

# Kapitola 3

## Uspořádání a svazy

Pojem uspořádání, který je tématem této kapitoly, představuje (vedle zobrazení a ekvivalence) další zajímavý a důležitý speciální případ pojmu relace.

### 3.1 Uspořádání

**Definice 3.1** *Uspořádání* na množině  $X$  je libovolná relace na  $X$ , která je reflexivní, (slabě) antisymetrická a tranzitivní.

Oproti definici ekvivalence jsme tedy ‘pouze’ zaměnili symetričnost za antisymetričnost. Účinky této změny jsou však značné.

Je-li  $R$  uspořádání na množině  $X$ , pak dvojice  $(X, R)$  se nazývá *uspořádaná množina*. Jsou-li prvky  $x, y$  v relaci  $R$  (tedy  $x R y$ ), interpretujeme to slovy ‘prvek  $x$  je menší nebo roven prvku  $y$ ’. To je v souladu se všemi třemi základními vlastnostmi uspořádání. Uspořádáním z naší definice se také říká *neostrá uspořádání*, protože pro každé  $x$  platí  $x R x$ . (U *ostrého* uspořádání bychom požadavek reflexivity nahradili *antireflexivitou*: pro žádné  $x$  neplatí  $x R x$ . Nepůjde ovšem o uspořádání ve smyslu definice 3.1.) Neostrá uspořádání často značíme symboly  $\leq$  nebo  $\preceq$ .

Snadno se ověří, že vlastnosti uspořádání má například ‘standardní’ uspořádání  $\leq$  množiny reálných čísel. Poněkud zajímavější je možná fakt, že uspořádáním je i *relace dělitelnosti* definovaná vztahem ‘ $x$  dělí  $y$ ’ na libovolné množině přirozených čísel (viz cvičení 1.35). Tyto dva příklady se liší v jednom důležitém ohledu, který podrobně rozebereme.

Nechť  $x, y$  jsou dva prvky uspořádané množiny  $(X, \preceq)$ . Platí-li  $x \preceq y$  nebo  $y \preceq x$ , jsou prvky  $x, y$  *porovnatelné*, v opačném případě jsou *neporovnatelné*. Uspořádání  $\preceq$  se často označuje jako *částečné*, protože definice 3.1 připouští existenci dvojic neporovnatelných prvků. Podobně o množině  $(X, \preceq)$  mluvíme jako o *částečně uspořádané množině*<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>V angličtině se vžil termín *poset*, který vznikl jako zkratka z výrazu *partially ordered set*.

Při standardním uspořádání  $\leq$  na množině  $\mathbf{R}$  jsou každé dva prvky porovnatelné. Takovým uspořádáním se říká *lineární* nebo *úplné*. Důvodem pro první označení je fakt, že lineární uspořádání řadí prvky dané množiny do jedné linie, ‘od nejmenšího k největšímu’. Lépe to uvidíme, až budeme mluvit o Hasseových diagramech. Náš druhý příklad, relace dělitelnosti na přirozených číslech, lineární není, jak ukazuje například neporovnatelná dvojice  $\{2, 3\}$ . Zdůrazněme ovšem, že *oba* zmíněné příklady spadají do obecnější kategorie částečných uspořádání.

Přidejme ještě třetí příklad uspořádání. Pro libovolnou množinu  $A$  můžeme uvážit nějaký soubor  $\mathcal{B}$  jejích podmnožin. Na souboru  $\mathcal{B}$  je pak přirozeně definováno *uspořádání inkluzí*  $\subset$ : podmnožiny  $B, B' \in \mathcal{B}$  budou v relaci (tedy  $B \subset B'$ ), pokud  $B$  je podmnožinou množiny  $B'$ . Ani uspořádání  $\subset$  obecně není lineární.

## Cvičení

► **3.1** Jsou následující relace uspořádání na množině  $X = \{1, \dots, 5\}$ ? Pokud ano, vypište dvojice neporovnatelných prvků.

(a)  $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ ,

(b)  $S = \{(1, 3), (2, 3), (3, 4), (3, 5), (1, 4), (2, 4), (1, 5), (2, 5)\} \cup E_X$ ,

kde  $E_X$  je identická relace na množině  $X$ .

► **3.2** Nechť  $\leq$  (resp.  $<$ ) je běžné neostré (resp. ostré) uspořádání množiny přirozených čísel  $\mathbf{N}$ . Definujme relace  $\preceq_1$  a  $\preceq_2$  na  $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$  předpisem:

$$(s, t) \preceq_1 (u, v), \text{ pokud } s \leq u \text{ a } t \leq v,$$

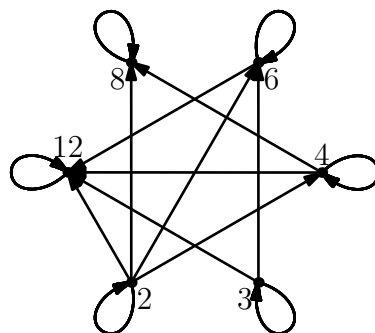
$$(s, t) \preceq_2 (u, v), \text{ pokud buďto } s < u, \text{ nebo } s = u \text{ a } t \leq v.$$

Dokažte, že  $\preceq_1$  a  $\preceq_2$  jsou částečná uspořádání a že  $\preceq_2$  je lineární uspořádání. Poznamenejme, že  $\preceq_2$  je známé *lexikografické* uspořádání (běžné ve slovnících). Pokuste se rozšířit jeho definici na množinu slov nad nějakou konečnou abecedou.

## 3.2 Hasseův diagram

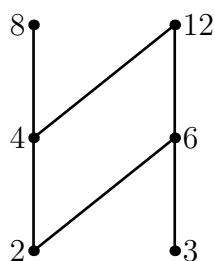
Libovolné uspořádání samozřejmě můžeme, stejně jako každou jinou relaci, znázornit v podobě orientovaného grafu. Obrázek 3.1 je znázorněním uspořádání dělitelnosti na množině  $\{2, 3, 4, 6, 8, 12\}$ .

Jako prostředek pro znázornění uspořádání ovšem obrázek 3.1 není příliš vhodný, řada šipek je v něm totiž zbytečných. Smyčky u vrcholů by například nebylo nutné kreslit, protože každé uspořádání je z definice reflexivní. Podobně jsou-li v relaci dvojice  $(2, 4)$  a  $(4, 12)$ , musí z tranzitivity být 2 v relaci s 12 a tuto šipku by rovněž nebylo potřeba kreslit. Efektivní znázornění uspořádání představuje tzv. Hasseův diagram.

Obrázek 3.1: Uspořádání dělitelností na množině  $\{2, 3, 4, 6, 8, 12\}$ .

Definujme nejprve jeden pomocný pojem. Necht  $x, y$  jsou prvky uspořádané množiny  $(X, \preceq)$ . Prvek  $x$  je *bezprostředním předchůdcem* prvku  $y$  (psáno  $x \triangleleft y$ ), pokud  $x \preceq y$  a neexistuje žádné  $z \in X - \{x, y\}$ , pro které by platilo  $x \preceq z \preceq y$ . Na vztah  $\triangleleft$  se můžeme dívat jako na relaci na množině  $X$  (tzv. *relace bezprostředního předcházení*). Tato relace obecně není reflexivní ani tranzitivní.

*Hasseův<sup>2</sup> diagram* uspořádané množiny  $(X, \preceq)$  je znázornění, ve kterém pro každou dvojici prvků  $x, y \in X$  platí  $x \triangleleft y$ , právě když  $x, y$  jsou spojeny čarou a prvek  $y$  je nakreslen výše než  $x$ . Spojnice není nutné opatřovat šipkou, protože směr je jednoznačně dán. Na obr. 3.2 vidíme, že Hasseovým diagramem lze uspořádanou množinu z obr. 3.1 znázornit mnohem přehledněji.



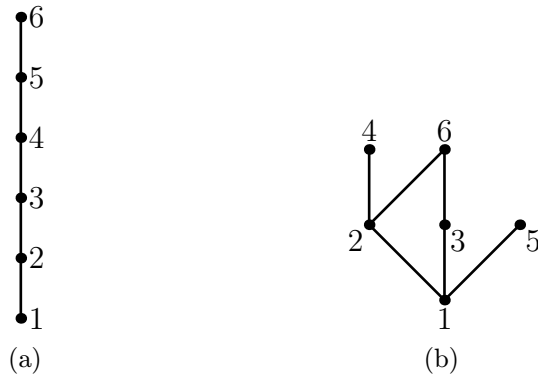
Obrázek 3.2: Hasseův diagram uspořádání z obr. 3.1.

Hasseův diagram lineárně uspořádané množiny vypadá podobně, jako na obr. 3.3a, který zachycuje standardní uspořádání na množině přirozených čísel  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Jiné uspořádání na stejné množině, které lineární není, je určeno dělitelností. Jeho Hasseův diagram je na obr. 3.3b. Jak je vidět, jednu množinu lze uspořádat mnoha různými způsoby.

Jako další příklad uvažme uspořádání inkluzí na množině všech podmnožin množiny  $\{1, 2, 3\}$ . Běžné zobrazení a nepoměrně přehlednější Hasseův diagram to-

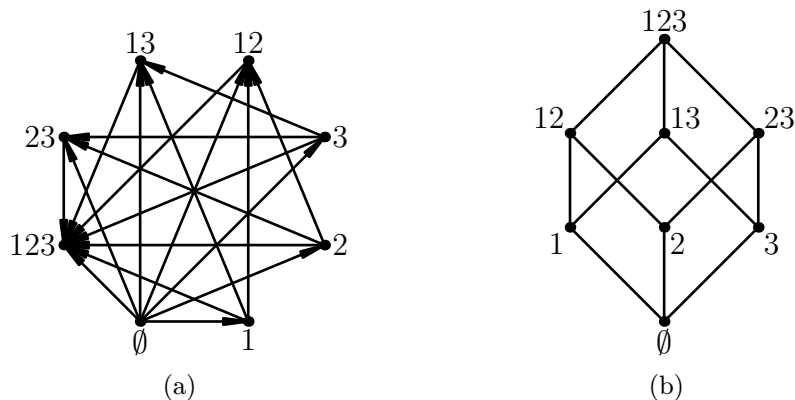
---

<sup>2</sup>HELMUT HASSE (1898–1979).



Obrázek 3.3: (a) Obvyklé lineární uspořádání na množině  $\{1, \dots, 6\}$ . (b) Uspořádání dělitelností na téže množině.

hoto uspořádání ukazuje obr. 3.4. Podmnožiny jsou popsány zkráceně, například místo  $\{1, 3\}$  píšeme prostě 13.



Obrázek 3.4: Dvě znázornění uspořádání inkluzí na souboru všech podmnožin množiny  $\{1, 2, 3\}$ : (a) orientovaný graf (s vynechanými smyčkami), (b) Hasseův diagram.

## Cvičení

► **3.3** Jak vypadá relace bezprostředního předcházení na uspořádané množině  $(\mathbf{R}, \leq)$ ?

► **3.4** Nakreslete Hasseův diagram uspořádání dělitelností na množině  $X \subset \mathbf{N}$ . Zjistěte, zda tato uspořádaná množina má nejmenší resp. největší prvek.

(a)  $X = \{2, 3, 4, 12, 15, 60\}$ ,

(b)  $X = \{2, 4, 8, 12, 20, 28, 56\}$ ,

(c)  $X = \{2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, 36, 60\}$ .

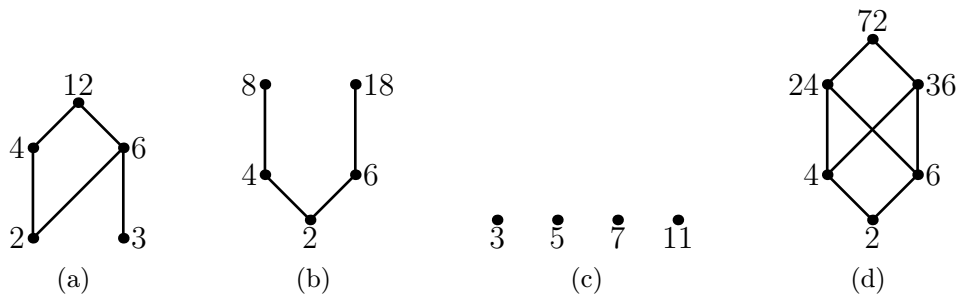
► **3.5** Ve cvičení 1.40 byl definován tranzitivní uzávěr  $R^+$  relace  $R$  na množině  $X$ . Přidáme-li k relaci  $R^+$  všechny dvojice tvaru  $(x, x)$ , kde  $x \in X$ , dostaneme *reflexivně-tranzitivní uzávěr* (nebo prostě *uzávěr*) relace  $R$ , označovaný symbolem  $R^*$ .

- (a) Ukažte, že každé uspořádání na konečné množině  $X$  je uzávěrem své relace bezprostředního předcházení.
- (b) Najděte příklad nekonečné uspořádané množiny, pro kterou tomu tak není.

### 3.3 Základní pojmy v uspořádaných množinách

Zavedme několik pojmů označujících význačné prvky uspořádané množiny. Mějme uspořádanou množinu  $(X, \preceq)$ . Prvek  $a \in X$  je *největším* prvkem množiny  $X$ , pokud pro každé  $x \in X$  platí  $x \preceq a$ . Podobně *nejmenší* prvek množiny  $X$  je prvek  $a$  takový, že  $a \preceq x$  pro každé  $x \in X$ .

Největší prvek obecně nemusí existovat, ale existuje-li, pak je určen jednoznačně. Například na obr. 3.5a–d existuje pouze v případech (a) a (d). Nejmenší prvek existuje pouze v případech (b) a (d).



Obrázek 3.5: Hasseův diagram dělitelnosti na množině  $X$ , kde (a)  $X = \{2, 3, 4, 6, 12\}$ , (b)  $X = \{2, 4, 6, 8, 18\}$ , (c)  $X = \{3, 5, 7, 11\}$ , (d)  $X = \{2, 4, 6, 24, 36, 72\}$ .

Prvky 8 a 18 na obr. 3.5b sice nejsou největší, ale mají alespoň tu vlastnost, že žádný prvek není větší. Jedná se o tzv. *maximální prvky*. Prvek  $a \in X$  je *maximálním prvkem*, pokud pro žádné  $x \in X$  není  $a \preceq x$ . Symetricky: *minimální prvek* je takový prvek  $a \in X$ , že pro žádné  $x \in X$  není  $x \preceq a$ .

Je jasné, že případný největší prvek musí být maximální, a také, že obrácená implikace neplatí. Následující tabulka uvádí maximální a minimální prvky v jednotlivých příkladech na obr. 3.5.

příklad	maximální	minimální
(a)	12	2, 3
(b)	8, 18	2
(c)	3, 5, 7, 11	3, 5, 7, 11
(d)	72	2

Vraťme se k uspořádání inkluzí na podmnožinách dané množiny. Příklad Hasseova diagramu takového uspořádání je na obr. 3.4b. Dá se z tohoto diagramu vyčíst více, než jenom které podmnožiny jsou ve vztahu inkluze — například jaký je průnik či sjednocení dvou množin? Jinými slovy, je možné definovat sjednocení dvou množin pouze s použitím uspořádání inkluzí?

Sjednocení množin  $A, B$  je množina, která obsahuje jak množinu  $A$ , tak množinu  $B$  (jako podmnožiny), ale ‘neobsahuje nic navíc’. Přesněji řečeno, je to nejmenší ze všech množin, které jsou větší než  $A$  i než  $B$ . Slova ‘nejmenší’ a ‘větší’ se tu samozřejmě vztahují k uspořádání inkluzí. Níže definovaný pojem suprema tak lze chápat jako (dalekosáhlé) zobecnění pojmu sjednocení.

Prvek  $z$  je *horní závora* dvojice prvků  $x, y$  uspořádané množiny  $(X, \preceq)$ , pokud platí  $x \preceq z$  a  $y \preceq z$ . *Supremum* (jinak též *spojení*) prvků  $x, y$  je nejmenší ze všech jejich horních závor, tedy takový prvek  $s$ , který je horní závora dvojice  $x, y$ , přičemž neexistuje jiná horní závora  $z \neq s$ , pro kterou by bylo  $z \preceq s$ .

Dvojice prvků obecně žádné supremum mít nemusí: předně nemusí mít ani žádnou horní závora (jako prvky 8, 18 na obr. 3.5b), nebo naopak může množina horních závor mít více minimálních prvků, ze kterých pak, jak víme, žádný nebude nejmenší. Tento případ nastává u prvků 4, 6 na obr. 3.5d, které mají horní závory 24, 36 a 72, přičemž 24 a 36 jsou minimální prvky v této množině horních závor.

Podobně jako supremum je definováno infimum dvou prvků. *Dolní závora* prvků  $x, y$  je prvek  $z$ , pro který je  $z \preceq x$  a  $z \preceq y$ , a *infimum* (*průsek*) prvků  $x, y$  je největší z jejich dolních závor. K pojmu infima se symetrickým způsobem vztahuje vše, co bylo řečeno o supremu.

## Cvičení

► **3.6** Dokažte, že v konečné uspořádané množině existuje nejmenší prvek, právě když v ní existuje přesně jeden minimální prvek. Najděte nekonečnou uspořádanou množinu, ve které tato ekvivalence neplatí.

► **3.7** Na množině  $X = \{a, b, c, d, e, f\}$  je dána relace  $R$ . Zjistěte, zda se jedná o uspořádání a případně určete minimální a maximální prvky, pokud

$$(a) R = \{(d, c), (b, a), (c, a), (d, b)\} \cup E_X,$$

$$(b) R = \{(b, a), (c, a), (f, d), (b, d), (e, c), (e, a), (b, c), (b, f)\} \cup E_X,$$

kde  $E_X = \{(x, x) : x \in X\}$  je identická relace na množině  $X$ .

- **3.8** Najděte uspořádanou množinu, ve které množina horních závor nějakých dvou prvků má přesně pět minimálních prvků.
- **3.9** Uvažme množinu všech přirozených čísel, uspořádanou relací dělitelnosti. Existují v této uspořádané množině suprema a infima? Jaký je jejich význam?
- **3.10** Dokažte, že každé uspořádání na konečné množině  $X$  se dá rozšířit do lineárního. Jinými slovy: pro libovolné uspořádání  $R$  na  $X$  existuje lineární uspořádání  $R'$  na  $X$  tak, že  $R \subset R'$ .
- **3.11** Dokažte, že konečná uspořádaná množina  $(L, \preceq)$  má minimální prvek  $x$  a maximální prvek  $y$  tak, že  $x \preceq y$ .
- **3.12** Buď  $U_n$  množina všech částečných uspořádání na  $n$ -prvkové množině  $X$ . Uvažme  $U_n$  jako uspořádanou množinu s uspořádáním daným inkluzí (uspořádání  $S, T$  jsou v relaci, pokud  $T$  rozšiřuje  $S$ , tedy  $S \subset T$ ). Charakterizujte minimální a maximální prvky uspořádané množiny  $U_n$ .

## 3.4 Svazy

*Svaz* je uspořádaná množina  $(X, \preceq)$ , ve které existuje supremum i infimum pro libovolnou dvojici prvků. Ve svazu můžeme na supremum a infimum pohlížet jako na binární operace (protože je zaručeno, že jejich hodnoty jsou definovány pro každou dvojici). Supremum prvků  $x, y$  zde značíme  $x \vee y$ , infimum jako  $x \wedge y$ .

Příkladem svazu, na který jsme již narazili, je množina všech podmnožin libovolné množiny (uspořádaná inkluzí). Supremum dvou množin zde odpovídá jejich sjednocení, infimum odpovídá jejich průniku.

Pojmy suprema a infima jsme definovali pomocí uspořádání. Je možné postupovat v opačném směru a z pouhé znalosti binárních operací suprema a infima na množině  $X$  rekonstruovat původní uspořádání? Následující jednoduché tvrzení ukazuje, že to možné je (a dokonce stačí znát např. jenom suprema).

**Tvrzení 3.2** *Pro libovolné dva prvky  $a, b$  svazu  $(X, \preceq)$  platí*

$$a \preceq b \quad \text{právě když} \quad a \vee b = b \quad \text{právě když} \quad a \wedge b = a.$$

**Důkaz.** Nechť  $a \preceq b$ . Pak  $b$  je zjevně horní závorou dvojice  $a, b$ . Pro každou horní závoru  $z$  této dvojice z definice platí  $b \preceq z$ . Prvek  $b$  je tedy nejmenší horní závorou, a tedy supremem, dvojice  $a, b$ .

Platí-li naopak  $a \vee b = b$ , pak triviálně  $a \preceq b$ . První ekvivalence je tedy dokázána. Tvrzení o infimu se dokazuje symetricky.  $\square$

Jednu polovinu minulého důkazu jsme si ušetřili poukazem na symetrii mezi pojmy supremum a infimum. Jde o speciální případ tzv. principu duality, který ukážeme dále.

Inverzní relace  $\preceq^{-1}$  k uspořádání  $\preceq$  je opět uspořádání (cvičení 3.13). Není těžké si všimnout, že jeho Hasseův diagram získáme, když otočíme Hasseův diagram uspořádání  $\preceq$  ‘vzhůru nohama’. Při této změně se suprema mění na infima a naopak. (Přesněji, supremum prvků  $a, b$  vzhledem k uspořádání  $\preceq$  je jejich infimum vzhledem k uspořádání  $\preceq^{-1}$ .) Z toho snadno dostáváme následující *princip duality*:

Pokud v nějakém tvrzení, které platí ve *všech* svazech, důsledně zaměníme symboly  $\vee$  a  $\wedge$  a otočíme směr všech nerovností, dostaneme opět tvrzení platné ve *všech* svazech.

**Věta 3.3** *Pro operaci  $\vee$  v libovolném svazu  $(X, \preceq)$  platí:*

- (i) *je asociativní,*
- (ii) *je komutativní,*
- (iii)  *$a \vee a = a$  pro  $a \in X$ ,*
- (iv)  *$a \vee (b \wedge a) = a$  pro  $a, b \in X$ .*

**Důkaz.** Část (ii) (komutativita operace  $\vee$ ) plyne přímo z definice suprema. Část (iii) plyne z faktu, že  $a \preceq a$  (reflexivita) a z tvrzení 3.2. V části (iv) víme, že  $b \wedge a \preceq a$  (protože  $b \wedge a$  je dolní závora dvojice  $a, b$ ), takže z tvrzení 3.2 plyne, že  $a \vee (b \wedge a) = a$ .

Zbývá část (i), tedy asociativita operace  $\vee$ . Mějme prvky  $a, b, c \in X$ . Chceme ukázat, že  $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ . Označme levou stranu této rovnice jako  $\ell$ . Z definice víme, že  $\ell$  je horní závora pro prvky  $a, b \vee c$ , přičemž druhý z těchto prvků je zase horní závora pro prvky  $b, c$ . Odtud určitě  $a, b, c \preceq \ell$ . Vzhledem k tomu, že  $a \vee b$  je *nejmenší* horní závora prvků  $a, b$ , musí být  $a \vee b \preceq \ell$ . Pak ovšem  $\ell$  je horní závora dvojice  $(a \vee b), c$ , takže pro supremum této dvojice máme

$$(a \vee b) \vee c \preceq \ell = a \vee (b \vee c).$$

Zcela obdobně lze ukázat opačnou nerovnost  $a \vee (b \vee c) \preceq (a \vee b) \vee c$ . Z antisymetričnosti pak dostaneme požadovanou rovnost.  $\square$

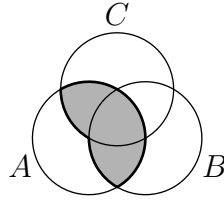
Podobné vlastnosti jako operace  $\vee$  má díky principu duality samozřejmě i operace  $\wedge$  (speciálně je asociativní a komutativní).

Vlastnosti (i) a (ii) ve větě 3.3 jsou stejné, jako má operace sčítání a násobení v tělese. Může nás napadnout otázka, zda tato analogie jde ještě dál, například zda platí *distributivita* mezi operacemi  $\wedge$  a  $\vee$ , tedy

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \quad \text{pro libovolné prvky } a, b, c. \quad (3.1)$$

Každý svaz, ve kterém platí (3.1), se nazývá *distributivní*. Příkladem takového svazu je svaz podmnožin libovolné množiny. Jsou-li totiž  $A, B, C$  nějaké množiny, pak z obr. 3.6 je vidět, že  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ .



Obrázek 3.6: Distributivita u množin:  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ .(a)  $M_5$ .(b)  $N_5$ .

Obrázek 3.7: Nedistributivní svazy.

Na druhou stranu obr. 3.7 ukazuje dva příklady svazů, které distributivní nejsou (viz cvičení 3.14).

Dá se dokonce ukázat, že svazy  $M_5$  a  $N_5$  z obr. 3.7 jsou v jistém smyslu obsaženy v každém nedistributivním svazu. Abychom mohli tento fakt precizně vyjádřit, potřebujeme ještě jednu definici.

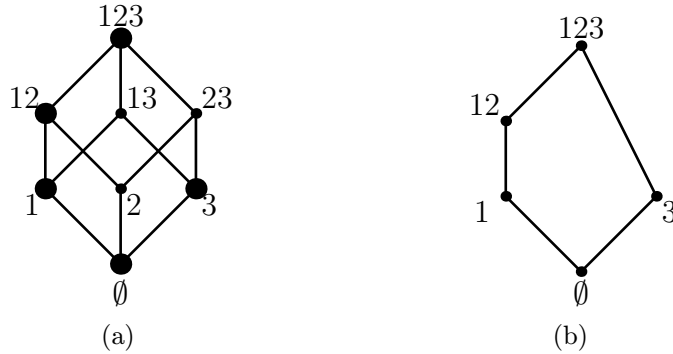
*Podsvazem* svazu  $(X, \preceq)$  je libovolný svaz  $(Y, \leq)$  takový, že

- (1)  $Y \subset X$  a uspořádání  $\leq$  je *zúžením* uspořádání  $\preceq$  na množinu  $Y$  (jinými slovy platí  $a \leq b$ , právě když  $a \preceq b$  a prvky  $a, b$  leží v množině  $Y$ ),
- (2) suprema (infima) ve svazu  $(Y, \leq)$  se shodují se supremy (infimy) ve svazu  $(X, \preceq)$ .

**Příklad 3.4** Uvažme znovu svaz  $X$  všech podmnožin množiny  $\{1, 2, 3\}$  s uspořádáním inkluzí, jehož Hasseův diagram známe z obr. 3.4b. Na obr. 3.8a je zvýrazněna množina  $Y \subset X$ . Svaz  $(Y, \subset)$  na obr. 3.8b *není podsvazem* svazu  $(X, \subset)$  (i když se tak při zběžném čtení definice může jevit). Prvky  $\{1\}$  a  $\{3\}$  totiž ve svazu  $(X, \subset)$  mají supremum  $\{1, 3\}$ , zatímco ve svazu  $(Y, \subset)$  je jejich supremem prvek  $\{1, 2, 3\}$ . Přidáme-li však k množině  $Y$  prvek  $\{1, 3\}$  a označíme výslednou množinu  $Y'$ , pak svaz  $(Y', \subset)$  již je podsvazem svazu  $(X, \subset)$ . Poučení z uvedeného příkladu je, že ne každá množina prvků svazu určuje podsvaz.

Nyní můžeme vyslovit zajímavou charakterizaci distributivních svazů, tzv. Birkhoffovo<sup>3</sup> kritérium distributivity, jehož důkaz lze nalézt v [6]. Všimněme si,

<sup>3</sup>GEORGE DAVID BIRKHOFF (1884–1944).



Obrázek 3.8: (a) Svaz  $(X, \subset)$  se zvýrazněnou množinou prvků  $Y$ . (b) Svaz  $(Y, \subset)$ .

že jedna z implikací je triviální.

**Věta 3.5 (Birkhoffovo kritérium distributivity)** *Svaz je distributivní, právě když neobsahuje ani jeden ze svazů  $M_5$ ,  $N_5$  jako podsvaz.*  $\square$

Všimněme si, že svaz  $(Y, \subset)$  z příkladu 3.4 je totožný se svazem  $M_5$ . Není však podsvazem distributivního svazu  $(X, \subset)$  (a nedostáváme tak spor s větou 3.5).

Fakt, že ‘zakázané podsvazy’ z věty 3.5 jsou symetrické podle vodorovné osy, naznačuje, že při otočení distributivního svazu ‘vzhůru nohama’ bychom mohli opět dostat distributivní svaz. V trochu jiné formulaci to potvrzuje následující věta. Pozor, věta *neplyne* z principu duality!

**Věta 3.6** *V libovolném distributivním svazu  $(X, \preceq)$  platí také duální forma distributivity:*

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

pro libovolné  $x, y, z \in X$ .

**Důkaz.** Položme v definici (normální, tj. neduální) distributivity  $a = x \vee y$ ,  $b = x$ ,  $c = z$ . Dostaneme, že pro pravou stranu  $p$  dokazované rovnosti platí

$$\begin{aligned} p &:= (x \vee y) \wedge (x \vee z) = a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \\ &= [(x \vee y) \wedge x] \vee [(x \vee y) \wedge z]. \end{aligned}$$

Podle duální verze věty 3.3(iv) upravíme levou z hranatých závorek na  $(x \vee y) \wedge x = x$ . V pravé závorce ještě jednou uplatníme distributivitu a dostaneme

$$p = x \vee [(x \wedge z) \vee (y \wedge z)].$$

To lze s použitím asociativity upravit na  $[x \vee (x \wedge z)] \vee (y \wedge z)$  a z věty 3.3(iv) je konečně  $p = x \vee (y \wedge z)$ .  $\square$

Musí ve svazu vždy existovat největší prvek? Příklad množiny reálných čísel s běžným uspořádáním ukazuje, že nikoli. Platí však následující věta:

**Věta 3.7** *V konečném svazu vždy existuje největší a nejmenší prvek.*

**Důkaz.** Očíslujme prvky uvažovaného svazu  $(X, \preceq)$  jako  $X = \{a_1, \dots, a_n\}$  a definujme posloupnost  $s_1, \dots, s_n$  induktivně předpisem  $s_i = s_{i-1} \vee a_i$  pro  $i = 2, \dots, n$ , přičemž  $s_1 = a_1$ . Tato posloupnost ‘roste’, přesněji  $s_i \preceq s_{i+1}$  pro každé  $i = 1, \dots, n-1$ . Navíc je z definice  $a_i \preceq s_i$  pro každé  $i = 1, \dots, n$  ( $s_i$  je totiž horní závorou pro  $a_i$  a  $s_{i-1}$ ). Pro prvek  $s_n$  musí tím pádem být  $a_i \preceq s_n$ , kde  $i = 1, \dots, n$ , a je tedy největším prvkem množiny  $X$ . Nejmenší prvek najdeme podobně.  $\square$

Implikaci v předcházející větě není možné obrátit: uspořádaná množina s největším a nejmenším prvkem ještě zdaleka nemusí být svaz. Příkladem je množina z obr. 3.5d.

Největší prvek svazu (existuje-li) se obvykle značí jako 1, nejmenší prvek jako 0. Následující tvrzení ukazuje, že se jedná o neutrální prvky operací  $\wedge$  resp.  $\vee$ .

**Tvrzení 3.8** *Má-li svaz  $(X, \preceq)$  prvky 0 a 1, pak pro každé  $x \in X$  platí*

$$x \wedge 1 = x \quad \text{a} \quad x \vee 0 = x.$$

**Důkaz.** Prvek 1 je největší, takže pro libovolné  $x \in X$  máme  $x \preceq 1$ . Podle tvrzení 3.2 je  $x \wedge 1 = x$ . Podobně pro operaci  $\vee$  a prvek 0.  $\square$

Svaz podmnožin libovolné množiny  $A$  největší a nejmenší prvek má. Největším prvkem je celá množina  $A$ , nejmenším pak prázdná množina  $\emptyset$ .

## Cvičení

- ▶ **3.13** Dokažte, že inverzní relace  $\preceq^{-1}$  k libovolnému uspořádání  $\preceq$  je opět uspořádání.
- ▶ **3.14** Ověřte, že uspořádané množiny  $M_5, N_5$  na obr. 3.7 jsou svazy, a ukažte, že v nich neplatí rovnost (3.1).
- ▶ **3.15** Dokažte, že svaz  $(X, \preceq)$  je distributivní, právě když pro každé  $a, b, c \in X$  s vlastností  $a \wedge b = a \wedge c$  a  $a \vee b = a \vee c$  platí  $b = c$ . (Můžete použít větu 3.5.) Nalezněte příklad nedistributivního svazu, kde uvedená ekvivalence neplatí.
- ▶ **3.16** Nechť  $R$  je lineární uspořádání na množině  $X$ . Musí  $(X, R)$  být svaz?
- ▶ **3.17** Ukažte, že množina všech přirozených čísel  $\mathbf{N}$  uspořádaná dělitelností je svaz. Rozhodněte, zda je tento svaz distributivní. Jaký je největší a nejmenší prvek?
- ▶ **3.18** (a) Nechť  $D(n)$  je množina dělitelů přirozeného čísla  $n$ , uspořádaná relací dělitelnosti. Dokažte, že  $D(n)$  je svaz (tzv. *svaz dělitelů čísla  $n$* ).

(b) Nechť  $X$  je konečná množina přirozených čísel, která při uspořádání relací dělitelnosti tvoří svaz. Musí tento svaz být distributivní?

► **3.19** Níže uvedená množina  $X$  je uspořádána relací dělitelnosti. Rozhodněte:

- které jsou maximální a minimální prvky množiny  $X$ ,
- zda existuje největší a nejmenší prvek množiny  $X$ ,
- zda  $X$  je svaz,
- zda  $X$  je distributivní svaz.

Množina  $X$  sestává z těchto prvků:

- (a)  $X = \{2, 4, 6, 14, 42\}$ ,
- (b)  $X = \{2, 3, 7, 14, 42\}$ ,
- (c)  $X = \{1, 2, 3, 5, 30\}$ ,
- (d)  $X = \{1, 2, 3, 12, 18, 36\}$ ,
- (e)  $X = \{1, 2, 3, 4, 12, 20, 60\}$ ,
- (f)  $X = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ .

► **3.20** Určete všechny podmnožiny  $X$  svazu dělitelů  $D(12)$  čísla 12 s vlastností, že množina  $X$  (uspořádaná relací dělitelnosti) je svaz, ale není to podsvaz svazu  $D(12)$ .

► **3.21** Navrhněte algoritmus, který zjistí, zda je daná uspořádaná množina svazem. Součástí návrhu je reprezentace vstupní uspořádané množiny.

► **3.22** Pevný bod zobrazení  $f : X \rightarrow X$  (kde  $X$  je nějaká množina) je každé  $x \in X$ , pro které je  $f(x) = x$ . Dokažte, že v konečném svazu  $L$  má množina pevných bodů každého zobrazení  $f : L \rightarrow L$  zachovávajícího uspořádání největší a nejmenší prvek.

► **3.23** Ukažte, že v libovolném svazu  $(X, \preceq)$  pro libovolnou trojici prvků  $x, y, z$  platí

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \preceq x \wedge (y \vee z).$$

►► **3.24** Platí-li pro prvky  $a, b, c$  svazu  $L$  rovnost

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c),$$

pak se hodnotě na každé straně této rovnice říká *medián* prvků  $a, b, c$ . Dokažte, že  $L$  je distributivní svaz, právě když každá trojice jeho prvků má medián.

► **3.25** Mějme svaz  $(X, \preceq)$ . Obdržíme opět svaz, přidáme-li k  $(X, \preceq)$  nový největší prvek  $1'$  a nejmenší prvek  $0'$ ?