Cvičení 13

1) **Rozhodněte**, zda jsou následující relace funkcemi, případně jakými. Budeme pracovat s množinami $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$, $B=\{b_1,b_2,b_3\}$ a $C=\{c_1,c_2,c_3\}$ jejichž prvky jsou různé.
   a) $R \subseteq A\times B$, $R=\{\langle a_1,b_3\rangle,\langle a_2,b_2\rangle,\langle a_1,b_1\rangle\}$
   b) $R \subseteq B\times A$, $R=\{\langle b_1,a_4\rangle,\langle b_2,a_4\rangle,\langle b_3,a_4\rangle\}$
   c) $R \subseteq A\times C$, $R=\{\langle a_1,c_2\rangle,\langle a_2,c_3\rangle,\langle a_3,c_1\rangle\}$
   d) $R \subseteq A\times B$, $R=\{\langle a_1,b_1\rangle,\langle a_2,b_2\rangle,\langle a_3,b_3\rangle,\langle a_4,b_3\rangle\}$
   e) $R \subseteq B\times A$, $R=\{\langle b_1,a_3\rangle,\langle b_2,a_2\rangle,\langle b_3,a_1\rangle\}$
   f) $R \subseteq A\times B\times C$, $R=\{\langle a_1,b_1,c_1\rangle, \langle a_2,b_2,c_1\rangle,\langle a_1,b_2,c_3\rangle\}$

   Nechť dále N je množina přirozených čísel, Z množina celých čísel:
   g) $R=\{\langle x,y\rangle \in N\times N,\ y=x^2\}$
   h) $R=\{\langle x,y\rangle \in N\times N,\ x=y^2\}$
   i) $R=\{\langle x,y\rangle \in Z\times Z,\ y=x^2\}$
   j) $R=\{\langle x,y\rangle \in Z\times Z,\ x=y^2\}$

2) **Vyjádřete slovně** následující skutečnosti za předpokladu, že predikát *P* je interpretován jako vztah mít rád (kdo, koho), individuová konstanta *m* znamená Marie a individuová konstanta *k* Karel.
   a) $\exists x\exists y\ P(x,y)$
   b) $\exists x\forall y\ P(x,y)$
   c) $\exists y\forall x\ P(x,y)$
   d) $\forall x\exists y\ P(x,y)$
   e) $\forall x\forall y\ P(x,y)$
   f) $\forall x\ P(x,m)$
   g) $\forall y\ P(k,y)$

3) **Dokažte**, že následující formule *nejsou ekvivalentní* (tj. najděte interpretaci, ve které je pravdivá jedna z nich, ale ne druhá). Jaký je mezi těmito formulemi vztah?

$$\exists x\forall y\ P(x,y) \qquad\qquad \forall y\exists x\ P(x,y)$$

4) **Dokažte** (přirozenou dedukcí nebo v Hilbertově kalkulu), že formule $\exists x\forall y\ P(x,y) \supset \forall y\exists x\ P(x,y)$ je logicky pravdivá.

5) **Dokažte obě věty ze sl. 13, Presentace 13**, tj. že každá relace ekvivalence na množině *M* definuje rozklad na *M* a naopak, každý rozklad na *M* definuje relaci ekvivalence na *M.*

6) **Dokažte, že relace $\leq_5$ na množině $Z/\Leftrightarrow_5$** (slide 16, Presentace 13) je částečným uspořádáním.

7) **Zapište v jazyce PL1** následující výroky a najděte jejich *modely* a také *interpretace, ve kterých **nejsou** pravdivé*:
   a) Množiny A a B mají neprázdný průnik. Některá A jsou B.
   b) Všechna čísla jsou sudá nebo lichá.
   c) Množina A je podmnožinou množiny B. Všechna A jsou B.
   d) Žádné A není B. Množina A je podmnožinou komplementu množiny B.
   e) Některá A nejsou B.

8) **Najděte model** pro následující formule

a) $\exists x\, R(x,f(x))$

b) $\forall x\, R(x,f(x))$

c) $\forall x \forall y\, [P(x,y) \supset Q(f(x),y)]$

d) $\forall x \forall y\, [P(x,y) \supset \neg Q(f(x),y)]$