Logika v praxi
přednáška 2

Marie Duží

marie.duzi@vsb.cz

evropský sociální fond v ČR

EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Výroková logika

- Analyzuje způsoby skládání jednoduchých výroků do výroků složených pomocí logických spojek.
- Co je to výrok? *Výrok je tvrzení, o němž má smysl prohlásit, zda je pravdivé či nepravdivé*
- Princip dvouhodnotovosti *– tercium non datur – dvouhodnotová logika* (existují však vícehodnotové logiky, logiky parciálních funkcí, fuzzy logiky, ...)
- Triviální definice?
  Jsou všechna tvrzení výroky? Ne, nejsou:
  - *Francouzský král je holohlavý*
  - *Přestal jste bít svou ženu?*
    (zkuste odpovědět ano nebo ne, pokud jste nikdy nebyl ženatý nebo nikdy svou ženu nebil)

Výroková logika: sémantický výklad (Sémantika = význam)

- ***Výroky*** dělíme na:
  - ***Jednoduché*** – žádná vlastní část jednoduchého výroku již není výrokem
  - ***Složené*** – výrok má vlastní část(i), která je výrokem
- ***Princip kompozicionality***: význam složeného výroku je funkcí významu jeho složek.
- Význam jednoduchých výroků redukuje VL na Pravda (1), Nepravda (0).
- Proto je výroková logika vlastně algebrou pravdivostních hodnot.

Výroková logika:
příklady složených výroků

- V Praze prší **a** v Brně je hezky.

V_1 spojka V_2

- **Není pravda**, že v Praze prší.

spojka Výrok

Jazyk výrokové logiky

- ***Formální jazyk*** je zadán ***abecedou*** (množina výchozích symbolů) a ***gramatikou*** (množina pravidel, která udávají, jak vytvářet „Dobře utvořené formule“ - DUF)
- ***Jazyk výrokové logiky***
  - ***abeceda***:
  - – Výrokové symboly: *p*, *q*, *r*, ... (případně s indexy)
  - – Symboly logických spojek (funktorů): $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\supset$, $\equiv$
  - – Pomocné symboly (závorky): (,), [,], {, }
    - Výrokové symboly zastupují elementární výroky
  - – Symboly $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\supset$, $\equiv$ nazýváme po řadě ***negace (¬)***, ***disjunkce (∨)***, ***konjunkce (∧)***, ***implikace (⊃)***, ***ekvivalence (≡)***.

Jazyk výrokové logiky

- ***Gramatika***
  (definuje rekurzivně dobře utvořené formule DUF)
  Induktivní definice nekonečné množiny DUF
  1. Výrokové symboly ***p, q, r, ...*** jsou *(dobře utvořené) formule* (báze definice).
  2. Jsou-li výrazy *A*, *B* formule, pak jsou (DU) *formulemi* i výrazy
     $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$, $(A \equiv B)$
     (indukční krok definice).
  3. Jiných formulí výrokové logiky, než podle bodů (1), (2) není.
     (uzávěr definice).
- *Jazyk výrokové logiky* je množina všech dobře utvořených formulí výrokové logiky.

Pozn.: Formule dle bodu (1) jsou ***atomické formule***
Formule dle bodu (2) jsou ***složené formule***

Výroková logika: Dobře utvořené formule

Dohoda: vnější závorky můžeme vybechat

Příklad: $(p \supset q) \land p$ je DUF (vnější závorky vynechány)

$(p \lor) \neg \equiv q$ není DUF

Pro spojky se někdy užívají jiné symboly:

Symbol	alternativně
$\supset$	$\Rightarrow$, $\rightarrow$
$\equiv$	$\Leftrightarrow$, $\leftrightarrow$
$\land$	&
$\neg$	~

Priorita logických spojek: $\neg$, $\land$, $\lor$, $\supset$, $\equiv$ (v tomto pořadí).

Příklad: $(p \supset q) \land p$ *není ekvivalentní* $p \supset q \land p$!

druhá formule je $p \supset (q \land p)$!

Proto raději ***nezneužívat priority*** a psát závorky!

sémantika (význam) formulí

Pravdivostní** ohodnocení (valuace) **výrokových symbolů je zobrazení v, které ke každému výrokovému symbolu p přiřazuje pravdivostní hodnotu, tj. hodnotu z množiny {1,0}, která kóduje množinu {Pravda, Nepravda}: $\{p_i\} \to \{1,0\}$

Pravdivostní funkce formule výrokové logiky je funkce w, která pro každé pravdivostní ohodnocení v výrokových symbolů p přiřazuje formuli její pravdivostní hodnotu. Tato hodnota je určena induktivně takto:

- Pravdivostní hodnota elementární formule: $w(p)_v = v(p)$ pro všechny výrokové proměnné p.
- Jsou-li dány pravdivostní funkce formulí A, B, pak pravdivostní funkce formulí
  $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \supset B$, $A \equiv B$ jsou dány následující tabulkou 2.1:

Tabulka 2.1. pravdivostní funkce

A	B	$\neg A$	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \supset B$	$A \equiv B$
1	1	0	1	1	**1**	1
1	0	0	1	0	**0**	0
0	1	1	1	0	**1**	0
0	0	1	0	0	**1**	1

Formalizace tvrzení v jazyce VL

- Elementární výroky: překládáme symboly *p*, *q*, *r*, ...
- Spojky přirozeného jazyka: překládáme pomocí symbolů pro spojky:
- ***Negace:***
  - „není pravda, že“: $\neg$ (unární spojka)
  - *Opava není velkoměsto*: $\neg p$
- ***Konjunkce:***
  - „*a*“: $\wedge$ (binární, komutativní) spojka;
  - *Praha je velkoměsto* **a** *2+2=4:* $p \wedge q$
  - **Pozor!**
    ne vždy, ne každé „a“ je logická konjunkce.
    Např. *„Jablka a hrušky se pomíchaly“,*
    „Přišel jsem domů a zatopil“.

Formalizace tvrzení v jazyce VL

- ***Disjunkce***:
  - *„nebo“:* $\vee$ (binární, komutativní) spojka;

    *Praha **nebo** Brno je velkoměsto. („nevylučující se“)*: $p \vee q$
  - V přirozeném jazyce často ve smyslu *vylučujícím se* „buď, anebo“ (*Půjdu do školy (a)nebo zůstanu doma.)*
  - Vylučující se „nebo“ je non-ekvivalence
  - Má smysl to rozlišovat, např. v otázkách.
    - *Q*: „Je Tom docent nebo profesor?“
    - *A*: Ano
    - *Q*: „Je Tom docent, nebo profesor?“
    - *A*: profesor

Spojka implikace

- *„jestliže, pak*“, *„když, tak*“, *„je-li, pak*“:
- „Když jsem unavený *(u)*, nepracuji *(p)“:* $u \supset \neg p$
- $\supset$ (binární, ***ne***komutativní) spojka;
  První člen implikace je **antecedent**, druhý **konsekvent.**
- Implikace (ani žádná jiná spojka) nepředpokládá *žádnou obsahovou souvislost* mezi antecendentem a konsekventem, proto bývá někdy nazývána *materiálová implikace* (středověk ”*suppositio materialis”*).
- Implikace tedy (na rozdíl od častých případů v přirozeném jazyce) ***nezachycuje ani příčinnou ani časovou vazbu.***

  ”Jestliže 1+1=2, pak železo je kov” (pravdivý výrok): $p \supset q$
  ”Jestliže existují ufoni, tak jsem papež”: $p \supset r$
  (co tím chce dotyčný říct? Nejsem papež, tedy neexistují ufoni)

Spojka implikace

- Pozn.: **Spojce "protože" neodpovídá logická spojka implikace!**
  - "Hokejisté prohráli (p) semifinálový zápas, ***proto*** se vrátili (v) z olympiády předčasně": $(p \supset v)$???
  - „***Protože*** jsem nemocen, zůstal jsem doma". $n \supset d$???
  - Ale implikace je pravdivá, je-li antecedent nepravdivý. Tedy obě věty by byly v případě, že hokejisté neprohráli nebo nejsem nemocen pravdivé. Ale to neodpovídá jejich významu.
  - Mohli bychom to analyzovat pomocí *modus ponens:* $[p \wedge (p \supset q)] \supset q$

Spojka ekvivalence

- ***Ekvivalence***:
  - ”právě tehdy, když”, ”tehdy a jen tehdy, když”, apod. , ale ne ”tehdy, když” – to je implikace!
  - ”Řecká vojska vyhrávala boje ***tehdy (a jen tehdy), když*** o jejich výsledku rozhodovala fyzická zdatnost”: $p \equiv q$
  - Používá se nejčastěji v matematice (v definicích), v přirozeném jazyce řidčeji
- *Příklad*:

a) ”Dám ti facku, když mě oklameš” okl $\supset$ facka

b) ”Dám ti facku tehdy a jen tehdy, když mě oklameš okl $\equiv$ facka

Situace: Neoklamal jsem. Kdy mohu dostat facku?

Ad a) – můžu dostat facku, ad b) – nemůžu dostat facku.

Splnitelnost formulí, tautologie, kontradikce, model

- ***Model formule A***: ohodnocení výrokově logických proměnných *p, q, …* (valuace) *v* takové, že formule A je v tomto ohodnocení *v* pravdivá: $w(A)_v = 1$.
- ***Formule je splnitelná***, má-li alespoň jeden model
  - Př.: $(p \supset q)$ je splnitelná, má tři modely:

    a) $p=1$, $q=1$ b) $p=0$, $q=1$ c) $p=0$, $q=0$
- ***Množina formulí*** $\{A_1,\ldots,A_n\}$ ***je splnitelná***, existuje-li ohodnocení *v*, které je modelem každé formule A_i, $i = 1,\ldots,n$.

  Př.: ***Ne****splnitelné množiny formulí*:

  $\{p, \neg p\}$, $\{(p \supset q), \neg q, p\}$

Splnitelnost formulí, tautologie, kontradikce, model

- ***Formule A je tautologie***, značíme $\models A$, je-li každé ohodnocení v jejím modelem

  Př.: $\models (p \lor \neg p)$, $\models (p \supset p)$, $\models [((p \supset q) \land \neg q) \supset \neg p]$

- ***Formule je nesplnitelná (kontradikce)***, nemá-li žádný model (např. formule tvaru $A \land \neg A$)

  Př. Kontradikce: $(p \land \neg p)$, $[(p \supset q) \land \neg q \land p]$

Splnitelnost, tautologie, kontradikce

- *Př.:* Formule *A*: **$\neg(p \supset q) \equiv (p \wedge \neg q)$**
- *Formule A je tautologie,* $\neg A$ kontradikce, formule $(p \supset q)$, $(p \wedge \neg q)$ jsou splnitelné.

p	q	$p \supset q$	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \supset q)$	$\neg(p \supset q) \equiv (p \wedge \neg q)$	$\neg A$
1	1	1	0	0	**1**	**0**
1	0	0	1	1	**1**	**0**
0	1	1	0	0	**1**	**0**
0	0	1	0	0	**1**	**0**

Výrokově logické vyplývání

- Formule *A* ***výrokově logicky vyplývá*** *z množiny formulí M,* značíme *M* |= *A*, jestliže *A* je pravdivá v každém modelu množiny *M.*
- Poznámka: ***Okolnosti*** *(definice 1) jsou zde mapovány jako* ***ohodnocení*** *(Pravda - 1, Nepravda - 0)* ***elementárních výroků****:*
  - *Za všech okolností (při všech ohodnoceních), kdy jsou pravdivé předpoklady, je pravdivý i závěr*

Příklady: *Logické vyplývání*

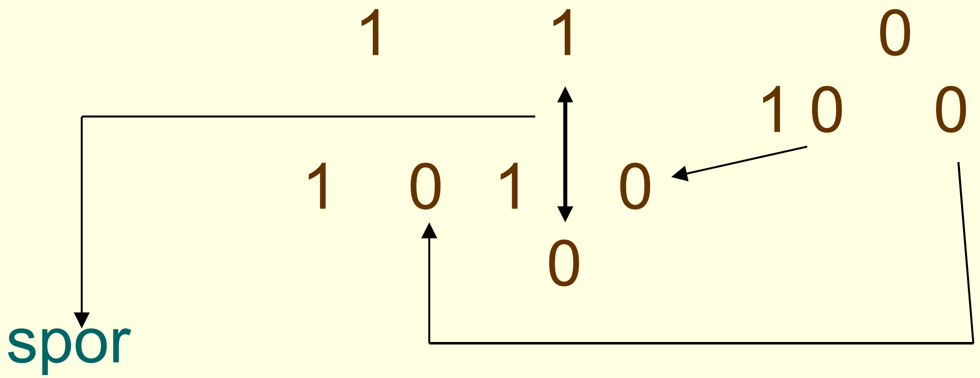
- Je doma (d) nebo šel na pivo (p)
- Je-li doma (d), pak nás očekává (o)
- $\Rightarrow$ Jestliže nás neočekává, pak šel na pivo p.

	d, p, o	$d \vee p$, $d \supset o$		$\models \neg o \supset p$	
$\rightarrow$	**1 1 1**	**1**	**1**	**1**	**závěr je**
	1 1 0	1	0	1	
$\rightarrow$	**1 0 1**	**1**	**1**	**1**	**pravdivý**
	1 0 0	1	0	0	
$\rightarrow$	**0 1 1**	**1**	**1**	**1**	**ve všech čtyřech**
$\rightarrow$	**0 1 0**	**1**	**1**	**1**	**modelech**
	0 0 1	0	1	1	předpokladů
	0 0 0	0	1	0	

Příklady: *Logické vyplývání*

- Je doma (d) nebo šel na pivo (p)
- Je-li doma (d), pak nás očekává (o)
- $\Rightarrow$ Jestliže nás neočekává, pak šel na pivo p.

  $d \vee p,\ d \supset o \models \neg o \supset p$
- **Tabulka má *2^{n}* řádků!** Proto ***důkaz sporem:***
- Předpokládejme, že úsudek ***není platný.*** Pak tedy mohou být všechny předpoklady pravdivé a závěr nepravdivý: $d \vee p,\ d \supset o \models \neg o \supset p$



(Výrokově) logické vyplývání

- Všechny úsudky se ***stejnou logickou formou*** jako platný úsudek jsou platné:

  $d \vee p, d \supset o \models \neg o \supset p$

Za proměnné *d*, *p*, *o* můžeme dosadit kterýkoli elementární výrok:

Hraje na housle nebo se učí.

Jestliže hraje na housle, pak hraje jako Kubelík.

Tedy $\Rightarrow$ Jestliže nehraje jako Kubelík, pak se učí.

Platný úsudek – stejná logická forma

Varianta stejné logické formy

V programu je chyba nebo je problém příliš složitý

Je-li v programu chyba, pak bylo zadání špatně formulováno

Ale zadání bylo formulováno dobře

Tedy, problém je příliš složitý

- $d \vee p,\ d \supset o \models \neg o \supset p$
- $d \vee p,\ d \supset o,\ \neg o \models p$
- $p \vee s,\ p \supset z,\ \neg z \models s$

(Výrokově) logické vyplývání

$P_1,\ldots,P_n \models Z$ právě když $\models (P_1 \wedge\ldots\wedge P_n) \supset Z$.

- ***Důkaz, že formule je tautologie, nebo že závěr Z logicky vyplývá z předpokladů:***
  - Přímo – např. pravdivostní tabulkou
  - Nepřímo, sporem:
    $\neg((P_1 \wedge\ldots\wedge P_n) \supset Z)$, tj. $P_1 \wedge\ldots\wedge P_n \wedge \neg Z$ je kontradikce, čili množina $\{P_1, \ldots, P_n, \neg Z\}$ je sporná (nekonzistentní, nesplnitelná, *nemá model*: neexistuje ohodnocení *v,* ve kterém by byly všechny formule této množiny pravdivé)

Důkaz tautologie

$\models ((p \supset q) \wedge \neg q) \supset \neg p$

Sporem:

$((p \supset q) \wedge \neg q) \wedge p$ negovaná f. musí být kontradikce

1 1 pokus, zda může být 1

1 1

1 1 0

spor

Při žádném ohodnocení není negovaná formule pravdivá, tedy původní formule je tautologie