

## Cvičení 5

1) **Rozhodněte**, zda jsou následující relace funkcemi, případně jakými. Budeme pracovat s množinami  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ ,  $B = \{b_1, b_2, b_3\}$  a  $C = \{c_1, c_2, c_3\}$  jejichž prvky jsou různé.

- a)  $R \subseteq A \times B$ ,  $R = \{\langle a_1, b_3 \rangle, \langle a_2, b_2 \rangle, \langle a_1, b_1 \rangle\}$
- b)  $R \subseteq B \times A$ ,  $R = \{\langle b_1, a_4 \rangle, \langle b_2, a_4 \rangle, \langle b_3, a_4 \rangle\}$
- c)  $R \subseteq A \times C$ ,  $R = \{\langle a_1, c_2 \rangle, \langle a_2, c_3 \rangle, \langle a_3, c_1 \rangle\}$
- d)  $R \subseteq A \times B$ ,  $R = \{\langle a_1, b_1 \rangle, \langle a_2, b_2 \rangle, \langle a_3, b_3 \rangle, \langle a_4, b_3 \rangle\}$
- e)  $R \subseteq B \times A$ ,  $R = \{\langle b_1, a_3 \rangle, \langle b_2, a_2 \rangle, \langle b_3, a_1 \rangle\}$
- f)  $R \subseteq A \times B \times C$ ,  $R = \{\langle a_1, b_1, c_1 \rangle, \langle a_2, b_2, c_1 \rangle, \langle a_1, b_2, c_3 \rangle\}$
- g)  $R = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, y = x^2\}$
- h)  $R = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, x = y^2\}$
- i)  $R = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, y = x^2\}$
- j)  $R = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, x = y^2\}$

2) **Vyjádřete slovně** následující skutečnosti za předpokladu, že predikát  $P$  znamená mít rád (kdo, koho), individuová konstanta  $m$  znamená Marie a individuová konstanta  $k$  Karel.

- a)  $\exists x \exists y P(x, y)$
- b)  $\exists x \forall y P(x, y)$
- c)  $\exists y \forall x P(x, y)$
- d)  $\forall x \exists y P(x, y)$
- e)  $\forall x \forall y P(x, y)$
- f)  $\forall x P(x, m)$
- g)  $\forall y P(k, y)$

3) **Dokažte**, že následující formule *nejsou ekvivalentní* (tj. najděte interpretaci, ve které je pravdivá jedna z nich, ale ne druhá). Jaký je mezi těmito formulemi vztah?

$$\exists x \forall y P(x, y) \quad \forall y \exists x P(x, y)$$

4) **Zapište v jazyce PL1** následující výroky a najděte jejich *modely* a také *interpretace*, ve kterých *nejsou pravdivé*:

- a) Množiny  $A$  a  $B$  mají neprázdný průnik. Některá  $A$  jsou  $B$ .
- b) Všechna čísla jsou sudá nebo lichá.
- c) Množina  $A$  je podmnožinou množiny  $B$ . Všechna  $A$  jsou  $B$ .
- d) Žádné  $A$  není  $B$ . Množina  $A$  je podmnožinou komplementu množiny  $B$ .
- e) Některá  $A$  nejsou  $B$ .

5) **Najděte model** pro následující formule

- a)  $\exists x R(x, f(x))$
- b)  $\forall x R(x, f(x))$
- c)  $\forall x \forall y [P(x, y) \supset Q(f(x), y)]$
- d)  $\forall x \forall y [P(x, y) \supset \neg Q(f(x), y)]$
- e)  $\exists x \forall y [V(x, y)]$
- f)  $\forall y \exists x [\neg V(x, y)]$