

I) Příklady (převeďte následující věty do formulí PL1 a ověřte jejich ekvivalenci pomocí de Morganových zákonů):

1. Všechna prvočísla větší než 2 jsou lichá.
Je-li prvočíslo větší než 2, pak je liché.
Neexistuje prvočíslo větší než 2, které by nebylo liché.
Není-li číslo liché, pak to není prvočíslo větší než 2.

2. Marie má ráda pouze vítěze.
Pokud má Marie někoho ráda, pak je to vítěz.
Neexistuje nikdo takový, že by ho Marie měla ráda a nebyl to vítěz.
Kdo není vítěz, toho Marie nemá ráda.

3. Některá prvočísla nejsou lichá.
Není pravda, že všechna prvočísla jsou lichá.
Někteří studenti nejsou líní.
Ne všichni studenti jsou líní.

4. Žádné prvočíslo není sudé.
Je-li číslo sudé, pak to není prvočíslo.
Neexistuje sudé prvočíslo.

Žádný učený z nebe nespádl.
Kdo spadl z nebe, není učený.
Neexistuje učený spadlý z nebe.

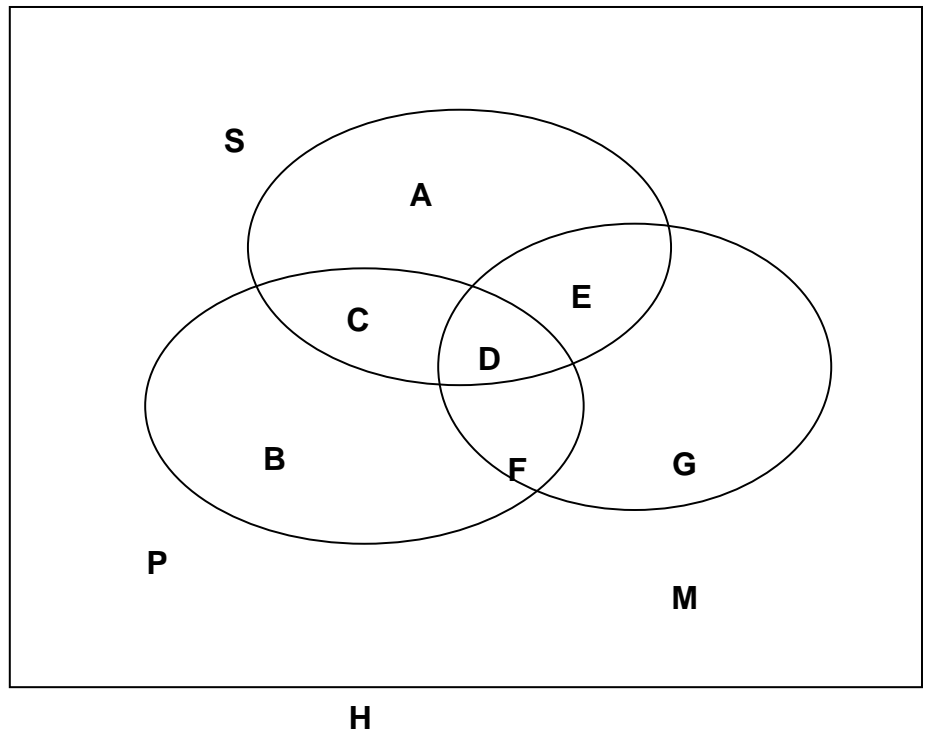
5. *Tvrzení ad 4. nejsou pravdivá:*
Existuje sudé prvočíslo.
Někteří učené spadli z nebe.

6. Některá čísla jsou menší než jejich druhá mocnina.
Není pravda, že žádné číslo není menší než jeho druhá mocnina.
Někteří mají rádi svou matku.
Není pravda, že nikdo nemá rád svou matku.

7. Neexistuje největší přirozené číslo.
Neexistuje x takové, že je větší nebo rovno než všechna y .
Ke každému číslu x existuje číslo y takové, že jeli x přirozené, pak není větší nebo rovno y .

II) Najděte modely formulí, které jste obdrželi analýzou výroků z příkladů a).

- III) Na obrázku jsou znázorněny obory pravdivosti predikátů S, P, a M.
 Definujte plochy A-H, a to:
- Formulemi predikátové logiky
 - Množinovým zápisem



IV) Sémanticky (Vennovými diagramy) rozhodněte, zda následující úsudky jsou platné.

Návod (postup):

- Obory pravdivosti jednotlivých predikátů zakreslíme jako vzájemně se protínající kroužky. Poté znázorníme situaci, kdy jsou premisy pravdivé, tj.
- Nejdříve* vyšrafujeme plochy, které odpovídají prázdným třídám objektů (všeobecné předpoklady)
- Poté* označíme křížkem plochy, které jsou jistě neprázdné (existenční předpoklady); křížek přitom klademe jen tehdy, když je jednoznačně určeno, kam může být umístěn, tj. neexistuje jiná plocha, "kam by mohl přijít"
- Nakonec ověříme, zda vzniklá situace znázorňuje pravdivost závěru.

a)
Všechny počítače mají procesor.
Všechny procesory potřebují elektřinu.

Všechny počítače potřebují elektřinu.

b)
Každý počítač je stroj.
Každý počítač má procesor.

Některé stroje mají procesor.

b') V předcházejícím úsudku ad b) přidejte předpoklad tak, aby byl platný.

c)
Některé programy studenti opisují.
Všechny projekty z Javy jsou programy.

Některé projekty jsou opsány.

d)
Student absolvuje logiku, když se učí.
Někteří studenti se neučí.

Někteří studenti neabsolvují logiku.

e)
Všechny pakety v seznamu jsou filtrovány.
Paket programu dc++ je v seznamu.

Paket dc++ je filtrován.

f)
Pakety nenacházející se v seznamu jsou filtrovány.
Http paket je v seznamu.

Http paket není filtrován.

g)
Všechny pakety v seznamu jsou filtrovány.
Neznámý paket hackera není v seznamu.

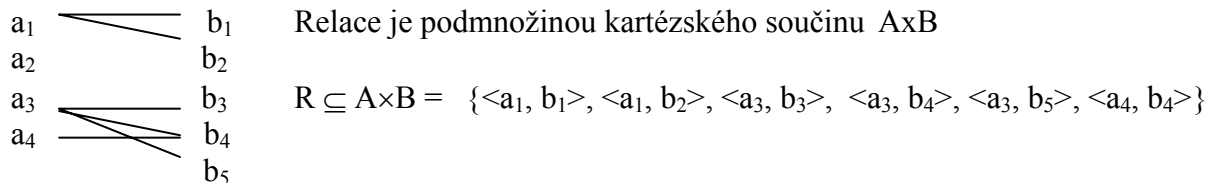
Neznámý paket hackera není filtrován.

Relace a funkce.

Relace R nad množinami A, B je podmnožina kartézského součinu: $R \subseteq A \times B$

Kartézský součin množin $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ se rovná

$$A \times B = \{ \langle a_1, b_1 \rangle, \langle a_1, b_2 \rangle, \langle a_1, b_3 \rangle, \langle a_1, b_4 \rangle, \langle a_1, b_5 \rangle, \langle a_2, b_1 \rangle, \langle a_2, b_2 \rangle, \langle a_2, b_3 \rangle, \langle a_2, b_4 \rangle, \langle a_2, b_5 \rangle, \dots, \langle a_n, b_5 \rangle \}$$

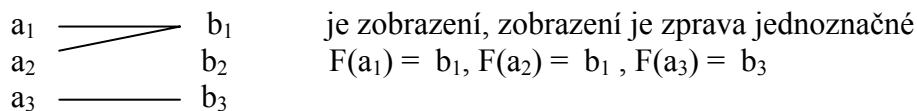
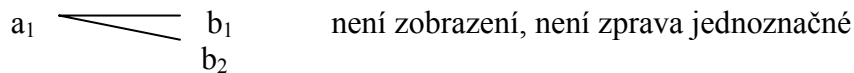


Zobrazení (parciální) f z množiny A do množiny B je binární relace [$f \subseteq A \times B$] o níž platí, že každému prvku $a \in A$ je přiřazen **nejvýše jeden** prvek $b \in B$, že $\langle a, b \rangle \in f$, zapisuje se často $b = f(a)$

$F: A \rightarrow B$ (zobrazení F z množiny A do množiny B)

$\forall a \forall b \forall c [(b = f(a) \wedge c = f(a)) \supset (b = c)]$ - zobrazení je *zprava jednoznačné*

vzor (def.obor) obraz (obor hodnot)



V PL1 používáme jako interpretaci funkčních symbolů formulí pouze **totální** funkce: ke každému prvku

$a \in A$ existuje **právě jeden** prvek $b \in B$.

$\forall a \exists b [F(a) = b] \wedge \forall a \forall b \forall c [((f(a) = b) \wedge (f(a) = c)) \supset (b = c)]$

Srovnání role predikátových P a funkčních f symbolů

Arita termu	symbol ve formulí aplikován na arg. tvoří:	interpretace symbolu	vyhodnocení formule /
atomickou formulí			
$n = 2$	$P(x,y)$	vztah (binární relace)	
$n = 1$ hodnota	$P(x)$	vlastnost (podmnož. universa)	pravdivostní
$n = 0$	T, F	logic.konstanta 0 nebo 1	

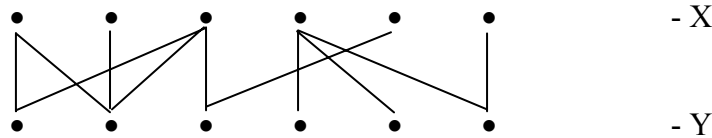
	term		
n = 2	$f(x,y)$	binární funkce: $U \times U \rightarrow U$	
n = 1	$f(x)$	unární funkce: $U \rightarrow U$	prvek
universa			
n = 0	a, b (ind. konstanty)	prvek universa	

Logika relací.

Zapište v jazyce PL1 a najděte modely:

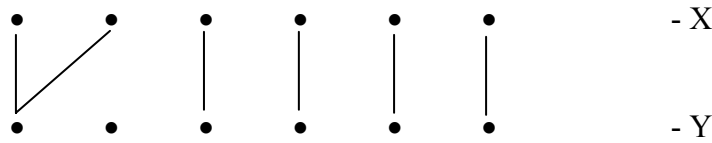
RELACE:

X, Y



ZOBRAZENÍ:

$X \rightarrow Y$



Relace R je zobrazení ... iff $\forall x \forall y_1 \forall y_2 [(R(x,y_1) \wedge R(x,y_2)) \supset y_1=y_2]$

- a) Relace R je **reflexivní**: Každý prvek je v relaci sám se sebou.

$$\forall x (R(x,x))$$

- b) Relace R je **symetrická**: Je-li první v relaci s druhým, pak druhý je v relaci s prvním.

$$\forall x \forall y [R(x,y) \supset R(y,x)]$$

- c) Relace R je **anti-symetrická**: Je-li první v relaci s druhým a druhý je v relaci s prvním, pak první je identický s druhým.

$$\forall x \forall y [(R(x,y) \wedge R(y,x)) \supset x=y]$$

- d) Relace R je **asymetrická**: Je-li první v relaci s druhým, pak druhý není v relaci s prvním.

$$\forall x \forall y [R(x,y) \supset \neg R(y,x)]$$

- e) Relace R je **transitivní**: Je-li první v relaci s druhým a druhý v relaci s třetím, pak první je v relaci s třetím.

$$\forall x \forall z \forall y [(R(x,y) \wedge R(y,z)) \supset R(x,z)]$$

$$\forall x \forall z \forall y [R(x,y) \supset (R(y,z) \supset R(x,z))]$$