100 vědců do SŠ – 1. intenzivní škola

Olomouc, 21.–22. 6. 2012

Jak je důležité být fuzzy

Libor Běhounek
Ústav informatiky AV ČR

1. Úvod

Klasická logika

Logika se zabývá pravdivostí výroků a jejím přenášením v úsudcích

Klasická („aristotelovská“) logika je *dvojhodnotová:*

- **ANO** či **NE**
- **1** nebo **0** (např. v počítačích)
- **x < 5,** nebo **x není < 5** … *ostré* vlastnosti a množiny
- výrok je buď **pravdivý,** nebo **nepravdivý**

Vhodná pro matematiku a počítače, ale méně už pro skutečný svět a přirozený jazyk. Proč? – Protože spousta běžných vlastností má *neostrou* hranici!

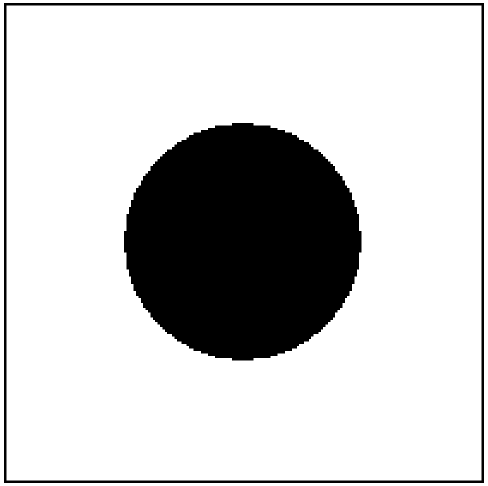
Vlastnosti s neostrou hranicí

- V kolika letech (a dnech) přestane člověk být *mladý?*
- Do kolika stupňů (a setin stupně) Celsia je voda *studená?*
- Kde přesně (na metr, milimetr…) končí *hory?*
- Kde přesně v duze začíná a končí *zelená?*

Tyto vlastnosti mají postupný, *neostrý* přechod – nikoli ostrou hranici

!!! Většina vlastností ve skutečném světě a přirozeném jazyce je neostrá; ostré vlastnosti se vyskytují především v matematice

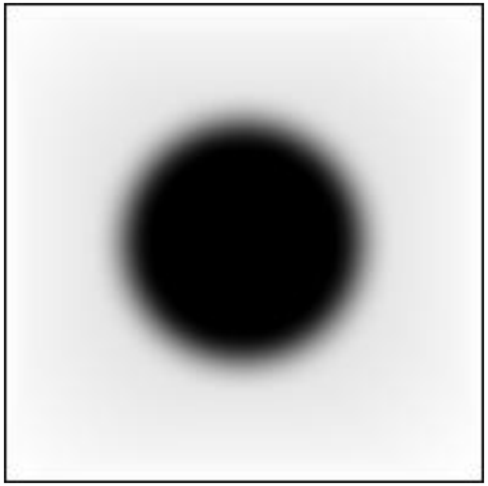
Ostré vs. neostré vlastnosti



ostrá množina

ostré vydělení

klasická logika



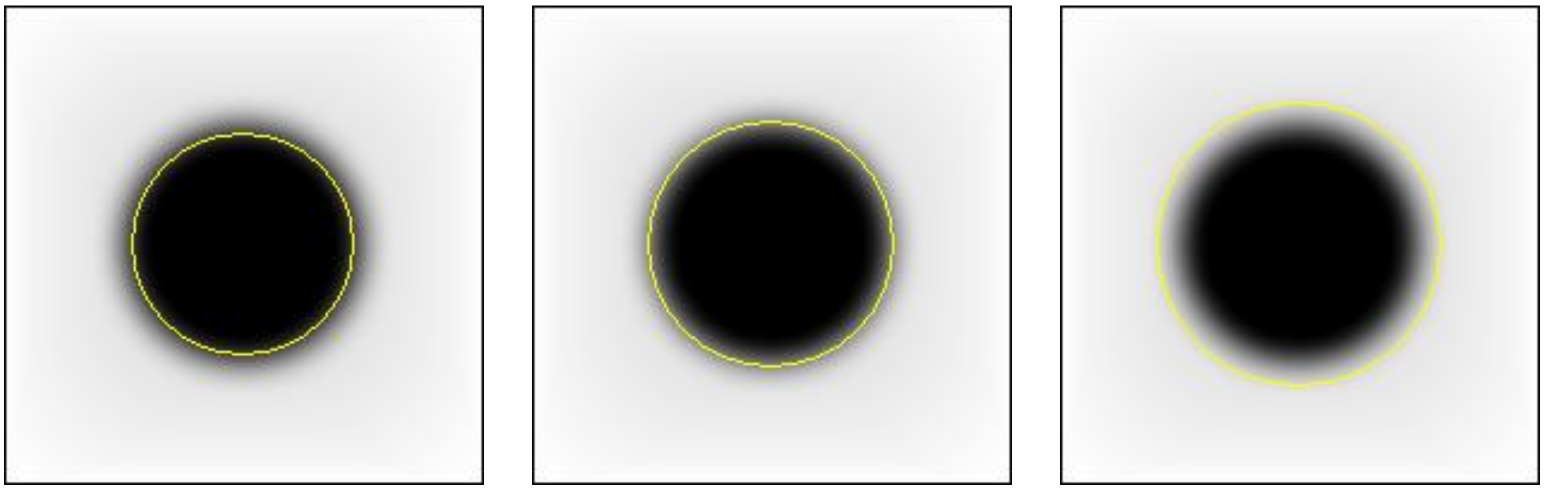
neostrá množina

neostré vydělení

neklasická logika?

Aproximace ostrými vlastnostmi

Neostré vlastnosti lze často aproximovat ostrými množinami – dodáním umělého prahu (ale kam?)



Tyto aproximace často fungují dobře (proto klasická logika lidem tak dlouho stačila), někdy však vedou k problémům

Paradox hromady

1 000 000 zrnek písku tvoří hromadu

Odebráním 1 zrnka písku hromada nepřestane být hromadou

Tedy 999 999 zrnek písku tvoří hromadu

[opakujme 1 000 000 krát]

Tedy 0 zrnek písku tvoří hromadu

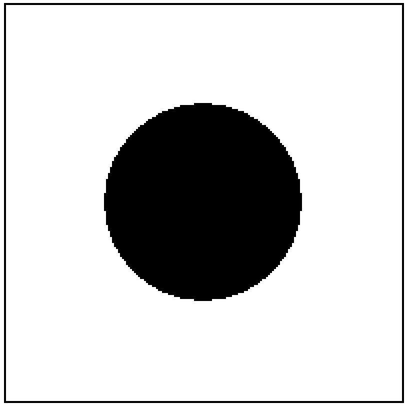
Paradox *sórités* (z řec. *sóros* = hromada), připisován Eubúlidovi z Mílétu (megarská škola, současník Aristotelův, autor 7 logických paradoxů)

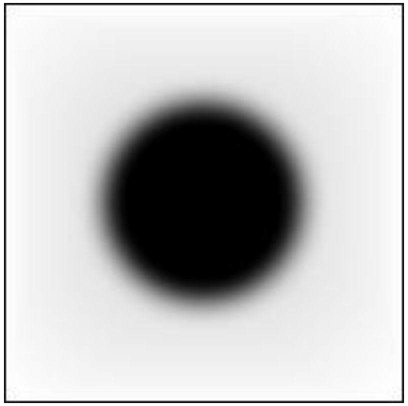
Variianty paradoxu hromady

- Paradox holohlavého (vypadnutím 1 vlasu se nestaneme holohlavými), atd.
- Pro neostré vlastnosti lze zkonstruovat (alespoň myšlenou) *posloupnost typu sórités* a na ní provést úvahu vedoucí k paradoxu
- V matematice: které je nejmenší *velké přirozené číslo?* (Každá neprázdná množina přirozených čísel má nejmenší prvek!)

$\Rightarrow$ Ostré množiny v některých případech nemodelují neostré vlastnosti dobře

Platí klasická logika pro neostré vlastnosti?





Ostrá vlastnost – klasická logika

Zákon vyloučení třetího:

buď *A*, nebo ne-*A*

bod buď je, nebo není černý

Neostrá vlastnost – neklasická logika!

Zákon vyloučení třetího zde neplatí:

buď *A* nebo ne-*A?*

bod buď je černý, nebo není černý?

– nikoli: může být šedý!

Neklasická logika neostrých vlastností

Neklasických logik bez zákona vyloučení třetího existuje více

(např. intuicionistická logika vhodná pro konstruovatelnost atp.)

Je třeba vybrat vhodnou. – Jak?

Vystihnout neostrý přechod $\Rightarrow$ *stupně* pravdivosti:

nikoli jen 0 a 1, ale i čísla mezi (např. 0,5 či 0,792)

= *fuzzy logika*

angl. *fuzzy* znamená *neostrý, rozostřený, nepřesný, opilý, …*

termín přispěl k popularitě fuzzy logiky, ale také k nedorozuměním

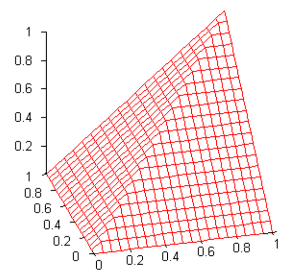
Fuzzy logika není nepřesná: je přesnou teorií neostrých vlastností

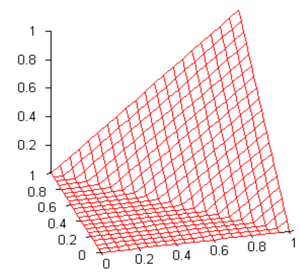
Výroková fuzzy logika

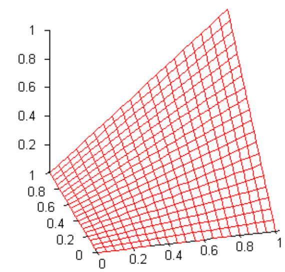
Místo dvou pravdivostních hodnot 0 a 1 máme nekonečně mnoho pravdivostních stupňů z intervalu [0, 1]

Výrokové spojky (*a, nebo, ne, když, právě když*) potom odpovídají *operacím* na intervalu [0, 1], zobecňujícím pravdivostní tabulky klasické logiky – „pravdivostním funkcím"

&	0	1
0	0	0
1	0	1







klasická logika : fuzzy logika   Gödelova   Łukasiewiczova   produktová

Různé pravdivostní funkce ⇒ různé fuzzy logiky (Gödelova, Łukasiewiczova, produktová, Hájkova BL, …)

Rozdíly oproti klasické logice

Ve fuzzy logice:

- neplatí zákon vyloučení třetího
- je více možností pro výrokové spojky
- *A a A* není obecně ekvivalentní *A* (vícenásobné použití neúplně pravdivého předpokladu může snižovat pravdivost závěru)
- některé formy úsudků jsou platné jen pro ostré výroky, nikoli pro neostré

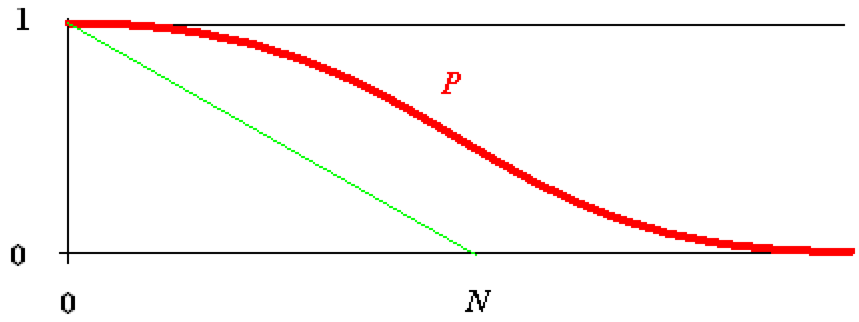
Dvouhodnotové vlastnosti … klasická logika … logika typu **`Boolean`**

Reálněhodnotové vlastnosti … fuzzy logika … logika typu **`real`**

(s reálnými čísly nakládáme jako se stupni pravdivosti výroků)

Řešení paradoxu hromady

Namísto ostrého skoku fuzzy logika umožňuje (a zdůvodňuje) pozvolné snižování stupňů pravdivosti:



Odebrání jednoho zrnka písku z hromady nepatrně sníží „stupeň hromadovitosti“ (např. o 0,000 001; klasická logika tento krok neumožňuje – zná jen 0 nebo 1).

Nula zrnek písku tedy nemusí být vůbec hromadou.

Fuzzy logika ≠ pravděpodobnost

Obě pracují s hodnotami v intervalu [0,1], ale mají rozdílné motivace i zákonitosti:

Pravděpodobnost … *neznámý* výsledek *ostrého* jevu

(padne na kostce číslo 6?) … stupně *pravděpodobnosti*

Fuzzy logika … *známý* stav *neostrého* jevu

(je zpola vypitá sklenice plná?) … stupně *pravdivosti*

Aplikace fuzzy logiky

- **Přesné usuzování o přibližných pojmech**
  Např. *fuzzy čísla:*
  zhruba 3 plus zhruba 1000 je zhruba 1000
  množství „přibližně 543“ a „přibližně 546“ se přibližně rovnají
  Lze je modelovat formálně pomocí fuzzy logiky
  (lidé takto počítat umějí, je ale třeba to naučit i počítače)

- **Matematická fuzzy logika** = teorie (základní výzkum)
- **Aplikace fuzzy logiky:** zejm. strojové řízení (např. v pračkách, fotoaparátech aj.)
  Dobré aplikace potřebují dobrou teorii

Trocha historie

Aristoteles – scholastici – Frege … klasická logika

1910 – 1950 … první neklasické logiky (Łukasiewicz, Heyting, Gödel)

1965 … Zadeh: pojem fuzzy množiny

1968 – 1998 … základy fuzzy logiky (Goguen, …, Pavelka, Novák)

od r.1975 … aplikace fuzzy logiky a fuzzy množin(fuzzy řízení)

1998 … Hájek: kniha *Metamathematics of fuzzy logic*

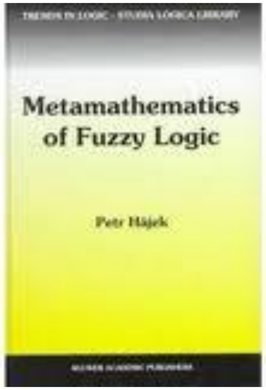
od r. 1998 … systematické zkoumání matematické fuzzy logiky

(zejm. v Praze, Ostravě, Olomouci, Bratislavě, Vídni, Linci,

Barceloně, Sieně, Milánu, Kanazawě, Kjótu, …)

Fuzzy logika v Česku

- Pionýři: Pultr, Pavelka, Novák (od 70. let)
- Pražská „Hájkova škola“ fuzzy logiky na ÚI AV ČR (Hájkova monografie z roku 1998 odstartovala celosvětový rozvoj *formální* fuzzy logiky, má přes 1000 citací)
- Teorie i aplikace na Ostravské univerzitě (Novák, …), UP Olomouc (Bělohlávek, …), …
- Aplikované fuzzy metody i teorie na ÚTIA AV ČR, FEL ČVUT, … … …



2. Fuzzy množiny

Zavedení pojmu fuzzy množiny

- Lotfi A. Zadeh, 1965: článek *Fuzzy sets* v časopise *Information and Control*
- Motivován inženýrskými aplikacemi
- Nyní volně ke stažení na www (v Google k 22. 6. 2012 první odkaz na dotaz: *Zadeh Fuzzy Sets*)

L.A. Zadeh (*1921)

Zadehův článek *Fuzzy Sets*

Z úvodu článku (volný překlad):

„… Soubor všech reálných čísel o hodně větších než 1, soubor všech krásných žen či soubor všech vysokých lidí zjevně netvoří množinu v obvyklém matematickém smyslu. Přesto takové … soubory hrají důležitou roli v lidském myšlení, zvláště v oblastech rozpoznávání vzorů, předávání informací a abstrakce.“

„Půjde o pojem fuzzy množiny, *tj. souboru s kontinuem stupňů náležení. Jak uvidíme, pojem fuzzy množiny poskytuje …vhodný rámec v mnoha ohledech připomínající aparát běžných množin, je však obecnější a může mít širší pole aplikací …“*

Charakteristické funkce množin

- Charakteristická funkce (klasické) množiny $A \subseteq X$:

$$\chi_A(x) = 1, \text{ pokud } x \in A,$$

$$\chi_A(x) = 0, \text{ pokud } x \notin A,$$

pro všechna $x \in X$.

Jde tedy o funkci $\chi_A: X \rightarrow \{0, 1\}$, jednoznačně určenou ostrou množinou (a jednoznačně ji vymezující)

Pozn.: uzavřené intervaly značíme [a, b], jak je zvykem v odborné literatuře (na rozdíl od středoškolských učebnic)

Definice fuzzy množiny

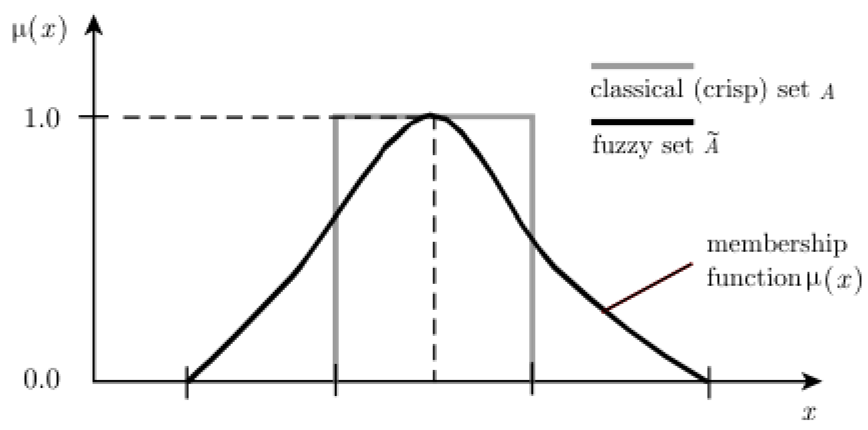
- Funkce příslušnosti fuzzy množiny A na (ostré) množině X:

  $$\mu_A: X \to [0, 1].$$

  Stupeň náležení $x \in A$ tedy může být libovolné číslo $\alpha \in [0, 1]$

  Značení: $\mu_A(x)$, či prostě $A(x)$, často dokonce jen Ax.

- Teorie fuzzy množin pracuje se *zobecněnými* charakteristickými funkcemi a nakládá s nimi, jako by vymezovaly neostře vymezené množiny. (Obr. Wikipedia)



Základní charakteristiky fuzzy množin

- Ostré množiny = ty, které nabývají jen stupňů náležení 0 či 1
- Prázdná fuzzy množina: $\mu_{\emptyset}(x) = 0$ pro všechna $x \in X$ (je ostrá)
- Jádro fuzzy množiny = ostrá množina „prototypických prvků“ (tj. náležících jí ve stupni 1): $\mathrm{ker}\ A = \{x \in X \mid Ax = 1\}$
- Nosič fuzzy množiny = ostrá množina prvků, které do ní alespoň částečně náleží: $\mathrm{supp}\ A = \{x \in X \mid Ax > 0\}$
- α-řez fuzzy množiny = ostrá množina prvků, které do ní náleží alespoň ve stupni α: $A_\alpha = \{x \in X \mid Ax \geq \alpha\}$

  Fuzzy množinu lze reprezentovat jako systém do sebe řazených ostrých množin (α-řezů)
- Výška fuzzy množiny: $\mathrm{hgt}\ A = \sup \{\alpha \mid A_\alpha \neq \emptyset\}$
- Normální fuzzy množina: $\mathrm{ker}\ A \neq \emptyset$ (tj. má prototypické prvky)

  Někteří autoři používají definici hgt A = 1, což není totéž

Operace s fuzzy množinami

- Průnik fuzzy množin A a B: $(A \cap B)x = \min(Ax, Bx)$,
- Sjednocení fuzzy množin A a B: $(A \cup B)x = \max(Ax, Bx)$,
- Doplněk fuzzy množiny A do ostré množiny X: $(-A)x = 1 - Ax$,

pro všechna $x \in X$.

Pro ostré množiny souhlasí s obvyklými množinovými operacemi.

Možností pro takové operace je ale více: často se používají např.:

- Součinový průnik: $(A \cdot B)x = Ax \cdot Bx$
- Odvážný průnik: $(A \otimes B)x = \max(0, Ax + Bx - 1)$, aj.

$\cap$, $\cup$ pracují po řezech (α-řez $A \cap B$ je průnikem α-řezů A a B), ale $-$, $\cdot$, $\otimes$ nikoli

Inkluze a rovnost fuzzy množin

- Fuzzy množina A je fuzzy podmnožinou fuzzy množiny B, právě když pro všechna $x \in X$ platí: $Ax \leq Bx$.

- Značení: $A \subseteq B$, jako by šlo o ostré množiny

- Ekvivalentně: $A \subseteq B$, právě když každý α-řez A je (klasickou) podmnožinou α-řezu B.

- Rovnost fuzzy množin je dána rovností funkcí příslušnosti (extenzionalita = fuzzy množina je určena svými prvky – s jejich stupni náležení)
  - Tj. A = B, právě když platí obě inkluze, podobně jako pro klasické množiny

Zákony platné pro fuzzy množiny

Pozorujte, že platí např. následující zákony teorie fuzzy množin:

- $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$
- $\emptyset \subseteq A$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $-(A \cap B) = -A \cup -B$
- $-(-A) = A$
- $\text{Ker } A \subseteq A \subseteq \text{Supp } A$
- $A \otimes B \subseteq A \cdot B \subseteq A \cap B$

Klasicky platný zákon $(A \cap B) \cup (A \cap -B) = A$ ale obecně platí pouze pro ostré množiny; pro fuzzy množiny je platná jen jedna inkluze: $(A \cap B) \cup (A \cap -B) \subseteq A$.

3. Fuzzy logika

Požadavky na fuzzy konjunkci

- Stupeň pravdivosti konjunkce p & q závisí jen na stupních pravdivosti výroků p, q („extenzionalita“).

  (Zkoumají se i neextenzionální spojky, jsou ale složitější)
- Komutativita (nezáleží na pořadí): $p \,\&\, q = q \,\&\, p$
- Asociativita (nezáleží na prioritě): $p \,\&\, (q \,\&\, r) = (p \,\&\, q) \,\&\, r$
- Monotonie (pravdivější výroky $\Rightarrow$ pravdivější konjunkce):

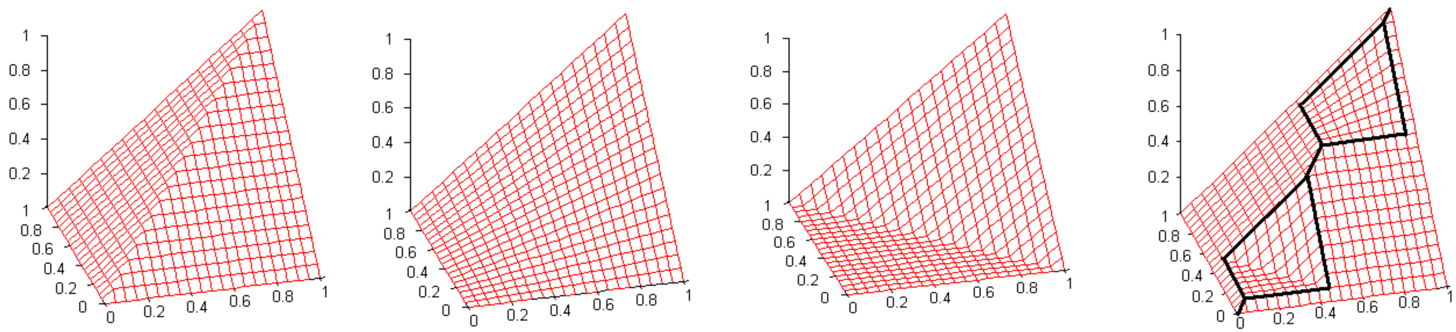
  jestliže $p \leq q$, pak $p \,\&\, r \leq q \,\&\, r$
- Klasické hodnoty (1 = plná pravdivost, 0 = plná nepravdivost):

  $1 \,\&\, p = p$, $0 \,\&\, p = 0$
- Spojitost (malá změna stupňů p, q $\Rightarrow$ malá změna stupně p & q).
- Idempotence $p \,\&\, p = p$ není vždy vhodná, proto ji nevyžadujeme

= tzv. spojité t-normy

Spojité t-normy

- Minimová (též: Gödelova) t-norma: $p \,\&_G\, q = \min(p, q)$
- Součinová t-norma: $p \,\&_\Pi\, q = p \cdot q$
- Łukasiewiczova t-norma: $p \,\&_Ł\, q = \max(0, p + q - 1)$



Věta (Mostert & Shields, 1957): všechny spojité t-normy lze jistým způsobem složit z těchto tří základních

Podrobnosti: anglická Wikipedie, heslo *T-norm*

Ostatní výrokové spojky

- Ostatní výrokové spojky lze definovat na základě konjunkce
- Disjunkce („nebo“): maximum
- Negace: vychází různě pro různé t-normy:
  - Łukasiewiczova t-norma: ne-p = 1 – p („involutivní negace“)
  - Minimová a produktová t-norma („striktní negace“):

$$\text{ne-}p = 1, \text{ jestliže } p = 0$$

$$\text{ne-}p = 0, \text{ jestliže } p > 0$$

Příklad: nevysoký (involutivní), nevinný (striktní)

- Důležitá spojka (vyjadřující plnou pravdivost výroků):

$$\Delta x = 1, \text{ jestliže } x = 1$$

$$\Delta x = 1, \text{ jestliže } x < 1$$

Zákony fuzzy logiky

- Některé výroky dostávají ve všech fuzzy logikách hodnotu 1 … tautologie fuzzy logiky. Např.:
  - **p & q = q & p**
  - **p $\leq$ ne-(ne-p)**

- Některé platí jen v některých fuzzy logikách. Např.:
  - **ne-(ne-p) = p** (zákon dvojité negace)

    platí v Łukasiewiczově, ale ne v produktové ani Gödelově
  - **p & p = p**

    platí v Gödelově, ale ne v Łukasiewiczově ani produktové

- Některé zákony platí v klasické, ale ne ve fuzzy logice:
  - **p nebo ne-p** (zákon vyloučení třetího)

Formální fuzzy logika

- Tautologie fuzzy logiky lze axiomatizovat = Hájkova logika BL („Basic fuzzy Logic“):
  - $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$
  - $p \,\&\, (p \to q) \to q \,\&\, (q \to p)$
  - $(p \to (q \to r)) \to (p \,\&\, q \to r)$
  - $(p \,\&\, q \to r) \to (p \to (q \to r))$
  - $((p \to q) \to r) \to ((q \to p) \to r) \to r)$
  - $0 \to p$
  - Pravidlo *modus ponens:* z již odvozených p, $p \to q$ lze odvodit q
- Speciální fuzzy logiky = rozšíření BL o další axiomy, např.:
  - Łukasiewiczova: $(p \to 0) \to 0) \to p$
  - Gödelova: $p \to p \,\&\, p$
- Formální fuzzy logika studuje vlastnosti a vzájemné vztahy těchto logik (úplnost, složitost, teorii důkazů, …)

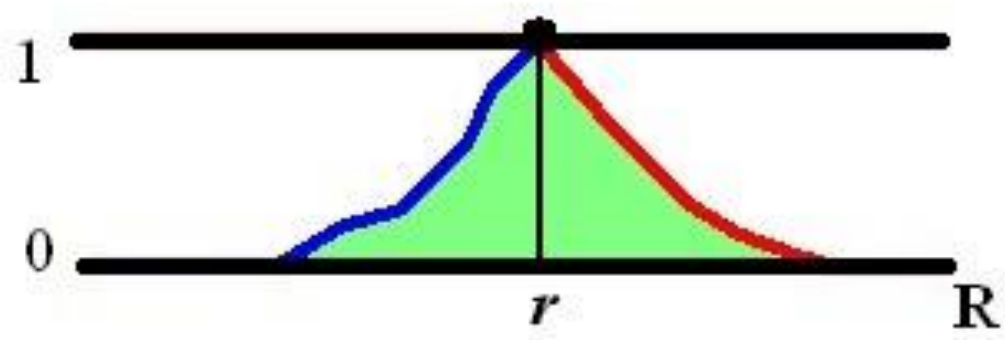
4. Fuzzy čísla

Pojem fuzzy čísla

- Přibližná množství: přibližně 5, o hodně více než 1000, zhruba mezi 100 a 200, …
- Modelování ostrými množinami se dostává do obvyklých problémů, lze je ale modelovat fuzzy množinami
- Potřebujeme nejen modelovat přibližné množství nějakou fuzzy množinou, ale také definovat aritmetické operace pro takováto fuzzy čísla

Reprezentace pomocí „hustoty“

- Stupeň příslušnosti vyjadřuje, jak moc je pravdivý výrok „x je přibližně r“

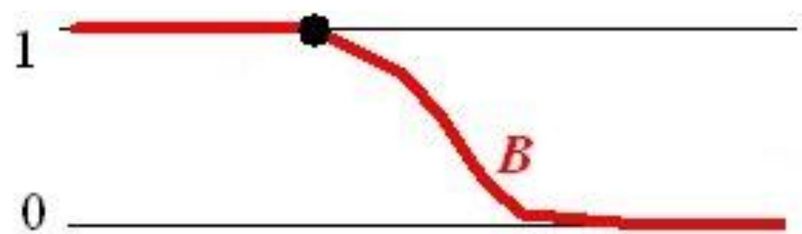


- Pro snazší výpočty se často vyžaduje např. linearita příslušných omezujících funkcí příslušnosti (tzv. trojúhelníková fuzzy čísla) apod.

Reprezentace pomocí distribuce

- Stupeň příslušnosti vyjadřuje, jak moc je pravdivý výrok „x je větší než fuzzy číslo A“

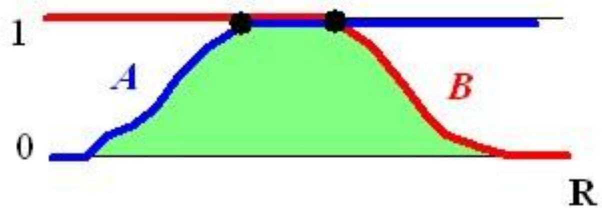
Případně, jak moc je x menší než fuzzy číslo B:



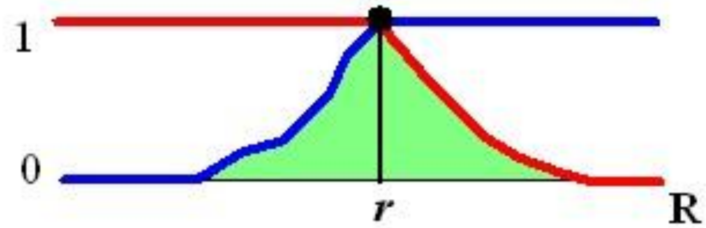
Umožňuje modelovat: ostrá čísla, nekonečná fuzzy čísla, …

Fuzzy intervaly

- Kombinací dolních a horních odhadů lze modelovat fuzzy intervaly [A, B], kde A a B jsou fuzzy čísla (distribuce):



- Čísla reprezentovaná hustotou jsou vlastně degenerované fuzzy intervaly:



Operace s fuzzy čísly

- Operace s fuzzy čísly mohou být definovány pomocí obecné metody přenášení operací na fuzzy množiny, zvané *Zadehův princip rozšíření*

- Tyto operace s fuzzy čísly pak tvoří *fuzzy aritmetiku,* v níž jsou dokazatelné takové věty, jako „přibližně 5 + přibližně 3 = přibližně 8“, nebo že sčítání fuzzy čísel je komutativní

- V některých verzích fuzzy aritmetiky jsou dokazatelné i věty typu „2 + 2 = 5 pro velmi vysoké hodnoty dvojky“ apod.

5. Fuzzy podobnost

Klasické relace ekvivalence

- Binární relace = vztah mezi dvěma objekty
- Matematicky reprezentována množinou (usp.) dvojic objektů (těch, které jsou v daném vztahu)
- Místo $\langle x, y \rangle \in R$ píšeme zpravidla jen Rxy
- Vlastnosti binárních relací:
  - Reflexivita: pro každé $x \in X$ je Rxx
  - Symetrie: pro každé $x, y \in X$: jestliže Rxy, pak Ryx
  - Tranzitivita: pro každé $x, y, z \in X$: jestliže Rxy a Ryz, pak Rxz
- Reflexivní, symetrické a tranzitivní relace se nazývají relace ekvivalence

Poincarého paradox

- Uvažujme relaci „x je (v nějakém smyslu) nerozlišitelné od y“ (např. mají nerozlišitelnou výšku apod.)
- Taková relace nerozlišitelnosti by intuitivně měla být tranzitivní (a reflexivní i symetrická): je-li x nerozlišitelné od y a y od z, pak je x nerozlišitelné i od z
- Tranzitivita relace nerozlišitelnosti ale vede k paradoxu:

  Uvažujme posloupnost objektů, z nichž každé dva sousední jsou nerozlišitelné.

  Podle tranzitivity pak musejí být od sebe nerozlišitelné i krajní objekty

  Při dostatečně dlouhé posloupnosti však bývají krajní objekty snadno rozlišitelné
- Použití netranzitivních relací nerozlišitelnosti však rovněž vede ke zcela protiintuitivním výsledkům. (Kde v řadě má nastat ostrý zlom v rozlišitelnosti, když sousední členy jsou nerozlišitelné?)
- Srv. paradox hromady. Řešení opět nabízí fuzzy logika.

Fuzzy řešení Poincarého paradoxu

- Fuzzy relace: Rxy může mít stupně příslušnosti mezi 0 a 1
- Podmínka tranzitivity, ovšem vyjádřená ve fuzzy logice, bude pro fuzzy nerozlišitelnost R platit:

$$Rxy \mathbin{\&} Ryz \leq Rxz$$

- Vzpomeňme: fuzzy & je spojitá t-norma (např. Łukasiewiczova), $\leq$ ve fuzzy logice odpovídá (plně platné) implikaci
- Pro Łukasiewiczovu t-normu platí:

  0,99 & 0,99 = 0,98; 0,98 & 0,99 = 0,97; 0,97 & 0,99 = 0,96 atd.

- Podmínka fuzzy tranzitivity tedy může být v Poincarého posloupnosti splněna:

Objekty:	a_0	a_1	a_2	a_3	….	a_{99}	a_{100}	a_{101}
$a_i \approx a_{i+1}$:	0,99	0,99	0,99	….	….	0,99	0,99	
$a_1 \approx a_i$:	1	0,99	0,98	0,97	….	0,01	0	0

Fuzzy podobnosti

- Relace fuzzy nerozlišitelnosti (a fuzzy podobnosti) tedy mohou splňovat fuzzy podmínky reflexivity, symetrie a tranzitivity, aniž by narážely na Poincarého paradox
- Fuzzy reflexivita: Rxx = 1
- Fuzzy symetrie: Rxy = Ryx
- Fuzzy tranzitivita: Rxy & Ryz ≤ Rxz (pro všechna x, y, z)
- Fuzzy relace ekvivalence (splňující tyto 3 podmínky) se nazývají fuzzy relace podobnosti (či nerozlišitelnosti)
- Od relací fuzzy rovnosti se navíc vyžaduje podmínka, že Rxy = 1 jen pro x = y
- Podobně se zkoumají relace fuzzy uspořádání apod., obecně jde o teorii fuzzy relací (část teorie fuzzy množin)

6. Aplikace fuzzy logiky

Fuzzy řízení

- Fuzzy relace se používají v praxi pro řízení procesů
- Základní myšlenkou je zpětná vazba, kterou nám může poskytnout funkce příslušnosti
- Dostatečnost přibližného řešení a upřesňování touto zpětnou vazbou v situacích, kdy je potřeba řídit proces rychle (pro přesné řešení by bylo třeba řešit diferenciální rovnici, což je náročné)
- Řízení je prováděno pomocí fuzzy pravidel reprezentovaných fuzzy relacemi, např.:
  - Je-li teplota VELMI VYSOKÁ, ventil má být ZAVŘENÝ
  - Je-li teplota VYSOKÁ, ventil má být PŘIŠKRCENÝ
  - Je-li teplota NÍZKÁ, ventil má být POOTEVŘENÝ
  - Je-li teplota VELMI NÍZKÁ, ventil má být OTEVŘENÝ
- Příslušné neostré vlastnosti (VYSOKÁ, POOTEVŘENÝ, …) jsou reprezentovány fuzzy množinami

Příklady aplikací fuzzy řízení

- První realizovaná aplikace:
  - cementová pec řízená fuzzy regulátorem (Dánsko 1975)
- Ukázkové příklady:
  - obrácené kyvadlo
  - vyhýbání překážkám, …
- Praktické aplikace:
  - Pračky (regulace teploty a přítoku vody)
  - Fotoaparáty (ostření, clona, …)
  - Toalety (vyhřívání sedátek)
  - Finská jezera (výška vody řízena fuzzy regulátorem založeným na Łukasiewiczově logice)
  - CADIAG = vídeňský expertní systém pro diagnostiku srdečních chorob (kombinace fuzzy a pravděpodobnostních metod, dosti nepřehledná pravidla, ale diagnostikuje lépe než lékař)

Neurčitost stupňů pravdivosti

- Jazyk *neurčuje* hodnoty pravdivostních stupňů vágních výroků (… je 35-letý člověk mladý ve stupni 0,76, nebo 0,81?)

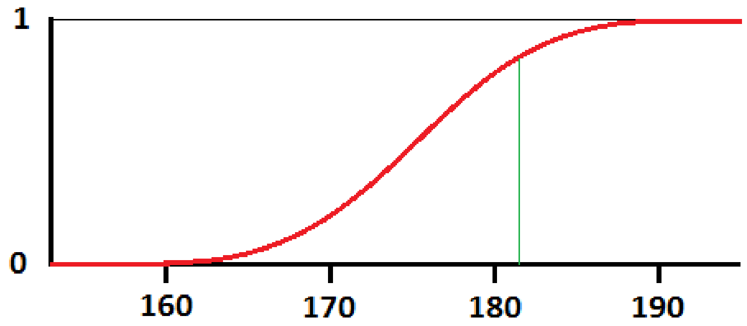
- Inženýrské fuzzy metody obvykle nějaké konkrétní stupně zvolí (jako technické zpřesnění pojmů)

- *Formální* (neboli *matematická*) fuzzy logika ale zkoumá zákony, které platí pro *všechna* taková technická zpřesnění. Proto jí na konkrétních stupních *nezáleží* a její zákony platí *obecně* pro *všechny* neostré vlastnosti.

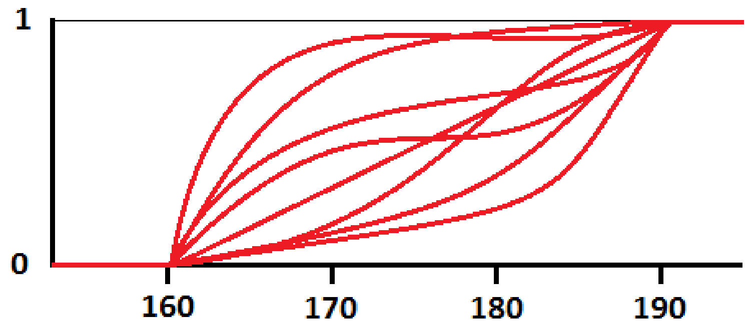
  (podobně jako zákony klasické logiky platí pro všechny možné stavy světa a jako zákony pravděpodobnosti platí pro všechny hodnoty subjektivních pravděpodobností)

Fuzzy logika vs. fuzzy inženýrství

- Inženýrské fuzzy metody: arbitrární volba funkce příslušnosti



- Formální logika: uvažuje všechny možnosti



- Logika: reprezentuje správně, ale nic nespočítá
- Inženýrství: spočítá vše, ale nereprezentuje vágnost správně

Jak je tedy důležité být fuzzy?

- Pomocí fuzzy logiky vyřešíme paradoxy (hromady, Poincarého)
- Lépe modelujeme neostré a vágní vlastnosti, přibližná čísla atd.
- Inženýrské aplikace fuzzy metod umožňují rychlé a efektivní řízení procesů
- Je k tomu ale třeba neklasického usuzování a sofistikovaných metod aplikované matematiky

Proto:

- Kdykoli je to možné, je lepší být ostrý
- Občas je ale lepší být fuzzy

[Obrázky na str. 7, 19 a 22 převzaty z Wikipedie, na str. 17 ze stránek ÚI AV ČR]