Cvičení 9

1. V kalkulu Hilbertova typu dokažte následující theorémy:

    a. $(\neg A \supset (A \supset B)$
    b. $\neg\neg A \supset A$
    c. $A \supset \neg\neg A$
    d. $(A \supset B) \supset [(B \supset C) \supset (A \supset C)]$
    e. $(A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A)$
    f. $A \supset (\neg B \supset \neg(A \supset B))$

2. V kalkulu Hilbertova typu rozhodněte, zda následující formule je tautologie:

    a. $(q \supset r) \supset [(\neg p \supset r) \supset ((p \supset q) \supset r)]$

3. Rozhodněte, jaký je vztah mezi dokázaným theorémem v kalkulu Hilbertova typu a logickou pravdivostí dané formule.

4. Co je to důkaz z předpokladů a jak souvisí s teorémem dedukce?

5. Je pravda, že všechny dokazatelné formule v kalkulu Hilbertova typu jsou logicky pravdivé (tj. tautologie)? Pokud ano, tak jak bychom museli kalkul upravit, aby tomu tak *nebylo*, tedy abychom byli schopni *dokázat více* než jen tautologie. Mohlo by pak platit to, co jste rozhodli v bodě ad 3.? Byl by to „dobrý“ kalkul?

6. V Hilbertově kalkulu dokažte teorém:

    $[A(x) \supset B] \supset [\exists x\, A(x) \supset B]$, kde proměnná x není volná v B.

7. Jak zdůvodníte to, že Hilbertův kalkul je sémanticky konzistentní („*sound*“, korektní) ačkoliv pravidlo generalizace $A(x) \mid\!\!- \forall x\, A(x)$ nezachovává pravdivost?