y,z)) \supset P(x,z)] & \text{transitivita} \\ A_3) \quad \forall x \exists y p(x,y) & \end{array}$$

$$R) \quad \forall x p(x,x) \qquad \text{reflexivita}$$

Jinými slovy dokažte, že $(A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \supset R$ je logicky pravdivá formule.

Najděte *model* množiny předpokladů $\{A_1, A_2, A_3\}$.

7. **Zapište následující předpoklady jako program v Prologu a vyřešte dotaz.**

Každý horolezec má rád pěkné počasí a pivo.

Michal má rád pouze milovníky pěkného počasí a piva.

Tom a Petr mají rádi pěkné počasí, ale nemají rádi pivo.

Kdo není horolezec, ten se bojí výšek.

Existuje někdo, kdo se bojí výšek a Michal jej nemá rád?

8. Použijte *rezoluční metodu* k tomu, abyste zodpověděli otázku: George, Tim, John a Bill jsou fotbaloví fanoušci. Nick a John podporují Baník, Tim podporuje Spartu. Nick má rád každého, kdo podporuje Baník, zatímco George má rád každého, kdo je sice fotbalový fanoušek, ale nepodporuje Spartu.

Otázky:

- Koho má rád Nick?
- Má George rád Billa?
- Koho má rád George?

9. V databázi jsou tři tabulky, DODAVATEL, VÝROBEK a DODÁVKA:

DODAVATEL

Kód-dod	Jméno	Profese	Město
001	Novák	Dovozce	Praha
110	Brown	Výrobce	Londýn
003	Pinkava	obch.zástupce	Plzeň

VÝROBEK

Kód-výr	Název	Model	Váha	MJ
003	Olej	30	300	litr
004	Pneumatiky	157/75	2500	ks
013	Olej	50	500	litr
005	Lampy	RAAI	10	ks

Dodávka

Kód-dod	Kód-výr	Množství
001	004	2500
110	013	130

- i) *Zapište obsah těchto tabulek jako fakta v Prologu.*
- ii) *Formulujte následující dotazy v Prologu:*
- Jaká jsou jména dodavatelů oleje?
 - Ve kterém městě sídlí dodavatelé pneumatik a ve kterém městě dodavatelé oleje?
 - Co dodává pan Brown?
 - Kterí dodavatelé oleje dodávají méně než 300 tun a sídlí v Londýně?
 - Kdo dodává olej a kdo lampy?

Návod: Použijte predikáty, např.

jméno(X, Y), profese(X, Y), město(X, Y), výrobek(X, Y),
typ(X, Y), váha(X, Y), mj(X, Y), dodává(K_1, K_2, Y),

kde proměnná X probíhá vždy přes příslušné kódy a
proměnná Y přes hodnoty příslušného atributu v tabulce.
Nebo druhá možnost: $\text{dodavatel}(X, Y, U, V)$,
 $\text{výrobek}(X, Y, Z, U, V)$, $\text{dodává}(K_1, K_2, Y)$.

Literatura.

- Běhounek, L. (2012): Jak je důležité být fuzzy. Dostupné na <http://www.100vedcu.cz/doc/01-Behounek-Fuzzy.pdf>
- Duží M. (2011): St. Anselm's Ontological Arguments. *Polish Journal of Philosophy*, vol. V, No. 1, Springer 2011, pp. 7-37.
- Duží M. (2012): *Logika pro informatiky a příbuzné obory*. VŠB-Technická universita Ostrava.
- Duží M., Materna P. (2012): *TIL jako procedurální logika (přůvodce zvidavého čtenáře Transparentní intensionální logikou)*. Aleph Bratislava.
- Duží M. (2005): Kurt Gödel. Metamathematical results on formally undecidable propositions: Completeness vs. Incompleteness. *Organon F*, XII, No. 4, pp. 447-474.
- Gahér, F. (2006): *Stoická sémantika a logika*. Univerzita Komenského Bratislava.
- Gensler, H. J. (2010): *Introduction to Logic* (druhé vydání). Londýn, New York: Routledge.
- Hájek, P. (1998): *Metamathematics of Fuzzy Logic*. Dordrecht: Kluwer.
- Manna, Z. (1981): *Matematická teorie programů* (překlad Jiří Hořejš). SNTL Praha.
- Novák, V., I. Perfilieva and J. Močkoř (1999): *Mathematical Principles of Fuzzy Logic*. Kluwer, Boston/Dordrecht.
- Raclavský, J. (2015): *Úvod do logiky: klasická výroková logika*. Masarykova universita Brno.
- Raclavský, J. (2015): *Úvod do logiky: klasická predikátová logika*. Masarykova universita Brno.
- Tichý, P. (1979). Existence and God. *Journal of Philosophy*, 76, 403-420. Reprinted in (Tichý, 2004, pp. 353-372).
- Tichý, P. (2004). *Collected Papers in Logic and Philosophy V*. Svoboda, B. Jaspersen, C. Cheyne (Eds.). Prague: Filosofía, Czech Academy of Sciences and Dunedin: University of Otago Press.
- Zadeh, A.L. (1965): Fuzzy sets. *Information and Control*, 8, 338-353.

Dcera manžela sestry matky vaší sestry je:
sestřenice